Tidskr.
Ped.

TIDSKRIFT

FÖR

MATEMATIK OCH FYSIK,

TILLEGNAD

DEN SVENSKA ELEMENTAR-UNDERVISNINGEN,

UTGIFVEN AF

D:R GÖRAN DILLNER
ADJUNKT I MATEMATIK VID UPSALA UNIVERSITET
(HUFVUDREDAKTÖR),

D:R FRANS W. HULTMAN
LEKTOR VID STOCKHOLMS HÖGRE ELEM.-LÄROVERK.

D:R T. ROB. THALÉN
ADJUNKT I FYSIK VID UPSALA UNIVERSITET

FJERDE ÅRGÅNGEN.

1871.

MED EN TAFLA.

UPSALA,
W. SCHULTZ.

UPSALA, 1872.
AKADEMISKA BOKTRYCKERIET
ED. BERLING.

Till Allmänheten.

Med detta häfte afslutas denna tidskrifts fjerde årgång.

Liksom under de tre föregående åren vilja vi äfven detta år kasta en blick på tidskriftens verksamhet under det nu förflutna året.

På den elementära afdelningen märka vi *Phragméns* och *Malmstens* uppsatser om bortskaffande af rotmärken ur eqvationer samt *Nordlunds* om maxima och minima.

På den lärda afdelningen förtjenar framhållas *Dillners* uppsats om definita integraler af synektiska funktioner. Anmärkningsvärd är här bland annat en formel, som till den MacLaurinska serien utgör ett supplement och förmedelst hvilken man med lätthet i förr ej framstälda serier utvecklar vissa slag af funktioner. I samma uppsats finner man den vanliga teorien för maxima och minima generaliserad så, att hon behandlar synektiska funktioner hvilka som helst.

Malmsten har lemnat ett enkelt bevis för egenskapen hos homogena funktioner och *Falk* har framstält en teori för partiela differentialeqvationer af andra ordningen.

Inom den analytiska geometriens område hafva *Falk*, *Hallström*, *Boije af Gennäs* och *Lundberg* frambringat lättlästa och intressanta uppsatser. — Läran om kedjebråk har af *Falk* och *Broman* blifvit bearbetad.

I eqvationsteorien möter oss en nätt lösning af kubiska eqvationer af *D—g*. Samme förf. har angifvit en enkel metod för approximativ rotutdragning och genom sin uppsats om benämningarna på olika logaritmsystem visat, att naturliga och neperska logaritmer äro helt olika saker.

Inom den tredje afdelningen lär oss *Lundqvist* bland annat, att man medelst spektralanalysen lyckats finna, att på solen rasa hvirfvelstormar, der vätgasmassorna röra sig med en hastighet af 20 svenska mil i sekunden, samt att fixstjernan Sirius aflägsnar sig från vårt solsystem med en hastighet af fyra och en half mil i sekunden.

Sju arbeten hafva blifvit granskade. De i mogenhetsexamina utgifna satserna hafva blifvit meddelade äfvensom några skolynglingars lösningar af åtskilliga bland dem.

Årets prisuppgifter ha blifvit besvarade af sju svenskar, en norrman och två danskar.

Med detta häfte afslutas den nuvarande följden af tidskriften. Redaktionen har dock för afsigt, så vida omständigheterna sådant medgifva, att i höst under en något förändrad titel och plan börja utgifva en ny följd af tidskriften, hvarvid akad. adjunkten *Thalén* kommer att inträda såsom hufvudredaktör i stället för akad. adjunkten *Dillner*, hvilken senare jämte akad. adjunkten *Rubenson* och undertecknad komma att verka som medredaktörer. I afseende på den nya tidskriftens plan skall vid utgifvandet af dess första häfte närmare underrättelse lemnas.

Tacksam för den välvilja, redaktionen af allmänheten under dessa fyra år rönt, tager hon nu afsked för att snart åter framträda under en något olika sammansättning och med en i någon mon förändrad plan för sin verksamhet. Denna sistnämnda blifver i samma mon angenäm som den uppmuntras och underlättas genom insändande af för tidskriften lämpliga bidrag.

Stockholm, den 6 april 1872.

F. W. HULTMAN.

Innehåll.

Afdelning I.

Afdelning II.

Afdelning III.

Afdelning IV.

AFDELNING I.

Om bortskaffande af rotmärken ur eqvationer.

Af F. W. HULTMAN.

Sjelf har jag trott och har äfven i några läroböcker sett det påståendet uttryckt, att en likhet, hvars ena led är fritt från rotmärken och hvars andra led innehåller fyra eller flere med rotmärken försedda termer ej kan befrias från de i likheten ingående rotmärkena.

Tag t. ex. likheten

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{u} + \sqrt{z} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Genom omedelbar upphöjning i qvadrat och derpå följande öfverflyttning erhålles:

$$2(\pm\sqrt{xy} \pm \sqrt{xu} \pm \sqrt{xz} \pm \sqrt{yu} \pm \sqrt{uz})^* = 1 - x - y - z - u.$$

Men denna likhet innehåller flere rotmärken än den ursprungliga, och det synes derföre vara förenadt med ännu större svårigheter att bortskaffa rotmärkena ur denna likhet.

Ville man på försök skrifva likheten (1) under någon af formerna

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{u} = 1 - \sqrt{z}$$

eller

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 - \sqrt{z} - \sqrt{u}$$

---

* Vi sätta $\pm$ framför rotmärkena, emedan vi ej veta, om storheterna x, y, u och z äro imaginära eller reela, och i händelse af det senare, om de äro positiva eller negativa.

och derefter qvadrera, skulle man finna en likhet, som innehölle fyra radikaler och således lika många som den ursprungliga.

Satte man slutligen likheten (1) under formen

$$\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} - \sqrt{u} - \sqrt{z},$$

skulle man få en likhet med sex radikaler, hvilkas antal dock på grund af (1) kan inskränkas till fyra.

I alla händelser har man genom qvadrering fått likheter, som innehållit minst lika många med rotmärken försedda termer som den ursprungliga likheten (1). Häraf förklaras orsaken till ofvan antydda förmodan om omöjligheten att ur en likhet med många radikaltermer bortskaffa rotmärkena.

Emedlertid erhöll jag i slutet af förlidet år af lektor Phragmén ett bref, hvari han visade mig, huru man utan svårighet kunde bortskaffa qvadratrotmärkena ur en likhet med huru många radikaltermer som helst. Som exempel valde han likheten

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} - \sqrt{u} - \sqrt{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \ (2).$$

Kort efter emottagandet af lektor Phragméns bref sammanträffade jag med statsrådet Malmsten och omtalade då för honom, att Phragmén löst uppgiften att bortskaffa qvadrat-rotmärkena ur en eqvation. Lifvad häraf angrep statsrådet Malmsten genast samma problem och löste det generelt för rotmärken af hvad grad som helst. — Vi meddela här begges metoder.

1. *Phragméns metod att ur en likhet af formen (2) bortskaffa qvadratrotmärkena.*

Först behandlas likheten så, att tvenne radikaler t. ex. $\sqrt{u}$ och $\sqrt{v}$ befrias från sina rotmärken. Derefter befrias 2 andra, t. ex. $\sqrt{z}$ och $\sqrt{t}$ från sina rotmärken, och så fortfares tills man kommer till de två (eller till den ena) sista.

Vi skola här visa de närmare detaljerna utförda på likheten (2).

A. *Bortskaffande af rotmärkena i radikalerna* $\sqrt{u}$ *och* $\sqrt{v}$.

För detta ändamål skrifves (2) under formen

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

Häraf erhålles genom qvadrering

$$\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt{z} + \sqrt{x}\sqrt{t} + \sqrt{y}\sqrt{z} + \sqrt{y}\sqrt{t} + \sqrt{z}\sqrt{t} - \alpha = \sqrt{u}\sqrt{v},$$

hvarest 2α betecknar de termer, som ej innehålla rotmärken.

Qvadreras nu på nytt, får man

$$\beta^2 = 3\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}\sqrt{t} + \gamma\sqrt{x}\sqrt{y} + \delta\sqrt{x}\sqrt{z} + \varepsilon\sqrt{x}\sqrt{t} + \zeta\sqrt{y}\sqrt{z} + \eta\sqrt{y}\sqrt{t} + \vartheta\sqrt{z}\sqrt{t},$$

hvarest β^2, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ beteckna storheter, som ej innehålla rotmärken. Här förekomma ej u och v behäftade med några rotmärken.

B. *Bortskaffande af rotmärkena i radikalerna* $\sqrt{z}$ *och* $\sqrt{t}$.

För detta ändamål ordnas termerna i föregående likhet sålunda:

$$\beta^2 - \gamma\sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{z}\sqrt{t}(3\sqrt{x}\sqrt{y} + \vartheta) = \sqrt{z}(\delta\sqrt{x} + \zeta\sqrt{y}) + \sqrt{t}(\varepsilon\sqrt{x} + \eta\sqrt{y}).$$

Efter qvadrering och några enkla reduktioner får denna likhet följande form:

$$i^4 - k^3\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{z}\sqrt{t}(\lambda^3 + \mu^2\sqrt{x}\sqrt{y}),$$

der i^4, λ^3, k^3, μ^2 beteckna storheter, som ej innehålla radikaler.

Genom ytterligare qvadrering får man en likhet af formen

$$\xi^8 = \gamma^7\sqrt{x}\sqrt{y},$$

hvarest ξ^8 och ν^7 beteckna storheter, som ej innehålla rotmärken. Nu äro z och t befriade från sina rotmärken.

C. *Bortskaffande af rotmärkena i radikalerna* $\sqrt{x}$ *och* $\sqrt{y}$.

Föregående likhet gifver omedelbart

$$\xi^{16} = \nu^{14} xy,$$

hvarmed således likheten (2) är fullkomligt befriad från rotmärken.

2. *Malmstens* metod att ur en likhet af formen*

$$\sqrt[m]{x_1} + \sqrt[p]{x_2} + \sqrt[q]{x_3} + \ldots\ldots + \sqrt[s]{x_n} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

bortskaffa rotmärkena.

Sätter man här de på hvarandra följande termerna i ordning lika med

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n,$$

så får man likheterna

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 1, \\ &x_1 = \alpha_1^m \\ &x_2 = \alpha_2^p, \\ &x_3 = \alpha_3^q, \\ &\quad\vdots \\ &x_n = \alpha_n^s. \end{aligned}\right\}$$

Genom att ur detta eqvationssystem, (der $m, p, q, \ldots s$ antagas vara hela tal,) enligt teorien för största gemensamma divisorn eliminera

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

erhåller man en relation mellan

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

hvilken ej innehåller några rotmärken.

* Utgifvaren framställer här hans metod i en form, som något afviker från den, som statsrådet M. begagnade i sin muntliga framställning.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 249, årgången 1870).

10. MATTHIAS ANDREÆ BIÖRK.*

Biörks räknebok har följande titel: »Arithmetica eller Räkne-Book, vthi hvilken Blifwer förhandlat om Räknebokens naturlighe Ordning och gemeene Räkningar, båhde vthi heele och brutne Thal (med nyttighe Underrättelser förbättrade), såsom ock om then berömlige Algebra, samt Logistica sexagenaria och Geodætica. Hwilke så klart föreställas, att hwar och en, (som någhot Förstånd hafwer) kan them medh eghen Flijt fatta. Sammandraghen aff Matthia Andreæ Biörk. Westerås 1643». Arbetet är till-

* Ur Westerås Stifts Herdaminne af Joh. Fr. Muncktell hemta vi följ. biografiska underrättelser om Biörk.

Matthias A. Björkstadius föddes 1604. [Hans fader Andreas Georgii Schedvimontanus, som då sannolikt var domesticus i Stora Schedvi, 2 $\frac{3}{4}$ mil från Falun, förekommer från år 1610 såsom kapellan i domkyrkan i Westerås och från år 1618 såsom kyrkoherde i Björksta (2 mil från Westerås); han dog vid 91 års ålder 1652 efter att med 2 hustrur haft 19 barn. På en tafla i Björksta kyrka är han afmålad med sina 2 hustrur och 19 barn]. Matthias blef student 1627. Förordnades 1639 att undervisa i mathesis practica på Westerås gymnasium. Prestvigdes 1640 och blef samtidigt kollega i skolan. Förste underkapellan vid domkyrkan 1642, öfverkapellan 1643. En skicklig man med ringa framgång. Hade den olyckan under sin studietid i Westerås att för en flicka blifva dömd «mista rygghuden och annan plikt«. Frälste sig med flykten. Återkom efter en längre tid och fann nåd. Hade ett godt mekaniskt hufvud Gjorde ett långt och konstigt skjutgevär, som han ämnade erbjuda konungen. Också gjorde han sig vingar och flög, men föll och bröt ena benet. Dog 1651.

Gift 1640 med Mariana Hansdotter, enka efter skolkollega Bartholli.

Hans aritmetik lästes i stiftets skolor. Han fick 4 tunnor säd af kapitlets medel, derföre att han egnat sin bok åt consistoriales.

egnadt biskopen, kyrkoherden, lässmästaren, borgmästaren befallningsmännen, rådmännen, köpmännen, handelsmännen och borgerskapet i Westerås, innehåller $14\frac{1}{4}$ ark.

Biörks räknebok är synnerligen förtjenstfull så väl i vetenskapligt som pedagogiskt hänseende. Han bevisar näml. flere af sina regler medelst definitioner, axiom och postulat. Alla sina exempel ger han konkret form. Så t. ex. vid subtraktion i hela tal, då eleven skall ifrån 1492 subtrahera 1230, skrifver han detta exempel sålunda: Conradus Zeltes förmäler, att år 1492 är en gädda funnen i en sjö vid Heylbrunn, som hafver haft ett förgyld band om, derpå dessa ord voro skrifna: »jag är den första fisk, som Fredrik den andre med sina egne händer hafver släppt uti denna sjö år 1230 den 30 oktober». Nu är frågan, huru många år han hafver varit i denna sjö?

På regula dupli löser han vissa exempel genom att gå till enheten. Vi anföra ett. »8 hästar äta 9 spänn hafra uti 12 dagar; huru länge kunna 18 hästar förtära 24 spänn efter samma proportion?

Först frågar man således: 8 hästar äta 9 spänn, huru mycket äter en? Facit $1\frac{1}{8}$ spänn, det är 18 finska kappar, när man räknar 16 på spann.

När man nu vet, att en häst äter uti de 12 dagar 18 kappar, så frågar man andra gången, huru mycket han får äta på en dag? Facit $1\frac{1}{2}$ kappe.

Efter man ock vet, att en häst får $1\frac{1}{2}$ kappe om dagen, så frågar man, huru mycket 18 hästar äta på en dag efter samma proportion. Facit 27 kappar.

27 kappar ätas uti en dag, huru länge kunna de äta af 384 kappar eller 24 spänn eller 12 tunnor? Facit $14\frac{2}{9}$ dagar».

Af detta visar sig, att Biörk var en *pedagog af första ordningen*, i det han frigör sig från de diktatoriska regler, som förut varit de ensamt rådande i aritmetiken, och låter i stället det nyktra förståndet leda sig att lösa ett uppgifvet problem.

I afseende på alligationsräkning och regula cecis eller virginum begagnar han dock den gamla otillfredsställande metoden. Likväl säger han om den senare, att den borde kallas cæca för den blindhet, som finnes i dividendens sönderdelning. *

Under regula falsi med 2 antaganden förekomma följande två exempel:

Ex. 1. En åsna och en mula buro några flaskor vin, åsnan begynte att tröttna under bördan. Då sade mulan till henne: om man toge en flaska ifrån mig och lade på dig, så hade vi båda lika bördor. Men det vill jag icke, utan få du heller mig en flaska utaf din börda, så bär jag dubbelt emot dig. Nu frågas här, huru många flaskor åsnan hafver burit, huru många mulan?

Ex. 2. Till att förnimma helgonets namn på den dagen detta exempel är vordet tryckt, förtecknar man bokstäfverna i en naturlig ordning sålunda:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x	y	z

Om man nu tager 8 ifrån den första bokstafvens tal i namnet, så gifver resten tillkänna talet öfver bokstafven, som bör stå i det tredje och sjette rummet, och om man lägger 1 till detta talet, så hafver man den andra bokstafvens tal. Deraf subtraherar man 4, så blifver den fjerde bokstafvens tal igen. Den förstes och femtes tal adderade gifva den femtes tal. Men den andres och tredjes tal adderade utvisa den sjundes och ytterstes tal. När man omsider subtraherar den ytterstes tal utaf den förstes, så blifva 3 öfver.

* Förklaringen till de gamles sätt att räkna vid desse tvänne slag af räkningar ha vi framstält i denna tidskrifts första årgång under Clavius och Aurelius. Hvad namnet regula cecis beträffar betyder det sannolikt regeln om räkningen med zekiner. Det hette näml. först regula zekis, sedermera cekis, så cecis och i slutet af 1700-talet cæsis. Det första exempel i detta räknesätt handlar om några jungfrur, som med zekiner skulle betala hvad de förtärt på ett värdshus.

På detta sista exempel finnes intet svar. Vi hafva löst problemet och funnit att helgonet skulle ha det besynnerliga namnet *Medardi*.

I Biörks lärobok påträffar man för första gången vissa kapitel, som ej förut funnits tryckta i någon svensk räknebok. Dessa kapitel behandla läran om proportioner, algebran, logistica astronomica (stjernekonstens räknebok) samt geodætica (landtmäteri- eller decimalräkning). Vi skola med några ord beröra hvart och ett af dessa räknesätt.

Läran om proportioner.

Detta kapitel är till större delen skrifvet på latin, »efter sådana termini, som här förekomma, icke så beqvämligen kunna utföras». Detta häntyder på, att den indelning af proportioner, som vi här efter Biörk framställa, är hemtad från utländska författare och ej uppfunnen af Biörk sjelf. Biörk tecknar ett förhållande som ett bråk utan bråkstreck, t. ex. $\frac{56}{7}$, $\frac{9}{8}$ o. s. v.

Förhållandena äro af 5 slag, näml.:

1. *Proportio multiplex*, t. ex. $\frac{56}{7}$, hvilket är en proportio octupla.
2. „ *superparticularis* [hvars allmänna typ är $\frac{n+1}{n}$], t. ex. $\frac{9}{8}$, hvilket är en prop. superparticularis sesquioctava.
3. „ *superpartiens* [hvars allmänna typ är $\frac{n+m}{n}$, der $m > 1$], t. ex. $\frac{9}{7}$, hvilket är en proportio superbipartientes septimas; $\frac{8}{5}$, hvilket är en proportio supertripartientes quintas.
4. „ *multiplex superparticularis* [hvars allmänna typ är $\frac{nm+1}{n}$], t. ex. $\frac{13}{4}$, hvilket är en proportio tripla sesquiquarta.

5. *Proportio multiplex superpartiens* [hvars allmänna typ är $\dfrac{nm+r}{n}$], t. ex. $\genfrac{}{}{0pt}{}{16}{7}$, hvilket är en proportio dupla superbipartientes septimas.

Hittills har endast talats om en större storhets förhållande till en mindre. Vill man tala om en mindre storhets förhållande till en större, begagnas samma termer med den skilnad, att man sätter ordet sub emellan ordet proportio och efterföljande adjektivum. Så t. ex. utgör

$\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}$ en proportio superbipartientes tertias,

men $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}$ en proportio sub superbipartientes tertias.

Härefter följer en redogörelse huru förhållanden adderas, subtraheras, multipliceras och divideras.

Addition.	$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}$	. Summan	blir	$\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{12}$.	Motsvarar	således	multiplikation.
Subtraktion.	$\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}$	. Resten	„	$\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{8}$.	„	„	division.
Multiplikation.	$\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}$	. Produkten	„	$\genfrac{}{}{0pt}{}{27}{8}$.	„	„	upphöjning till dignitet.
Division.	$\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{4}$	. Qvoten	„	$\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{6}$.	„	„	qvadratrotutdragning

Genom intagandet af detta kapitel i sin lärobok har Biörk ofrivilligt förorsakat stor skada i den följande aritmetiska undervisningen, ty, som vi sedan skola få se, intogs detta kapitel i tiofaldig förstoring i flere derefter utkommande läroböcker, och ungdomen plågades i 150 år med skolastiska spetsfundigheter inlagda i en massa exempel på de 10 olika slagen i förhållanden. Vid redogörelsen för Agrelii räknebok få vi tillfälle att göra närmare bekantskap med dessa pedagogiska förvillelser.

Algebra.

Biörk begagnar Viètes beteckning (se vår redogörelse härför under Stjernhjelm, årgången 1870). Sålunda tecknar han $64x^3 + 16x^2 + 4x + 8$ med

$$64c \quad + 16z \quad + 4\sqrt{\ } + 8,$$

hvilket utläses: 64 cubiktal (cubus) + 16 qvadrater (zensus) + 4 saker (radix eller res) och ändå 8 deröfver.

Vi anföra endast 2 exempel.

Ex. 1. Ibland några studenter inföll en fråga om en summa penningar, som hvar och en isynnerhet hade. Archias sade: »jag hafver 8 mark mer än Sempronius». Men Titus sade: »jag hafver så mycket allena som i båda och ändå 4 mark öfver». Dertill svarade Alexander: »jag hafver 100 mark, hvilket är så mycket, som i hafven alle tillhopa». Nu är frågan, huru mycket Sempronius, Archias och Titus hafva haft.

Biörks lösning följer här.

Sempronii summa, som hafver varit minst,

kallar man en ting och skrifs således $1\sqrt{\ }$,

Archiæ summa . . . . $1\sqrt{\ } + 8$,

Titi summa . . . . $2\sqrt{\ } + 12$,

Alexandri . . . . $4\sqrt{\ } + 20$.

Men Alexandri summa var ock 100 mark.

Sål. $4\sqrt{\ }$ lika med 80,

hvaraf $1\sqrt{\ }$ lika med 20.

Ex. 2 Man vill söka ett tal, hvilket när det blifver multipliceradt i sig sjelft, och hvad deraf kommer, multiplicerad med dess $\frac{1}{3}$-del, så skall det göra 72.

Biörks lösning

$$1\sqrt{\ } \text{ gånger } 1\sqrt{\ } \text{ gifver } 1z.$$

$$1z \text{ gånger } \tfrac{1}{3}\sqrt{\ } \text{ gör } \tfrac{1}{3}c.$$

Detta skall göra 72, och således $1c$ lika med 216, hvadan $1\sqrt{\ }$ lika med 6.

Några fullständiga eqvationer af andra graden förekomma ej.

Hos Biörk påträffa vi för första gången en tryckt algebra samt tecknen + och −. Stjernhjelms algebra fanns endast i handskrift.

Logistica astronomica (stjernekonstens räknebok).

Innehåller de 4 räknesätten (addition, subtraktion, multiplikation och division) med grader, minuter, sekunder, terser, qvarter o. s. v.

Anm. 1 grad = 60 minuter = $(60)^2$ sekunder = $(60)^3$ terser = $(60)^4$ qvarter o. s. v.

Vid multiplikation och division synes Biörk hafva gjort sig skyldig till misstag.

Han säger t. ex. Man vill multiplicera 5 grader 21 minuter med 3 grader. Facit: $(5 \,.\, 60 + 21) \,.\, (3 \,.\, 60)$ eller 57780 sekunder. Förty när minuter multipliceras med minuter, så komma deraf sekunder.

Man vill multiplicera 15 grader med 3 grader, så blifver produkten 45 grader. Dividerar man grader med grader, så får man grader; minuter med minuter, så får man minuter. *

Geodætica (landtmäteri- eller decimalräkning).

Vid redogörelsen för detta slag af räkning yttrar sig Biörk sålunda:

»Somliga hafva delt sin mätestång uti alnar, skor, grader o. s. v. En part hafva sönderdelt hvar sin aln eller annat grundmått i 60 delar likasom uti logistica sexagenaria. Dermed hafva de kommit både uti ledsam räkning, såsom ock stor villfarelse i sin räkning. Detta hafva några behjertade mathemaci låtit gå sig till sinnes och uppsökt beqvämliga medel detta besväret till att lindra. Uti hvilken kamp Johann Hartman Beyer (d v. s. från Bayern) hafver sig manligen bevisat med sin logistica decimali. Medlet till att lindra med hafver han tagit ett beqvämligt och högt öfver andra privilegieradt tal, nämnligen 10.

Först byta de sin mätestång uti 10 skor. Hvar sko bytes sedan uti 10 digitos eller finger. Hvar finger bytes

* Detta är dock, hvad multiplikation beträffar, fullkomligt rigtigt, om man tänker sig ett talsystem med 60 till bas, i hvilken enheten betecknas med grader. Emedlertid hafva flere af hans efterföljare tillämpat denna metod på områden, der den icke är berättigad, i det att de multiplicera tunnor med tunnor o. s. v. I nära 200 år påträffa vi härefter i räkneböckerna fel af sådan natur.

I afseende på division åter borde Biörk ha sagt, att då minuter divideras med minuter uppkommer i qvoten ett abstrakt tal.

derhos uti 10 gran eller korn, hvart gran uti 10 skrupler, hvar skrupel uti 10 qvinter, hvar qvint i 10 sexter. Dem hafva de gifvit hvar sitt märke, således

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥
Pertica eller hela stången.	Skor	Finger.	Gran.	Skrupel.	Qvinter.	Sexter«.

Hos Stjernhjelm kallas desse mått:

Stång.	Fot.	Finger, tumbar (tum).	Gran.	Linier (ferulæ).	Punkter.

Anm. Biörks räkning med decimaler sammanfaller alldeles med Stjernhjelms, hvarföre vi hänvisa till vår redogörelse för Stjernhjelm. Der finna vi ock en redogörelse för professor Hartman (1603) och för decimalernas uppfinnare holländaren Stevin (1583).

Det har varit oss ett synnerligt nöje att redogöra för Biörk. Hans räknebok står långt öfver öfriga samtida räkneböcker. Vetenskapens alla framsteg hade han der inryckt, t. ex. den förut okända algebran och decimalräkningen. Bevis för en mängd regler påträffa vi hos honom, äfvensom en pedagogisk metod. Det är en heder för Westerås läroverk att inom några få år hafva haft så framstående lärare och läroboksförfattare som Stjernhjelm (lektor 1625) och den 6 år yngre genialiske men olycklige Biörk (lärare i Westerås från och med år 1639). (Forts.)

Problem, löst af Lars Phragmén.

I denna tidskrifts första årgång (1868) sidan 11 förekommer löst följande problem:

»En fader förordnar i sitt testamente, att det äldsta af hans barn skall af hans efterlemnade egendom hafva en summa a rdr och dertill $\frac{1}{n}$ af resten; det andra $2a$ rdr och dertill $\frac{1}{n}$ af det, som då är qvar, och det tredje $3a$

rdr och dertill $\frac{1}{n}$ af det, som då är qvar o. s. v. Vid verkställandet af testamentet befanns, att alla barnen fått lika mycket. Huru stor var egendomen, huru stor hvarje barns del, och huru stort var barnens antal?«

Detta problem löses ytterst enkelt genom att använda beviset från m till $m+1$.

Sättes nämnligen egendomens värde $= x$, erhåller man på grund af likheten mellan det första och andra barnets delar likheten

$$a + \frac{1}{n}(x - a) = 2a + \frac{1}{n}[x - 3a - \frac{1}{n}(x - a)],$$

hvaraf

$$x - a = an + x - 3a - \frac{1}{n}(x - a),$$

och således det första och andra barnets del

$$a + \frac{1}{n}(x - a) = a(n - 1),$$

hvilken likhet gifver egendomens värde

$$x = a(n - 1)^2.$$

De två första delarne äro således, hvardera, $= a(n-1)$.

För att bevisa, att de öfriga också äro det, så låt

$$m + 1 \geqq n - 1$$

och antag att de första m andelarne redan äro bevisade vara, hvar och en, $= a(n - 1)$. Tydligen är då den $(m + 1)$^sta^ andelen

$$(m + 1)a + \frac{1}{n} . [a(n - 1)^2 - am(n - 1) - a(m + 1)]$$
$$= (m + 1)a + \frac{1}{n} . a(n^2 - 2n - mn)$$
$$= a(n - 1).$$

Då satsen nu är bevist för de två första delarne, gäller den således för den tredje, således ock för den fjerde o. s. v.

Om
$$m + 1 = n - 1,$$
är
$$n^2 - 2n - mn = 0$$
och således återstoden $= 0$, sedan det $(n-1)^{sta}$ barnet uttagit $(n-1).a$, hvaraf redan synes, att delarnes antal är $= n - 1$.

Några anmärkningar till Euklids III bok.

Af student K. E. Broman.

De satser i Euklids tredje bok, som handla om tangering, synas i de vanliga läroböckerna ej alldeles så distinkt behandlade, som ske kunnat. Detta har gifvit anledning till efterföljande ändringsförslag, som till utgångspunkt valt den Bråkenhjelmska editionen, hvilken antages vara till hands.

Def. 1. Tvänne linier skära hvarandra i en viss gemensam punkt, om de närmaste punkterna åt hvardera sidan på den ena linien äro på hvar sin sida om den andra.*

*Def. 2. En rät linie säges tangera en cirkel i en viss punkt, om de der råkas, utan att skära hvarandra **.*

*Def. 3. Cirklar sägas tangera hvarandra i en viss punkt, om de der råkas, utan att skära hvarandra **.*

PROP. 1 ***. Teorem. *Om en rät linie går genom tvänne punkter på en cirkel †, så faller den delen deraf, som ligger mellan punkterna, inom cirkeln, de delar, som ligga utanför punkterna, utom densamma.*

---

* Den gamla def. I tages såsom prop., såsom många gjort.

** Tangering i en punkt hindrar sålunda ej tangering eller skärning i en annan.

*** De gamla prop. I och II byta lämpligen plats med hvarandra, ty I är sväfvande, utan kännedom om II.

† Enligt bruket för cirkelperiferi.

Beviset [någon punkt D (se Bråkenhj. fig.) måste vara cirkelns medelpunkt etc.] för senare delen analogt eller såsom koroll. af det första.

Koroll. 1. Ingen del af cirkeln är rätlinig.

Koroll. 2. En rät linie kan ej träffa en cirkel uti flere än tvänne punkter [en rät linie, som går genom en punkt inom cirkeln, träffar alltså densamma uti tvänne (sjelfklart), och blott tvänne punkter].

Koroll. 3. Tangenten råkar sin cirkel blott i tangeringspunkten.

PROP. 2. Problem. Lika med prop. I.

PROP. 5—6. Teorem. *Tvänne cirklar, som träffa* hvarandra, kunna ej hafva samma medelpunkt, utan att sammanfalla.*

Bevis. Ty om tvänne cirklar, som ega punkten A gemensam, hade samma medelpunkt B, utan att sammanfalla, så måste någon från den gemensamma medelpunkten B dragen rät linie träffa cirklarne i olika punkter: den ena i C, den andra i D o. s. v.

PROP. 10. Teorem. *En cirkel kan ej träffa* o. s. v. ... utan att sammanfalla.*

Koroll. Om tvänne cirklar tangera hvarandra, måste antingen den ena innesluta den andra eller båda ligga utom hvarandra (ty, skär den ena cirkeln den andra i en (ny: jfr III: def. 3) punkt, måste den skära i en tredje, derföre att cirkeln är en sammanhängande linie). I förra fallet sägas cirklarne *tangera hvarandra innantill*, i senare *utantill*.

PROP. 11. Teorem. *Om ... innantill i en viss punkt (T), och man ... genom denna punkt.*

---

* Hvarföre «träffa» blifvit användt, är klart. Obs., att i figuren ingen eller *blott en cirkel* lämpligen utritas.

Bevis. Om den räta linie, som sammanbinder medelpunkterna, ej går genom T, så låt den gå såsom någon annan rät linie, HK, och låt M vara den inre, S den yttre cirkelns medelpunkt. Drag MT*. Emedan nu M ej är medelpunkt till den yttre cirkeln (III. 5, 6), måste $MT > MK$ (3: VII). Men, som M är medelpunkt till den inre cirkeln, och MT blott räcker till periferin, skulle MK ej räcka dit**, hvilket är orimligt (III. 10. koroll.). Alltså måste den räta linie, som går genom cirklarnes medelpunkter, äfven gå genom T.

PROP. 11. A. Problem***. *Att med gifven radie* (= AB) *upprita en cirkel, som i en gifven punkt* (C) *tangerar en gifven cirkel (medelpunkt* D) *innantill.*

Konstruktion. Afsätt på CD inåt ett stycke $CE = AB$, tag E till medelpunkt för en cirkel genom C, då skall denna vara en lösning.

Bevis. Den cirkel, hvars medelpunkt ligger längre bort från C, har punkten C gemensam med den andra, men hvarje dess punkt, X, för öfrigt ligger utom densamma, ty den från den andra medelpunkten till X dragna linien > den till C dragna linien (3: VII). De båda cirklarne tangera följaktligen hvarandra innantill i punkten C (3: def. III). Sammanfaller E med D, sammanfalla ock cirklarne.

Emedan vidare ingen cirkel, hvars medelpunkt ej ligger på CD, kan tangera den gifna cirkeln (3: XI), måste den erhållna lösningen vara den enda möjliga.

PROP. 12. Teorem. *Om . . . . utantill en viss punkt, . . . genom denna punkt.*

---

* Man kunde i stället draga ST, då man har att i beviset använda III. 7 eller III. 8, allt efter som S ligger inom eller utom den inre cirkeln.

** Obs. dock, att ännu intet hindrar, att cirklarne äfven i K tangera hvarandra.

*** Den konverterade satsen till 11, hvilken väl är lika vigtig, torde böra framställas i ofvanstående form.

Konstruktion och bevis (medelst III. 8) analoga med dem för prop. 11.

PROP. 12. A. Problem. *Att, med gifven radie, upprita en cirkel, som i en gifven punkt tangerar en gifven cirkel utantill.*

Konstruktion och bevis (medelst III. 8) analoga med dem för prop. 11. A.

PROP. 13. Teorem*. *En cirkel etc.*

Bevis**. Om en cirkel kunde tangera cirkeln AB i tvänne punkter, A och B, så måste (enl. III. 11 eller III. 12) den räta linie, som sammanbinder medelpunkterna å ena sidan gå genom A och å andra genom B och är följaktligen räta linien AB. Men, emedan AB sålunda är i hvardera cirkeln en korda, som innehåller medelpunkten, måste dess midtpunkt vara cirklarnes gemensamma medelpunkt, hvilket är orimligt (III. 5, 6). Alltså etc.

PROP. 16 torde måhända lämpligen ändras till direkt refererande på problemet, att från en gifven punkt på en cirkel draga en tangent.

Beviset: den genom radiens ändpunkt dragna vinkelräta linien lösning; någon annan icke.

K. E. BROMAN. Student.

---

* Denna sats följer såsom koroll. af beviset till III. 11 A och III. 12 A. Hvarföre vi framställt ett oberoende bevis, behöfver ej påpekas.

** Figuren lämpligen blott *en* cirkel, med punkterna A och B markerade.

Sats 196 (C. F. Lindman), löst af A. P—N, K—G och W—D (elever i 7:de klassen vid ett svenskt läroverk).

1. Kalla medelpunkten till den i ΔABC inskrifna cirkeln för O. Då är

$$r = OC \,.\, \text{Sin}\,\frac{C}{2},$$

men

$$OC = \frac{a\,\text{Sin}\,\frac{B}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A}{2}},$$

$$\because \quad r = \frac{a\,\text{Sin}\,\frac{B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{C}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A}{2}},$$

Nu är

$$a = 2R\,\text{Sin}\,A$$

$$\because \quad r = 4R\,\text{Sin}\,\frac{A}{2}\,\text{Sin}\,\frac{B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{C}{2},$$

hvilket var det första, som skulle bevisas.

2. Kalla medelpunkten till cirkeln, som tangerar sidan a och de begge andra sidornas förlängningar för U. Då är

$$r_a = UC \,.\, \text{Cos}\,\frac{C}{2},$$

men

$$UC = \frac{a\,\text{Cos}\,\frac{B}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A}{2}}$$

$$\because \quad r_a = \frac{a\,\text{Cos}\,\frac{B}{2}\,\text{Cos}\,\frac{C}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A}{2}}$$

$$= 4\,R \operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2},$$

hvilket var det andra som skulle bevisas. På samma sätt bevisar man för r_b och r_c.

Sats 197 (C. F. Lindman), löst af P—N, K—G och W—D.

1. Enligt sats 196 är

$$r_a + r_b + r_c = 4R[\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C$$
$$+ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C],$$

hvilket åter genom sammanslagning af de 2 sista termerna blir

$$= 4R[\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A]$$

$$= 4R\left[\operatorname{Cos}\frac{B+C}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2} + \operatorname{Sin}^2\frac{B+C}{2}\right]$$

$$= 4R\left[1 - \operatorname{Cos}\frac{B+C}{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{B+C}{2} - \operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\left(1 + \operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Sin}\frac{C}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

$$= 2R\left[2 + 2\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2} - \operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 2R\left[\left(\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} + \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2} + \operatorname{Cos}^2\frac{A}{2} + \operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}\right)\right.$$
$$\left. + 2\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2} - 2\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}\operatorname{Sin}^2\frac{B}{2}\right]$$

$$= 2R\left[\operatorname{Cos}^2\frac{A}{2} + \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} + \operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} + \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2}\operatorname{Cos}^2\frac{A}{2}\right.$$
$$\left. + 2\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\right]$$

$$= 2R\left[\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{B}{2} + \mathrm{Sin}^2\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2R\left(\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{B}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{C}{2}\right), \quad \ldots\ldots (\beta)$$

hvilket var det första som skulle finnas.

2. Ur (β) erhålles

$$r_a + r_b + r_c = 2R\,\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} + 2R\,\mathrm{Cos}^2\frac{B}{2} + 2R\,\mathrm{Cos}^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{a\,\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}}{\mathrm{Sin}\,A} + \frac{b\,\mathrm{Cos}^2\frac{B}{2}}{\mathrm{Sin}\,B} + \frac{c\,\mathrm{Cos}^2\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\,C}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(a\,\mathrm{Cot}\frac{A}{2} + b\,\mathrm{Cot}\frac{B}{2} + c\,\mathrm{Cot}\frac{C}{2}\right.,$$

hvilket var det andra, som skulle finnas.

3. Ur (α) erhålles

$$r_a + r_b + r_c = 4R + 4R\,\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}$$

och således på grund af sats 196

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R,^* \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

hvilket var det tredje som skulle bevisas.

4. Med tillhjelp af (γ) och sats 196 finnes

$$r_a + r_b + r_c - 3r = 4R\left(1 - 2\,\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\left[1 - 2\,\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\left(\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2} - \mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\left[\left(\mathrm{Sin}^2\frac{C}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{C}{2}\right) - 2\,\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2} + 2\,\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2}\mathrm{Sin}^2\frac{B}{2}\right]$$

---

* Läsaren behagade gifva akt på denna eleganta sats meddelad af lektor Lindman. F. W. H.

Genom att inom parentesen tillägga

$$\text{Cos}^2\frac{A}{2}\text{Cos}^2\frac{B}{2}-\text{Cos}^2\frac{A}{2}\text{Cos}^2\frac{B}{2}$$

erhålles sedan utan svårighet

$$r_a+r_b+r_c-3r=4R\left(\text{Sin}^2\frac{A}{2}+\text{Sin}^2\frac{B}{2}+\text{Sin}^2\frac{C}{2}\right),\ldots(\delta)$$

$$=a\,\text{tg}\frac{A}{2}+b\,\text{tg}\frac{B}{2}+c\,\text{tg}\frac{C}{2},\quad\ldots\ldots\quad(\varepsilon)$$

hvilket var det fjerde som skulle finnas.

Sats 198 (C. F. Lindman), löst af P—N, K—G och W—D.

Om triangelns yta $=\varDelta$, så är som bekant

$$r=\frac{\varDelta}{p},$$

$$r_a=\frac{\varDelta}{p-a},$$

$$r_b=\frac{\varDelta}{p-b}$$

$$r_c=\frac{\varDelta}{p=c}$$

$$\therefore\quad r_a r_b r_c=\frac{p\varDelta^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=p\,.\,\varDelta=p^2r.$$ Hvilket skulle finnas.*

Sats 199 (C. F. Lindman), löst af P—N, K—G och W—D

Enligt sats 198 är

$$r r_a r_b r_c=p^2r^2=\varDelta^2,$$

och således

$$\sqrt{r r_a r_b r_c}=\varDelta=T.$$

Hvilket skulle finnas.

* Ett par andra (trigonometriska) bevis på denna sats äro ock insända. F. W. H.

Sats 200 (C. F. Lindman), löst af K—G.

$$\varDelta A_1 B_1 C_1 = T_1 = \varDelta A_1 IB_1 + \varDelta A_1 IC_1 + \varDelta B_1 IC_1$$
$$= \frac{r^2 \operatorname{Sin} C}{2} + \frac{r^2 \operatorname{Sin} B}{2} + \frac{r^2 \operatorname{Sin} A}{2}$$
$$= 2r^2 \operatorname{Cos}\frac{A}{2} \operatorname{Cos}\frac{B}{2} \operatorname{Cos}\frac{C}{2}.$$

Samma sats, löst af W—D.

$$\varDelta A_1 B_1 C_1 = T_1 = \frac{a_1 b_1 \operatorname{Sin} C_1}{2},$$

men

$$a_1 = 2r \operatorname{Cos}\frac{A}{2}$$
$$b_1 = 2r \operatorname{Cos}\frac{B}{2}$$

och

$$C_1 = 90^\circ - \frac{C}{2}, \text{ ty } \wedge C_1 = \text{hälften af } \wedge A^1 IB^1,$$

således

$$T_1 = 2r^2 \operatorname{Cos}\frac{A}{2} \operatorname{Cos}\frac{B}{2} \operatorname{Cos}\frac{C}{2}.$$

Sats 201 (C. F. Lindman), löst af K—G.

1. Tages en punkt, der bissektriserna råkas till medelpunkt, och en cirkel inskrifves i $\varDelta ABC$, så fås $\varDelta A_1 B_1 C_1$, genom att sammanbinda de punkter, i hvilka sidorna tangera cirkeln. Vi vilja först bevisa, att $\varDelta T_2$ eller $\varDelta A_2 B_2 C_2 \backsim \varDelta A_1 B_1 C_1$.

Drag

$$IA_1, \; IB_1, \; IC_1.$$

Tydligen är

$$\wedge IA_1 B_1 = \wedge ICB_1 = \wedge AA_2 C_2 =$$

och

$$\wedge IA_1 C_1 = \wedge C_1 BI = \wedge AA_2 B_2.$$

$$\because \quad \wedge IA_1 B_1 + \wedge IA_1 C_1 = \wedge AA_1 C_1 + \wedge AA_2 B_2$$

d. v. s.

$$\wedge A_1 = \wedge A_2.$$

På så sätt erhålles

$$\wedge B_1 = \wedge B_2.$$

Således äro trianglarne T_1 och T_2 likformiga.

Vi öfvergå nu till senare delen af satsen och draga derföre från medelpunkten O till den kring T omskrifna cirkeln radierna OA_2, OB_2, OC_2. Man har då

$$\begin{aligned} T_2 &= \Delta B_2 OA_2 + \Delta A_2 OC_2 + \Delta C_2 OB_2 \\ &= \frac{R^2 \operatorname{Sin} 2 C_2}{2} + \frac{R^2 \operatorname{Sin} 2 B_2}{2} + \frac{R^2 \operatorname{Sin} 2 A_2}{2}, \\ &= \frac{R^2}{2}(\operatorname{Sin} 2 C_1 + \operatorname{Sin} 2 B_1 + \operatorname{Sin} 2 A_1) \end{aligned}$$

men $\wedge A_1$ är supplement till $\wedge BIC$, som åter är supplement till $\frac{B+C}{2}$.

$$\begin{aligned} \because \quad T_2 &= \frac{R^2}{2}(\operatorname{Sin}(B+C) + \operatorname{Sin}(A+C) + \operatorname{Sin}(A+B)) \\ &= \frac{R^2}{2}(\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C) \\ &= 2R^2 \operatorname{Cos}\frac{A}{2} \operatorname{Cos}\frac{B}{2} \operatorname{Cos}\frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Anm. Satserna 200 och 201 visa, att

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

2. Med tillhjelp af satserna 200 och 201 finner man, att

$$T_1 T_2 = 4 r^2 R^2 \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} B \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} C,$$

eller, emedan enl. sats 196

$$r = 4R \operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Sin}\frac{C}{2},$$

$$T_1 T_2 = R^4 \operatorname{Sin}^2 A \operatorname{Sin}^2 B \operatorname{Sin}^2 C$$

$$= R^4 \cdot \frac{a^2}{4R^2} \cdot \frac{b^2}{4R^2} \operatorname{Sin}^2 C$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \left(\frac{ab \operatorname{Sin} C}{2}\right)^2$$

$$= \frac{T^2}{4}.$$

Sats 202 (C. F. Lindman), löst af P—N och K—G.

1. Emedan T_a och t_a hafva samma bas, så är

$$\frac{t_a}{T_a} = \frac{r}{r_a}.$$

Således är

$$\frac{t_a}{T_a} + \frac{t_b}{T_b} + \frac{t_c}{T_c} = \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c}$$

$$= \frac{r(p-a)}{T} + \frac{r(p-b)}{T} + \frac{r(p-c)}{T}.$$

$$= \frac{rp}{T} = 1.$$

2.

$$\frac{a}{T_a} + \frac{b}{T_b} + \frac{c}{T_c} = \frac{2a}{r_a a} + \frac{2b}{r_b b} + \frac{2c}{r_c c}$$

$$= 2\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)$$

$$= \frac{2}{r}.$$

3. Det är tydligt, att

$$\varDelta I_a I_b I_c = \frac{I_b I_c + A I_a}{2};$$

men

$$I_b I_c = I_b A + I_c A = \frac{r_b + r_c}{\operatorname{Cos} \frac{A}{2}}$$

och

$$A I_a = \frac{r_a}{\operatorname{Sin} \frac{A}{2}}$$

$$\because \quad \Delta I_a I_b I_c = \frac{r_a(r_b + r_c)}{2 \operatorname{Sin} \frac{A}{2} \operatorname{Cos} \frac{A}{2}}.$$

Insättas här värdena på r_a, r_b och r_c enligt sats 196, finner man

$$\Delta I_a I_b I_c = 8 R^2 \operatorname{Cos} \frac{A}{2} \operatorname{Cos} \frac{B}{2} \operatorname{Cos} \frac{C}{2};$$

men

$$4 \operatorname{Cos} \frac{A}{2} \operatorname{Cos} \frac{B}{2} \operatorname{Cos} \frac{C}{2} = \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C$$

$$\begin{aligned} \because \quad \Delta I_a I_b I_c &= 2 R^2 (\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C) \\ &= R^2 (2R \operatorname{Sin} A + 2R \operatorname{Sin} B + 2R \operatorname{Sin} C) \\ R(a + b + c) &= 2p R. \\ &= 2p \cdot \frac{abc}{4pr} = \frac{abc}{2r}, \end{aligned}$$

hvilket skulle finnas.

---

*Prisuppgiften för år 1870.**

Å uppgiften 1 har ingen lösning inkommit. Denna uppgift framställes derför som prisuppgift äfven för år 1871. Deremot har å prisuppgiften 2 inkommit en särdeles vacker elementär ** lösning af en af nutidens mest framstå-

---

* Mellankommande hinder ha vållat, att vi ännu ej varit i tillfälle att i tryck utgifva lösningarna å prisuppgiften för år 1869.

** Bellavitis har äfven lemnat en lösning grundad på den af honom uppfunna eqvipollens metoden, [jfr Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris 1869, sid. 289], hvilken lösning i det väsendtliga sammanfaller med den i årg. 1870 sid. 39 gifna.

ende geometrer, Giusto Bellavitis, professor i matematik vid universitetet i Padua. På grund af denna hans lösning, tillfaller honom det större af de år 1870 utsatta prisen.

Bellavitis lösning * följer här.

»*Om två trianglar* ABC *och* $AB'C'$ ** *ha gemensam midtellinie* AM *och om den enes halfva bas* MC' *är bissekerande* *** *medelproportional till den andres omfattande sidor* AC *och* AB, *så är och dennes halfva bas* MC *bissekerande medelproportional till den förres omfattande sidor* AC' *och* AB'.»

Såsom gifvet ha vi således:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ}\, \overline{MC'}^2 = AB\,.\,AC \\ 2^{\circ}\, MC' \,//\, \text{bissektr. till } \wedge BAC \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

Man uppritar $\Delta BMF \backsim \Delta AMB$, så att $AM : MB = MB : MF$, hvaraf lätteligen framgår, att äfven $\Delta AMC \backsim \Delta CMF$ och således $\wedge MCF = \wedge MAC$ och följaktigen $\wedge AMB = \wedge ACF$. Då vidare på grund af den sist anförda likformigheten $AC : CF = AM : MC = AM : MB$, så följer, att äfven $\Delta ACF \backsim \Delta AMB$, då alltså

$$AC : AF = AM : AB \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Enär vidare $\wedge CAF = \wedge MAB$, så framgår, att

$$\text{bissektr. till } \wedge BAC \,//^{\dagger}\, \text{bissektr. till } \wedge MAF \ldots (3).$$

I hvarje annan $\Delta AB'C'$, der AM är midtellinie, ha vi efter analog konstruktion:

$$AC' : AF' = AM : AB' \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

samt

$$\text{bissektr. till } \wedge B'AC' \,//^{\dagger}\, \text{bissektr. till } \wedge MAF' \ldots (5).$$

Enligt (1) och (3) fås $MC' \,//$ bissektr. till $\wedge MAF$; men MC' är enligt konstr. bissektr. till $\wedge AMF'$, då således $MF' \,//\, AF$. Vidare fås enligt (1) och (2) $\overline{MC'}^2 = AF\,.\,AM$; men enligt konstr. är $MC'^2 = \overline{MF'}\,.\,AM$, hvaraf följer $AF = MF'$, då alltså

* Vi hafva tillåtit oss en liten omredigering af Bellavitis bevis i ändamål att göra det lättare begripligt för nybörjaren.

** Figuren teckne läsaren sjelf [jfr årg. 1870, häftet 1 fig. 10].

*** Jfr årg. 1870, sid. 23.

† Tecknet // betyder här: *sammanfaller med.*

$$MF' \# AF$$

och följaktligen $AFMF'$ en parallelogram. Men nu är MC enligt konstr. bissektr. till $\wedge AMF$ eller, som är detsamma, $//$ med bissektr. till $\wedge MAF'$, d. v. s. enligt (5), $//$ med bissektr. till $\wedge B'AC'$; vidare är enligt konstr. och med stöd af (4) $\overline{MC}^2 = AM \,.\, MF = AM \,.\, AF' = AB' \,.\, AC'$. Vi ha alltså funnit

$$1^0 \ \overline{MC}^2 = AB' \,.\, AC'$$

$$2^0 \ MC // \text{bissektr. till } \wedge B'AC'.$$

Den 11 december 1870.

Vid namnsedelns öppnande stod följande att läsa: »Författaren till denna uppsats är

GIUSTO BELLAVITIS,

uppfinnaren af equipollens-kalkylen, professor i matematik vid universitetet i Padua«.

Prisuppgifter för år 1871.

1. *Om de räta linier BD och EA äro lika stora, hvilka dela midt itu tvenne vinklar EBA och BED, som ligga på samma sida om det gemensamma vinkelbenet BE, så äro dessa vinklar lika stora.*

2. *Att upprita en qvadrat så, att dess fyra vinkelspetsar ligga på tre gifna obegränsade räta linier.*

Det större priset är: de tre första årgångarne (1868—70) af TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK, tillegnad den svenska elementarundervisningen.

Det mindre priset är: PLAN TRIGONOMETRY BY I. TODHUNTER.

Lösningarne böra vara insända till lektor HULTMAN i Stockholm före den 1 januari 1872.

---

* Denna lärosats var ock prisuppgift för förlidet år.

AFDELNING II.

Anmärkningar beträffande benämningen: Naturlig, Hyperbolisk och Nepersk logaritm.

Af D—G.

Naturliga logaritmer är en lika passande som vanlig benämning på logaritmer inom det system, hvari e (eller talet 2,718281828 . . .) är bas.

Hyperboliska logaritmer är ett ganska olämpligt, men mycket vanligt synonym för naturliga logaritmer. Det skulle lika gerna kunna användas för logaritmer inom otaligt många andra system, om icke bruket inskränkt detsamma; ty den omständighet, att arean af hyperbeln $xy = 1$ uttryckes genom naturliga logaritmer enligt formeln

$$A = \text{nat. log}\,\frac{x}{a},$$

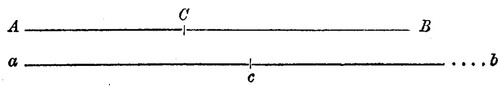
då koordinataxlarna bilda rät vinkel, utgör icke något tillräckligt skäl för att uteslutande kalla dessa logaritmer hyperboliska. Vid qvadratur af hyperbeln $xy = 1$ framställer sig nämligen otvunget logaritmer inom helt andra system, om blott koordinataxlarna äro snedvinkliga. Så är t. ex. hyperbelytan

$$A = \log_{10}\frac{x}{a},$$

då vinkeln mellan axlarna är $25^0\,44'\,25'',6$. Alla dessa logaritmer kunna derföre med lika rätt, som de naturliga, göra anspråk på att benämnas hyperboliska, och tydligt är, att då man gaf de naturliga logaritmerna ett särskilt namn, derföre att de framträdde vid beräkning af den liksidiga hyperbelns yta, man snarare borde vid bestämningen af detta hafva afsett kurvans s. k. liksidighet, än hennes egenskap att vara en hyperbel. Nu är emellertid bruket stadgadt, och man använder om logaritmer benämningen hyperbolisk såsom liktydig med naturlig. Man må dock akta sig för att gifva densamma äfven åt de Neperska, ty i annat fall gör man sig skyldig till det felet, att med samma namn beteckna tvänne betydligt olika saker.

Neperska logaritmer sägas vanligen vara samma logaritmer, som de naturliga. Att detta är oriktigt och att olikheten mellan de verkligt neperska och de naturliga logaritmerna är ganska stor, skall här nedan i korthet visas.

Neper låter sina logaritmer uppkomma på följande sätt. Tvänne punkter P och p röra sig utefter hvar sin linie, AB och ab, af hvilka den förra är begränsad och af längden M, den senare deremot obegränsad.



Rörelsen börjar samtidigt i punkterna A och a, på båda ställena med samma hastighet. P rör sig med aftagande hastighet och på sådant sätt, att denna i hvarje punkt C är proportionel mot det återstående vägstycket CB. Deremot rör sig p med oföränderlig hastighet. Om nu p befinner sig i c, då P är i C, så säger Neper, att

$$ac = \text{nep. log } CB.$$

Sådan är hans definition på logaritm.

I hvilket förhållande dessa neperska logaritmer stå till de naturliga, visar sig ganska lätt, om det rörelseproblem, med hvilket Neper sammanlänkat sin logaritmteori, löses med tillhjelp af den moderna kalkylen. Sättes nämnligen

$$ac = x\,,$$

$$AC = y\,,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0\,,$$

så blifva rörelseeqvationerna

$$x = v_0 t,$$

$$\frac{dy}{dt} = m(M-y),$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 = mM,$$

och således

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v_0}{M}(M-y),$$

hvaraf erhålles

$$-\text{nat. log}(M-y) = \frac{v_0 t}{M} - n$$

och, emedan $y = 0$, då $t = 0$,

$$\text{nat. log}\frac{M}{M-y} = \frac{v_0 t}{M}$$

eller

$$x = -M.\text{nat. log}\frac{M-y}{M}.$$

Poneras nu

$$M - y = N$$

och iakttages, att i detta fall

$$x = \text{nep. log}\, N,$$

så fås slutligen

$$\text{nep. log}\, N = -M.\text{nat. log}\frac{N}{M}.$$

Sådan är relationen mellan de neperska och naturliga logaritmerna. Att denna förändras med värdet af M är tydligt; men lika tydligt är också, att de båda slagen af logaritmer under alla omständigheter, och således oberoende af värdet på M, derutinnan ega diametralt motsatta egenskaper, att de naturliga logaritmerna växa, då de neperska aftaga, och tvärtom.

Neper sjelf antog $M = 10000000$. Hur stor olikheten mellan en nepersk och en naturlig logaritm för ett och samma tal i följd af detta antagande kan blifva, derom gifva nedanstående exempel en föreställning:

nep. log 1 = 161 180 956,509 5832. nat. log 1 = 0.
nep. log 10000000 = 0. nat. log 10000000 = 16,1180956..
nep. log 2909 = 81425309. nat. log 2909 = 7,97556466.

Sådane exempel bevisa till öfverflöd, att de neperska och de naturliga logaritmerna ej äro lika. Att de detta oaktadt någonsin kunnat förvexlas, förklaras måhända deraf, att då John Speidell år 1624 företog sig att i 6:te upplagan af sitt verk »New logarithms» förändra logaritmerna så, att de motsvarade, icke de neperska talen sjelfva, utan deras reciproka värden, man vid denna förändring kommit att fästa för ringa vigt för att deri finna någon anledning till att betrakta Speidells logaritmer såsom annat än neperska. Det är dock tydligt, att hans nya logaritmer vida mindre, än de ursprungliga, till sin beskaffenhet skilde sig från logaritmerna inom det naturliga systemet, och att de till och med skulle hafva blifvit alldeles identiska med dessa, om Speidell antagit $M = 1$.

Solution af $x^3 + px + q = 0$.

Af D—G.

Eqvationen

$$a(x+b)^3 - b(x+a)^3 = 0,$$

som efter utveckling och division med $a-b$ blir

$$x^3 - 3abx - ab(a+b) = 0,$$

göres term för term lika med

$$x^3 + px + q = 0,$$

om a och b bestämmas så, att de satisfiera eqvationssystemet

$$ab = -\frac{p}{3},$$

$$a + b = \frac{3q}{p},$$

hvilket naturligtvis sker, om a och b blifva rötter till andre grads eqvationen

$$z^2 - \frac{3q}{p} z - \frac{p}{3} = 0$$

och deras värden sålunda

$$(a, b) = \frac{3q}{2p} \pm \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}.$$

För dessa värden på a och b blifva följaktligen rötterna till

$$a(x+b)^3 - b(x+a)^3 = 0,$$

som äro

$$x_1 = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}),$$

$$x_2 = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{3}} \alpha + b^{\frac{1}{3}} \alpha^2),$$

$$x_3 = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{3}} \alpha^2 + b^{\frac{1}{3}} \alpha),$$

tillika rötter till eqvationen

$$x^2 + px + q = 0.$$

Obs. Då $a = b$, har den gifna tredje grads eqvationen lika rötter, och man kan följaktligen undvara den nu framställda solutionsmetoden, hvars duglighet man i detta fall kunde ha skäl att betvifla. Att man emellertid kan använda den, äfven om $a = b$, synes deraf, att värdena på x, som då blifva

$$x_1 = \frac{3q}{p},$$

$$x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}$$

verkligen satisfiera eqvationen.

Definita integraler af synektiska funktioner.

Af G. DILLNER.

(Forts. fr. sid. 277, Årg. III).

22. Enligt § 14 är en synektisk funktions integral längs en sluten kontur = dess integral längs en omgifvande sluten kontur, om nämnligen den förre genom kontinuerlig utvidgning kan öfvergå i den senare utan att beröra någon kritisk punkt. Om derför a_1, a_2, a_3 etc. (fig. 1) beteckna spridda punkter, hvilka såsom medelpunkter äro omgifna af små fristående, genom räta linier (såsom fig. antyder) förenade cirklar, hvilkas allmänna representant må vara tecknet (a), och om den prickade linien p utmärker en sluten kontur, som oändligt nära omsluter dessa cirklar jämte deras föreningslinier, så är under ofvan angifna vilkor integralen längs p = integralen längs den omgifvande slutna konturen P, begge integralerna tagna i samma led, såsom pilteckningen antyder. Om nu p närmar sig att i alla sina punkter sammanfalla med cirklarne (a) jämte deras föreningslinier, så inses omedelbart, att integralen längs P är = summan af integralerna längs (a), alla integralerna tagna i samma led, + summan af integralerna längs föreningslinierna, tagna i motsatta rigtningar, hvilken senare summa således är 0. Om derföre $F(z)$ är synektisk för hvarje punkt på och mellan konturen P och cirklarne (a) och om summan af integralerna längs de senare utmärkes med $\sum\int^{(a)} F(z)dz$ (der således summations-

tecknet afser de indicerade punkterna a_1, a_2, a_3 etc.), så kunna vi alltså sätta

$$\int^{P} F(z)dz = \sum \int^{(a)} F(z)dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)^*,$$

hvilken vigtiga sats vi uttala under följande form:

Om $F(z)$ är synektisk för hvarje punkt på och mellan en sluten kontur P och de inom honom inneslutna små cirklarne (a), hvilkas medelpunkter utgöras af de spridda punkterna a_1, a_2, a_3 etc, så är integralen längs den förre = summan af integralerna längs de senare, alla integralerna tagna i samma led.

23. Enligt föreg. § kunna vi nu beräkna integralen längs en sluten kontur P hvilken som helst, så snart vi känna integralerna längs de oändligt små cirklar, som omsluta de inom konturen befintliga kritiska punkter eller, kortligen uttryckt (jfr § 15), så snart vi känna alla punktintegralerna inom konturen P. Således, om $f(z)$ och $\varphi(z)$ äro synektiska för hvarje punkt på och inom P och om $\varphi(a) = 0$, der a är den allmänna representanten af de inom P belägna rötterna a_1, a_2, a_3 etc. till $\varphi(z) = 0$, så framgår omedelbart af (30) följande vigtiga formel

$$\int^{P} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = \sum \int^{(a)} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Anm. Denna formel är så generel, att hon gäller för såväl enkla som mångfaldiga rötter till $\varphi(z) = 0$ äfvensom för det fall, att $f(z)$ och $\varphi(z)$ ha gemensamma rötter, detta senare af det skäl, att, om $\dfrac{f(a)}{\varphi(a)} = \dfrac{0}{0}$ = ändlig

* Vi begagna här för enkelhetens skull samma bokstaf z att utmärka punkter på så väl konturen P som cirklarne (a) (jfr § 15). Detta behöfver i allmänhet icke föranleda någon tvetydighet, emedan variabeln under integraltecknet alltid är begränsad att fixera punkter på den kontur, längs hvilken man integrerar.

qvantitet, så är den motsvarande punktintegralen $= 0$ (jfr § 7) och försvinner derför ur summan till höger i (31).

24. Om vi i (31) antaga mod $\varphi'(a) > 0$, d. v. s. alla rötterna a_1, a_2, a_3 etc. till $\varphi(z) = 0$ *enkla* *, och om vi låta ϱ_ω med a som medelpunkt beskrifva den oändligt lilla cirkeln (a), då

$$z = a + \varrho_\omega \quad \text{och} \quad dz = i\varrho_\omega d\omega,$$

så erhålles

$$\int^P \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = \Sigma \int_0^{2\pi} \frac{if(a+\varrho_\omega)\varrho_\omega}{\varphi(a+\varrho_\omega)} d\omega$$

eller för lim $\varrho = 0$, då vi iakttaga, att $\dfrac{\varrho_\omega}{\varphi(a+\varrho_\omega)} = \dfrac{1}{\dfrac{\varphi(a+\varrho_\omega)-\varphi(a)}{\varrho_\omega}}$ $= \dfrac{1}{\varphi'(a)}$, och under antagande, att inom P finnes p stycken kritiska punkter $a_1, a_2 \ldots a_p$:

$$\int^P \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{r=p} \frac{f(a_r)}{\varphi'(a_r)} \quad \ldots\ldots \quad (32).$$

25. Skulle det inträffa, att en rot b till $\varphi(z) = 0$ vore sådan, att $\varphi(b) = \varphi'(b) = \ldots = \varphi^{s-1}(b) = 0$, d. v. s. att den s^{te} derivatan vore den första, som icke blefve 0, så ega vi att förfara på följande sätt vid beräkning af den motsvarande punktintegralen. Enär $\varphi(z)$ antages synektisk för hvarje punkt på och inom konturen P, inom hvilken punkten b antages ligga, så kunna vi sätta enligt den Taylorska serien

$$\varphi(z) = (z-b)^s \chi(z) \quad \ldots\ldots \quad (33),$$

* Att a är en enkel rot till $\varphi(z) = 0$ för mod $\varphi'(a) > 0$ och det för hvilken synektisk funktion $\varphi(z)$ som helst, inses omedelbart genom att utveckla $\varphi(z)$ enligt Taylorska serien:

$$\varphi(z) = \varphi(a + \overline{z-a}) = (z-a)\left\{\varphi'(a) + \frac{z-a}{1.2}\varphi''(a) + \text{etc.}\right\},$$

der den senare parentesen i sista ledet omöjligen kan bli 0 för $z = a$.

der

$$\chi(z) = \frac{\varphi^s(b)}{\lfloor s} + \frac{z-b}{\lfloor s+1}\varphi^{s+1}(b) + \frac{(z-b)^2}{\lfloor s+2}\varphi^{s+2}(b) + \text{etc.} \quad . \; . \quad (34),$$

och der således b under angifna vilkor är en *s-faldig* rot till $\varphi(z) = 0$, hvilken synektisk funktion $\varphi(z)$ än må vara.

Med begagnande af likheterna (33) och (34) erhålles på grund af § 16:

$$\int^{(b)} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = \int^{(b)} \frac{f(z)dz}{(z-b)^s \chi(z)} = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1} \Big|^{b} \left\{ \frac{f(z)}{\chi(z)} \right\}^{(s-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35),$$

hvilken likhet visar, att punktintegralen omkring den s-faldiga rotpunkten b finnes genom att multiplicera $\frac{2\pi i}{\lfloor s-1}$ med det resultat som fås, då i $(s-1)^{te}$ derivatan af qvoten $\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ insättes b.

Anm. Formeln (35) är äfven giltig för $s = 1$, d. v. s. för b = enkel rot, då vi låta $\lfloor 0$ betyda 1 och en derivata af ordnings nummern 0 betyda sjelfva funktionen [jfr (32)].

26. Genom att sammanfatta formlerna (32) och (35) kunna vi således sätta följande generela formel, då det inom P gifves de enkla rötterna a_1, $a_2 \ldots a_p$ och de mångfaldiga rötterna b_1, $b_2 \ldots b_q$ till $\varphi(z) = 0$:

$$\int^{P} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{r=p} \frac{f(a_r)}{\varphi'(a_r)} + \sum_{r=1}^{r=q} \mu_r \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

der vi med μ_1, $\mu_2 \ldots \mu_q$ utmärka de enligt (35) funna punktintegralerna omkring de mångfaldiga rotpunkterna b_1, $b_2 \ldots b_q$.

27. Genom formeln (36) äro vi nu i tillfälle att beräkna integralen längs en sluten kontur P af hvarje uttryck, som låter sätta sig under form af qvoten mellan två synektiska funktioner hvilka som helst. Af denna generela

integrations metod framgå följande tvänne för integration af reela funktioner särdeles vigtiga specifikationer.

1°. Om vi låta konturen P utgöras af en halfcirkel ZAz_0Z (fig. 2) med medelpunkten 0 som origo och diametern z_0Z som grundrigtning, inneslutande de kritiska punkterna $a_1, a_2 \ldots a_p$ och $b_1, b_2 \ldots b_q$, hvaraf de förra äro enkla och de senare mångfaldiga rötter till $\varphi(z) = 0$, och om vi antaga qvoten $\frac{zf(z)}{\varphi(z)}$ närma sig att bli 0, under det mod z närmar sig ∞ eller, kortligen uttryckt,

$$\lim \left|\frac{zf(z)}{\varphi(z)}\right|^{\bar{z}=\infty} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37),$$

så fås, då $\int^P$ sättes $= \int^{ZAz_0} + \int_{z_0}^{Z}$ och under iakttagande, att för $z = OA = \varrho_\omega$ är $\int^{ZAz_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = i \int_0^\pi \frac{zf(z)}{\varphi(z)} d\omega = 0$ [enligt (37)], följande särdeles intressanta formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{r=p} \frac{f(a_r)}{\varphi'(a_r)} + \sum_{r=1}^{r=q} \mu_r \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Anm. Man lägge nogsamt märke till, att (38) gäller endast för så vidt vilkoret (37) är uppfyldt. I detta fall är nämnligen den del af integralkonturen, som svarar mot den oändligt stora halfcirkeln ZAz_0, oändligt liten, då resultatet till höger i (38) måste vara = den del af integralkonturen, som svarar mot grundrigtningen z_0OZ från $-\infty$ till $+\infty$.

2°. Om vi i (36) sätta

$$\left.\begin{aligned} z &= \xi + i\eta \\ \frac{f(z)}{\varphi(z)} &= A + iB \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

der således A och B äro reela funktioner af ξ och η, så fås, enär $dz = d\xi + id\eta$:

$$\int^{P}\frac{f(z)}{\varphi(z)}dz = \int^{P}(A d\xi - B d\eta) + i\int^{P}(A d\eta + B d\xi) \quad . \; . \; . \; (40).$$

der ξ och η äro rätvinkliga koordinater för punkter på konturen P och således äro bundna vid hvarandra genom konturens eqvation

$$\psi(\xi, \eta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41),$$

förmedelst hvilken den ene variabeln med dess differential låter eliminera sig ur högra ledet i (40), hvarvid integrations gränserna angifvas af konturen P. Såsom enklast ega vi att anse det fall, då konturen P utgöres af en polygon t. ex. en triangel eller rektangel, då vi låta (41) successivt representera sidorna, hvarvid integreringen verkställes längs hvarje sida särskildt mellan polygonens hörnpunkter som gränser.

Om vi åter i (36) låta z representera en cirkel med origo i mededelpunkten och vi sätta

$$\left.\begin{aligned} z = \varrho_{\omega} \;\therefore\; dz &= i\varrho_{\omega} d\omega \\ \frac{izf(z)}{\varphi(z)} &= X + iY \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42),$$

der således X och Y äro reela funktioner af ω, så fås

$$\int^{P}\frac{f(z)}{\varphi(z)}dz = \int_{0}^{2\pi} X d\omega + i\int_{0}^{2\pi} Y d\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; (43),$$

hvilken formel anvisar ett ytterst enkelt sätt att finna integralen af reela funktioner mellan gränserna 0 och 2π.

28. Om vi i öfverensstämmelse med § 9 ha att taga integralen af en synektisk funktion $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ mellan gränserna z_0 och z (fig. 3) utan att närmare angifva den väg, längs hvilken integrationen tänkes verkställd och hvilken derför kan vara hvilken som helst, såsom räta linien $z_0 z$, konturen $z_0 A z$ etc., så måste integralens resultat i allmänhet bli olika, allt efter den olika väg längs hvilken man integrerat, om det nämnligen mellan de olika vägarne gifves en eller flere kritiska punkter. Om vi derför med u re-

presentera den allmänna betydelsen af integralen $\int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz$, tagen längs *någon* af de vägar, som leda från z_0 till z, och om vidare u_0 utmärker samma integral, tagen längs en *bestämd* väg t. ex. räta linien $z_0 z$, hvilken senare integral vi kunna anse såsom den allmänna integralens *principalvärde*, så kunna vi sätta i enlighet med (9), då konturen $z_0 P z_0$ antages med ett eller flere hvarf omsluta de kritiska punkterna a_1, a_2 etc. och då u tages längs vägen $z_0 P z_0 z$:

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = u_0 + \Sigma \varkappa \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

der summationstecknet afser de särskilda punktintegralerna eller perioderna Ω_1, Ω_2 etc., som härflyta från de inom konturen $z_0 P z_0$ befintliga kritiska punkter (jfr § 26), och der $\varkappa$ representerar ett helt positivt eller negativt tal, som för hvarje särskild period kan ha ett särskildt värde. Betrakta vi åter z såsom en funktion af u, så kunna vi sätta

$$z = F(u) = F(u_0 + \Sigma \varkappa \Omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

då således z är en *periodisk* funktion af u, d. v. s. bibehåller identiskt samma värde, hvilken period grupp $\Sigma \varkappa \Omega$ vi än behaga lägga till principalvärdet u_0. Vi kunna alltså uttala följande vigtiga och intressanta sats:

Om $f(z)$ och $\varphi(z)$ äro synektiska för hvarje punkt på och inom en sluten kontur $z_0 P z_0$, inom hvilken rotpunkterna a_1, a_2 etc. till $\varphi(z) = 0$ ligga, och om tillika qvoten $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ är synektisk för hvarje punkt på vägen $z_0 P z_0 z$, så är definita integralen u af $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, tagen från z_0 till z, en kontinuerlig och mångsvarig funktion af z, och z sjelf är en periodisk funktion af u med $\Sigma \varkappa \Omega$ som period, då nämnl. $\Sigma \varkappa \Omega$ utmärker summan af punktintegralerna inom $z_0 P z_0$, hvar och en multiplicerad med ett godtyckligt helt pos. eller neg. tal $\varkappa$.

Anm. Enär konturen $z_0 P z_0$ är till sin form godtycklig, så utgöra de inom honom inneslutna kritiska punkter ett godtyckligt antal af rotpunkterna a_1, a_2 etc. till $\varphi(z) = 0$, hvarför de i periodsumman innehållna periodernas antal är godtyckligt men icke öfverstigande antalet olika rötter till $\varphi(z) = 0$. Maximi-antalet *olika* perioder Ω_1, Ω_2 etc., som kunna ingå i $\Sigma \varkappa \Omega$, då de perioder, hvilkas argument icke skilja sig på mer än $k\pi$ ($k = 0$, 1, 2 etc.), betraktas såsom till betydelsen *sammanfallande* *, utgör den karakter, efter hvilken man grupperar de periodiska funktionerna i »*enkelt periodiska*», »*dubbelt periodiska*» och i allmänhet i *n-periodiska*. Så t. ex. om $u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2+1} = u_0 + \Sigma \varkappa \Omega$, der de mot rötterna i och $-i$ svarande perioderna äro respektive π och $-\pi$, så är $z = F(u_0 + \varkappa\pi)$ $[= \operatorname{tg}(u_0 + \varkappa\pi)]$ en enkelt periodisk funktion af principalvärdet u_0; vidare om $u = \int_{z_0}^{z} \frac{e^z dz}{z} = u_0 + \varkappa \Omega$, der den mot roten 0 svarande perioden är $2\pi i$, så är $z = F_1(u_0 + 2\varkappa\pi i)$ likaledes en enkelt periodisk funktion af u_0; deremot om $u = \int_{z_0}^{z} \frac{e^z dz}{z(z-a)}$ $= u_0 + \Sigma \varkappa \Omega$, der de mot rötterna 0 och a svarande perioderna äro resp. $-\frac{2\pi i}{a}$ och $\frac{2\pi i e^a}{a}$, så är för $a =$ en

* Att perioder, hvilkas argument blott skilja sig på $k\pi$, icke få betraktas såsom karakteristiskt olika, framgår deraf, att, om deras resp. $\varkappa$-faktorer få lämpliga pos. eller neg. hela tals värden, så kunna deras multipler bringas till likhet. Således, om $\Omega_1 = \frac{p}{q}\Omega_2$ [p och q = hela pos. el. neg. tal], så äro för $\varkappa_1 = q$ och $\varkappa_2 = p$ periodmultiplerna $\varkappa_1\Omega_1$ och $\varkappa_2\Omega_2$ lika; är åter $\Omega_1 = \mu\Omega_2$, der μ är ett irrationelt tal och således $\frac{p}{q} < \mu < \frac{p+1}{q}$ [q ett mycket stort tal], så gäller för $\varkappa_1 = p$ och $\varkappa_2 = q$ olikheten $\varkappa_2\Omega_2 < \varkappa_1\Omega_1 < (\varkappa_2 + 1)\Omega_2$, då således $\varkappa_1\Omega_1$ *närmelsevis* kan anses sammanfallande med $\varkappa_2\Omega_2$.

komplex qvantitet $z = F_2\left(u_0 - \frac{2\varkappa\pi i}{a} + \frac{2\varkappa_1\pi i e^a}{a}\right)$ en dubbelt periodisk funktion af u_0, o. s. v. De periodiska funktionerna spela i den allmänna funktions teorien en synnerligen vigtig rol. Vi nödgas dock lemna å sido deras närmare belysning såsom liggande utom planen för denna afhandling.

29. En särdeles vacker tillämpning af föreg. formler finna vi i följande exempel. Enligt (32) fås, då inom P finnas p stycken kritiska punkter:

$$\int^P \frac{z^m\,dz}{z^n - 1_\lambda} = \frac{2\pi i}{n\,.\,1_\lambda} \sum_{r=1}^{r=p} a_r^{m+1},$$

der $a_r = 1_{\frac{\lambda}{n}} \,.\, 1_{\frac{2(r-1)\pi}{n}}$ eller, då $1_{\frac{2\pi}{n}}$ sättes $=\alpha$, $a_r = 1_{\frac{\lambda}{n}}.\alpha^{r-1}$. Genom att sätta $\alpha^{m+1} = \gamma$ erhålles efter några enkla reduktioner:

$$\int^P \frac{z^m\,dz}{z^n - 1_\lambda} = \frac{2\pi i}{n\,.\,1_\lambda} \,.\, 1_{\frac{m+1}{n}\lambda} \,.\, \frac{\gamma^p - 1}{\gamma - 1} \quad \ldots\ldots \quad (46).$$

Af (46) framgå följande specifikationer, under antagande att $m + 1 < n$.

1°. Om $p = n$, då $\gamma^p = (\alpha^n)^{m+1} = 1$, så är

$$\int^P \frac{z^m\,dz}{z^n - 1_\lambda} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (47).$$

2°. Om $n =$ jämnt tal och $p = \frac{1}{2}n$, då $\gamma^p = (\alpha^{\frac{1}{2}n})^{m+1} = (1_\pi)^{m+1}$, så är

a) för m udda

$$\int^P \frac{z^m\,dz}{z^n - 1_\lambda} = 0,$$

b) för m jämnt

$$\int^P \frac{z^m\,dz}{z^n - 1_\lambda} = -\frac{2\pi i}{n\,.\,1_\lambda} \,.\, 1_{\frac{m+1}{n}\lambda} \,.\, \frac{2}{\gamma - 1}\,.$$

Om vi i dessa likheter sätta $\lambda = \pi$ och $n = 2s$, så framgår enligt (38), enär för detta fall halfva antalet rotpunkter ligga inom halfcirkeln:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^m dz}{z^{2s}+1} = 0 \ [m \text{ udda}] \text{ och} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^m dz}{z^{2s}+1} = \frac{\pi}{s} \cdot \frac{1}{\text{Sin} \frac{m+1}{n}\pi} \ [m \text{ jämnt}].$$

Om vi i (47) sätta $z = \varrho_\omega$ [ϱ = konst.], då enligt (42)

$$\frac{izf(z)}{\varphi(z)} = \frac{i(\varrho_\omega)^{m+1}}{(\varrho_\omega)^n - 1_\lambda} = \frac{i(\varrho_\omega)^{m+1} \cdot \{\varrho^n_{-n\omega} - 1_{-\lambda}\}}{\varrho^{2n} - 2\varrho^n \text{Cos}(n\omega - \lambda) + 1},$$

så erhålles med stöd af (43)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varrho^n \text{Sin}(m-n+1)\omega - \text{Sin}\{(m+1)\omega - \lambda\}}{\varrho^{2n} - 2\varrho^n \text{Cos}(n\omega - \lambda) + 1} d\omega = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varrho^n \text{Cos}(m-n+1)\omega - \text{Cos}\{(m+1)\omega - \lambda\}}{\varrho^{2n} - 2\varrho^n \text{Cos}(n\omega - \lambda) + 1} d\omega = 0.$$

Anm. För n = jämnt och m = udda tal repeteras identiskt samma värden, då ω går från π till 2π, som då ω går från 0 till π, hvarför de sist anförda formlerna äfven gälla, då man i stället för gränserna 0 och 2π sätta gränserna 0 och π.

30. Om vi i (30) antaga $F(z)^{\underline{s}}$ alla inom konturen P befintliga kritiska punkter utgöras af t, a_1, a_2, a_3 etc., så fås efter öfverflyttning af integralerna omkring a_1, a_2, a_3 etc. följande likhet

$$\int^{(t)} F(z)dz = \int^{P} F(z)dz - \Sigma \int^{(a)} F(z)dz \quad \ldots \ldots (48).$$

Denna likhet, såsom tjenande till grund för en stor mängd särdeles vigtiga utvecklingar, vilja vi egna en särskild belysning. Om vi derför låta de omkring a_1, a_2, a_3 etc. beskrifva cirklarne förenas med den omslutande konturen P förmedelst räta linier, såsom fig. 4 antyder, så är med stöd af § 14 integralen längs (t), tagen i positiv led = integralen längs den prickade linien p, tagen i samma led, hvilken senare integral, då p närmar sig att sammanfalla med P och cirklarne $\textcircled{a}$ jämte deras föreningslinier med P, sönderfaller i integralen längs P, tagen i positiv led, + summan af integralerna längs $\textcircled{a}$, tagna i negativ led, + summan af integralerna längs föreningslinierna, tagna i motsatt led, hvilken senare summa således är 0; men summan af integralerna längs cirklarne $\textcircled{a}$, tagna i negativ led, är = − summan af samma integraler, tagna i positiv led, då alltså likheten (48) är fullständigt belyst såsom omedelbart härledd ur § 14.

31. Om vi i (48) antaga

$$F(z) = \frac{\mathfrak{F}(z)}{z - t},$$

der således $\mathfrak{F}(z)$ är synektisk för alla punkter på och inom P utom för de inom P befintliga punkterna a_1, a_2, a_3 etc., så fås med stöd af § 16:

$$2\pi i \mathfrak{F}(t) = \int^{P} \frac{\mathfrak{F}(z)}{z - t} dz + \Sigma \int^{\textcircled{a}} \frac{\mathfrak{F}(z)}{t - z} dz \;. \;. \;. \;(49),$$

hvilken likhet alltså innebär, *att hvarje funktion* $\mathfrak{F}(t)$, *som är synektisk för alla punkter på och inom en sluten kontur* P *utom för de inom* P *befintliga punkterna* a_1, a_2, a_3 *etc., låter uttrycka sig i integralen af* $\frac{\mathfrak{F}(z)}{z - t}$ *längs* P + *summan af punktintegralerna af* $\frac{\mathfrak{F}(z)}{t - z}$ *omkring* a_1, a_2, a_3 *etc.*

32. Såsom en särdeles vacker tillämpning af (49) framstår fördelningen af ett rationelt bråk i »partialbråk».

Om vi i (49) sätta

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{f(z)}{\psi(z)},$$

der $f(z)$ och $\psi(z)$ äro hela rationela polynom, det förra af lägre gradtal än det senare, och om vi låta P enligt § 27, 1° vara en oändligt stor cirkel med medelpunkten i origo och således omslutande *alla* rötterna till $\psi(z) = 0$, hvilka antagas *enkla*, så fås enligt (32), då med stöd af (37) integralen längs P är 0, följande välbekanta likhet

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{f(a_r)}{(x-a_r)\psi'(a_r)} \quad \ldots\ldots \quad (50),$$

der vi för att bringa formeln i öfverensstämmelse med det vanliga beteckningssättet ersatt t med x.

Gifves det åter utom de n enkla rötterna $a_1, a_2 \ldots a_n$ tillika en s-faldig rot b till $\psi(z) = 0$, så fås enligt (35), då $\psi(z)$ sättes $= (z-b)^s \chi(z)$:

$$\int^{(b)} \frac{f(z)\,dz}{(t-z)(z-b)^s \chi(z)} = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1} \Big| ^{b} \left\{ \frac{f(z)}{(t-z)\chi(z)} \right\}^{(s-1)}.$$

Om vi sätta

$$u = \frac{f(z)}{(t-z)\chi(z)} \quad \text{och} \quad \frac{f(z)}{\chi(z)} = q(z),$$

då följaktligen

$$q(z) = u(t-z)$$

så fås genom att r gånger derivera denna sista likhet

$$q^{(r)}(z) = u^{(r)}.(t-z) - r u^{(r-1)} \quad \text{eller} \quad u^{(r)} = \frac{q^{(r)}(z) + r u^{(r-1)}}{t-z}.$$

Genom att successivt göra $r = 1, 2, \ldots (s-1)$ framgår

$$\Big|^{b} \frac{u^{(s-1)}}{\lfloor s-1} = \frac{q^{(s-1)}(b)}{\lfloor s-1 (t-b)} + \frac{q^{(s-2)}(b)}{\lfloor s-2 (t-b)^2} + \ldots \frac{q'(b)}{(t-b)^{s-1}} + \frac{q(b)}{(t-b)^s},$$

hvadan alltså genom att införa x i stället för t:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{f(a_r)}{(x-a_r)\psi'(a_r)} + \frac{q^{(s-1)}(b)}{\lfloor s-1 (x-b)} + \frac{q^{(s-2)}(b)}{\lfloor s-2 (x-b)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{q'(b)}{(x-b)^{s-1}} + \frac{q(b)}{(x-b)^s} \quad \ldots\ldots \quad (51),$$

der vi ha att tillfoga en analog termföljd för hvarje mångfaldig rot, som ytterligare tillkommer $\psi(z) = 0$.

33. Om vi i (49) antaga P vara en med a som medelpunkt beskrifven cirkel (fig. 5), som innesluter punkten t samt tillika $\mathfrak{F}(z)$:s kritiska punkter $a_1, a_2 \ldots a_p$, så kunna vi i öfverensstämmelse med § 21 sätta, då $t = a+h$:

$$\mathfrak{F}(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int^{P}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{z-a} + h\int^{P}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{(z-a)^2} + h^2\int^{P}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{(z-a)^3} + \ldots\right.$$

$$\left. + h^n\int^{P}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right\} + R + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r *}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{a+h-z} \,\ldots (52),$$

der resttermen R har en med (26) fullt analog form.

Om vi i (52) sätta $z - a = \varrho_\omega$, då således ϱ_ω är cirkeln P:s radie, så bevisas i full enlighet med § 20, att termerna i (52) bilda en *konvergent* serie och att limes för resttermen enligt (26) är 0, då serien tänkes utsträckt i oändlighet; den sista termen åter, som utgör summan af punktintegralerna omkring de inom P befintliga kritiska punkterna $a_1, a_2 \ldots a_p$ är att betrakta som en *fyllnadsterm* till den konvergerande serien, som tillsammans med henne gör (52) till en *identitet*. Vi kunna alltså uttala följande utomordentligt vigtiga sats.

Om $\mathfrak{F}(z)$ är synektisk för alla punkter på och inom en cirkel P utom för de inom P befintliga kritiska punkterna a_1, $a_2 \ldots a_p$, och om a är cirkelns medelpunkt och $a+h$ en punkt inom cirkeln, så låter $\mathfrak{F}(a+h)$ utveckla sig i en konvergent serie efter stigande digniteter af h med koefficienter, som uttryckas i definita integraler, tagna längs cirkeln, och med en fyllnadsterm, som utgör $\frac{1}{2\pi i}$ × summan af punktintegraler omkring de kritiska punkterna a_1, $a_2 \ldots a_p$.

* Vi nödgas här af typografiska skäl utesluta den lilla cirkel, som borde omge det *indicerade* a_r för att antyda punktintegralen. Vi behöfva nämnligen här och i de följande formlerna för tydlighetens skull vid summationstecknet angifva, till *hvilka* kritiska punkter summationen af punktintegralerna sträcker sig, hvarför vi, då en indicerad kritisk punkt befinner sig på den öfre integrationsgränsens plats, underförstå, att integralen är tagen längs den oändligt lilla cirkel, som tänkes omge den kritiska punkten.

Denna sats, såsom utgörande en fullt uttömmande generalisering af »Taylors teorem», torde lämpligen kunna kallas det Taylorska teoremets *supplementsats.* Cirkeln P benämna vi äfven här *konvergenscirkel*, hvilken väsendtligen skiljer sig från den Cauchyska konvergenscirkeln (jfr § 20), ity att, då denne *utesluter* alla kritiska punkter, kan den förre *innesluta* sådana till ett obegränsadt antal.

Anm. Då man besinnar den Taylorska seriens utomordentligt stora vigt och betydelse, oaktadt hon med sina derivat-koefficienter är inskränkt inom ett särdeles trångt konvergensområde (jfr § 20), hvarigenom alla funktioner utom detta område lemnas såsom outveckelbara, så kan man lätt göra sig en föreställning om den stora och betydelsefulla rol, som denna supplementserie med sina generela koefficienter, sin fyllnadsterm och sin vidsträckta konvergenscirkel är egnad att spela i nya matematiska utvecklingar.

34. Med stöd af (30) kunna vi uttrycka koefficienterna i (52) på följande sätt, då vi sätta $a = a_0$:

$$\mathfrak{F}(a_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{z-a_0} + h\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{(z-a_0)^2} + h^2\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{(z-a_0)^3} + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{\mathfrak{F}(z)dz}{a_0+h-z} \quad \ldots\ldots \quad (53),$$

hvarigenom vi således funnit, att derivat-koefficienterna i den Taylorska serien äro här ersatta af summor af punktintegraler omkring $\mathfrak{F}(z)$:s inom konvergenscirkeln belägna kritiska punkter $a_1, a_2 \ldots a_p$ äfvensom omkring samma cirkels medelpunkt a_0.

Anm. Om vi ur koefficienterna i (53) afsöndra alla punktintegralerna omkring a_0, hvilka, dividerade med $2\pi i$, äro af formen $\mathfrak{F}(a_0)$, $\frac{\mathfrak{F}'(a_0)}{1}$, $\frac{\mathfrak{F}''(a_0)}{\underline{|2}}$ etc. [jfr (35)], d. v. s. koefficienter i den Taylorska serien, så visar sig den egendomliga företeelsen, att för $a_0 + h$ fixerande en punkt *utom* den Cauchyska konvergenscirkeln (jfr § 20) är den *konvergenta* serien (53) = algebraiska summan af två serier, hvilka, enär den ena (den Taylorska) med nödvändighet är divergent, *begge* måste vara *divergenta*, + en fyllnadsterm, hvilken i allmänhet består af ett begränsadt antal termer. Den Taylorska seriens divergens kompenseras då af den andra divergenta serien (kompensationsserien), hvilken åter för $a_0 + h$ fixerande en punkt *inom* den Cauchyska konvergens cirkeln måste utgå mot fyllnadstermen, emedan den Taylorska serien då är ensam identiskt lika med $\mathfrak{F}(a_0 + h)$. Vi blifva snart i tillfälle att med exempel närmare belysa denna företeelse.

35. Om vi i (53) sätta

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{f(z)}{\psi(z)},$$

der $f(z)$ och $\psi(z)$ antagas synektiska för hvarje punkt på och inom konvergenscirkeln och der således $a_1, a_2 \ldots a_p$ äro rötter till $\psi(z) = 0$, så erhålles, då vi sätta $a_0 = 0$ och $h = x$, följande mot den Mac Laurinska serien svarande formel:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{z\,\psi(z)} + x\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{z^2\psi(z)} + x^2\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{z^3\psi(z)} + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{(x-z)\psi(z)} \quad \ldots\ldots (54),$$

hvilken identitet uttalas på följande sätt:

Om $f(z)$ och $\psi(z)$ äro synektiska för hvarje punkt på och inom en med origo som medelpunkt beskrifven cirkel P, inom hvilken rötterna $a_1, a_2 \ldots a_p$ till $\psi(z) = 0$ ligga, och om x representerar en punkt inom denna cirkel, så låter qvoten $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ utveckla sig i en konvergent serie efter stigande digniteter af x med koefficienter, som uttryckas i summor af *punktintegraler omkring* $0, a_1, a_2 \ldots a_p$, *och med en fyllnadsterm, som utgör* $\frac{1}{2\pi i} \times$ *summan af punktintegraler omkring* $a_1, a_2 \ldots a_p$.

36. Beräkningen af de särskilda punktintegralerna omkring $0, a_1, a_2 \ldots a_p$ sker enligt formeln (32) eller (35), alltefter som den kritiska punkten representeras af en enkel eller mångfaldig rot till en nämnare under integralmärket satt $= 0$. Om vi kalla en sådan nämnare $\varphi(z)$ och vi antaga b vara en s-faldig rot till $\varphi(z) = 0$, så kunna vi på följ. sätt underlätta den annars rätt besvärliga beräkningen af punktintegraler omkring mångfaldiga rötter. Vi sätta nämnligen enligt (33)

$$\varphi(z) = (z-b)^s \chi(z) = \zeta^s \chi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55),$$

då enligt (35)

$$\int^{(b)} \frac{f(z)dz}{\varphi(z)} = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1} \Big|^{b} \left\{\frac{f(z)}{\chi(z)}\right\}^{(s-1)} = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1} \Big|^{b} \left\{\frac{\alpha f(z)}{\beta}\right\}^{(s-1)} \ldots (56),$$

der $\frac{\alpha}{\beta}$ representerar bråket $\frac{\zeta^s}{\varphi(z)}$, bragt till sin enklaste form.

Ifall $\chi(z)$ är en för oss bekant funktion, så sätta vi

$$u = \frac{f(z)}{\chi(z)} \quad \text{eller} \quad f(z) = u\chi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

samt derivera r gånger å ömse sidor, då vi få följande symboliskt tecknade resultat

$$f^{(r)}(z) = \{u + \chi(z)\}^{(r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58),$$

hvarur $\Big|^{b} u^{(s-1)}$ kan beräknas genom att successivt göra $r = 1, 2$ etc.

Är deremot $\chi(z)$ endast gifven under form af en oändlig serie [jfr (34)], så sätta vi i (56)

$$u = \frac{\alpha f(z)}{\beta} \quad \text{eller} \quad \alpha f(z) = u\beta \quad . \quad . \quad . \quad (59),$$

då vi genom att derivera r gånger erhålla

$$\{\alpha + f(z)\}^{(r)} = \{u + \beta\}^{(r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60),$$

hvarur likaledes $\int^{b} u^{(s-1)}$ kan beräknas genom att successivt göra $r = 1, 2$ etc.

37. Om vi enligt (30) ersätta koefficienterna till x, x^2 etc. i (54) med motsvarande integraler längs konvergenscirkeln P, hvilken enligt antagande innesluter de kritiska punkterna $0, a_1, a_2 \dots a_p$, så kan serien skrifvas

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{z\,\psi(z)} + x\int^{P}\frac{f(z)dz}{z^2\psi(z)} + x^2\int^{P}\frac{f(z)dz}{z^3\psi(z)} + \dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{(x-z)\psi(z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Genom att i koefficienten till x^s sätta $z = \varrho_\omega$, då följaktligen $dz = i\varrho_\omega d\omega$, erhålles

$$\int^{P}\frac{f(z)dz}{z^{s+1}\psi(z)} = \frac{i}{\varrho^s}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varrho_\omega)d\omega}{(1_\omega)^s\psi(\varrho_\omega)},$$

hvilken identitet visar, att om

$$\lim \left|\frac{f(z)}{z\,\psi(z)}\right|^{\bar{z}=\infty} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

och det för hvilket värde som helst på $\widehat{z}$, så är för $s = 1$, 2, 3 etc. (jfr § 7)

$$\lim \int^{P}\frac{f(z)dz}{z^{s+1}\psi(z)} = 0,$$

d. v. s. koefficienterna till x, x^2 etc. försvinnande för $P =$ en oändligt stor cirkel. Vår serie kan således sättas under följande form:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{z\,\psi(z)} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f(z)dz}{(x-z)\psi(z)} \quad . \quad . \quad . \quad (63),$$

då vi alltså kunna uttala följande sats:

Om för $\overline{z} = \infty$ *limes för qvoten* $\dfrac{f(z)}{z\,\psi(z)}$ *är 0 och det för hvilket värde som helst på* $\widehat{z}$, *så försvinna för en oändligt stor konvergenscirkel alla termerna i serien (54) utom första termen och fyllnadstermen.*

Anm. Skulle det inträffa, att vilkoret (62) icke uppfylles, så ega vi att se till, för hvilket minsta värde på s

$$\lim \left| \frac{f(z)}{z^s\,\psi(z)} \right|^{\overline{z}=\infty} = 0,$$

då koefficienterna till x^s, x^{s+1} etc. försvinna. I stället för (63) erhålla vi då en serie, som utom första termen och fyllnadstermen innehålla termer, ordnade efter stigande digniteter af x t. o. m. den $(s-1)^{ta}$.

38. Om första termen inom parentesen i (54) enligt (30) sättes under formen

$$\int^{P} \frac{f(z)\,dz}{z\,\psi(z)} = i \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho_\omega)\,d\omega}{\psi(\varrho_\omega)}$$

och vi antaga

$$\frac{f(z)}{\psi(z)} = \text{»udda» funktion} \quad \ldots\ldots \quad (64),$$

så repeteras vid integrationen identiskt samma värden ehuru af motsatta tecken mellan gränserna 0 och π som mellan gränserna π och 2π, hvarför denna första term försvinner. Om då tillika vilkoret (62) är uppfyldt, så får formeln (63) följande enkla utseende:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{r=p} \int^{a_r} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)\,\psi(z)} \quad \ldots\ldots \quad (65),$$

der således serien (54) är inskränkt till fyllnadstermen ensam.

Anm. Såsom rätt anmärkningsvärdt framgår, att man med Cauchys residu-kalkyl varit i tillfälle att utveckla funktioner i serie efter formler analoga med (63) och (65) [jfr Briot et Bouquet, Fonctions doublement périodiques, pag. 123], således för en konvergens cirkel, som innesluter ett *obegränsadt* antal kritiska punkter, utan att sätta i fråga möjligheten af funktioners utveckling i serie efter hufvudformeln (52), d. v. s. »efter stigande digniteter af variabeln» för en konvergens cirkel, som innesluter ett *begränsadt* antal kritiska punkter. I sjelfva verket har hufvudformeln legat alltför nära till hands för att bli förbisedd; uraktlåtenheten att framställa och använda den torde finna sin naturliga förklaring i residu-kalkylens outvecklade skick (jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 447) och i svårigheten att använda dess oviga beteckningssätt vid beräkning af integraler omkring kritiska punkter, synnerligen omkring sådana, hvilka representeras af mångfaldiga rötter.

39. Vi gå nu att med några exempel belysa de i föreg. §§ utvecklade formler. Öfverallt i dessa exempel utmärka vi med ϱ konvergens cirkelns radie samt med ε ett litet positivt talvärde, som kan vara det minsta möjliga vi någonsin behaga uppge. I några figurer utmärka vi den för tillfället använda konvergens cirkeln med en fulldragen linie, den Cauchyska konvergens cirkeln med en prickad linie samt de kritiska punkterna med små kors.

Ex. 1. $f(x) = 1$, $\psi(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ äro 1 och -2. Om vi antaga konvergens cirkelns radie $\varrho = 2 - \varepsilon$ (jfr. fig. 5), så har qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ blott en enda kritisk punkt inom honom, nämnl. $a_1 = 1$, då således enligt (54):

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\left\{\int^0 \frac{dz}{z\,\psi(z)} + \int^1 \frac{dz}{z\,\psi(z)}\right\} + x\left\{\int^0 \frac{dz}{z^2\psi(z)} + \int^1 \frac{dz}{z^2\psi(z)}\right\}$$

$$+ x^2\left\{\int^0 \frac{dz}{z^3\psi(z)} + \int^1 \frac{dz}{z^3\psi(z)}\right\} + \ldots\Bigg] + \frac{1}{2\pi i}\int^1 \frac{dz}{(x-z)\,\psi(z)}.$$

Enligt (56) erhålles för beräkning af punktintegralerna omkring 0 (origo):

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \frac{1}{\underline{|s-1}}\Big|^{0}\left\{\frac{1}{\psi(z)}\right\}^{(s-1)} = \frac{1}{\underline{|s-1}}\Big|^{0} u^{(s-1)}\,;$$

enligt (57) och (58) framgår, enär $/^{0}\psi = -2$, $/^{0}\psi' = 1$ och $/^{0}\psi'' = 2$:

$$\Big|^{0} u = \Big|^{0}\frac{1}{\psi} = \tfrac{1}{2} \quad \text{och} \quad \Big|^{0}\left\{u^{(r)}\psi + \frac{r}{1}u^{(r-1)}.\psi' + \frac{r.\overline{r-1}}{1.2}u^{(r-2)}\psi''\right\} = 0,$$

hvaraf fås följande bestämningar:

$$/^{0}u' = -\tfrac{1}{4}, \quad /^{0}u'' = -\tfrac{3}{4}, \quad /^{0}u''' = -\tfrac{15}{8}, \quad /^{0}u^{\text{IV}} = -\tfrac{33}{4} \quad \text{etc.}$$

Vidare är enligt (32)

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{1}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \Big|^{1}\frac{1}{z^s\psi'(z)} = \tfrac{1}{3}.$$

Slutligen är fyllnadstermen

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{1}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)} = \frac{1}{3(x-1)},$$

då alltså vår serieutveckling blir:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + x\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) + x^2\left(-\frac{3}{4\underline{|2}}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\, x^3\left(-\frac{15}{8\underline{|3}}+\frac{1}{3}\right) + x^4\left(-\frac{33}{4\underline{|4}}+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{3(x-1)}.$$

eller enklare utförd:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{6}\left\{-1+\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3-\left(\frac{x}{2}\right)^4+\ldots\right\} + \frac{1}{3(x-1)}.$$

Anm. Detta exempel, ehuru af föga praktiskt intresse, visar i enklaste måtto sättet att beräkna en series koefficienter och fyllnadsterm. För $2 > \overline{x} \geqq 1$ är vår *konvergenta* serie = algebraiska summan af de två *divergenta* serierna

$$\left\{\Big|^{0} u + x\Big|^{0}\frac{u'}{1} + x^2\Big|^{0}\frac{u''}{\underline{|2}} + \ldots\right\} \quad \text{och} \quad \tfrac{1}{3}\{1+x+x^2+\ldots\},$$

af hvilka för $\bar{x} < 1$ den förra är den *konvergenta* Mac Laurinska serien och den senare $= -\dfrac{1}{3(x-1)}$ (jfr § 34 *anm.*). Göres konvergens cirkelns radie $\varrho > 2$, så blir formeln (50) tillämplig och således serien inskränkt till fyllnadstermen ensam (= summan af »partialbråken»).

Ex. 2. $f(x) = 1$, $\psi(x) = e^x + 1$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ representeras af $\pm(2\varkappa - 1)\pi i$ [$\varkappa = 1, 2, 3$ etc.]. Vi specificera detta exempel efter konvergens cirkelns storlek i följande två moment.

a) $\varrho = 3\pi - \varepsilon$. I detta fall har qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ inom konvergens cirkeln *två* kritiska punkter, nämnl. $\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \pm \pi i$ [jfr fig. 6], då alltså enligt (54):

$$\frac{1}{e^x+1} = \left[\left\{\int^{0}\frac{dz}{z\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{z\psi(z)}\right\} + x\left\{\int^{0}\frac{dz}{z^2\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{z^2\psi(z)}\right\}\right.$$

$$\left. + x^2\left\{\int^{0}\frac{dz}{z^3\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{z^3\psi(z)}\right\} + \ldots\right] + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)}.$$

Enligt (56) fås för beräkning af punktintegralerna omkring 0:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \frac{1}{\underline{|s-1}}\Big/^{0}\left\{\frac{1}{\psi(z)}\right\}^{(s-1)} = \frac{1}{\underline{|s-1}}\Big/^{0} u^{(s-1)};$$

enligt (57) och (58) fås, enär $\Big/^{0}\psi = 2$, $\Big/^{0}\psi' = \Big/^{0}\psi'' = \ldots = 1$:

$$\Big/^{0} u = \Big/^{0}\frac{1}{\psi} = \tfrac{1}{2} \text{ och } \Big/^{0}\left\{2u^{(r)} + ru^{(r-1)} + \frac{r.\overline{r-1}}{\underline{|2}}u^{(r-2)} + \ldots + ru' + u\right\} = 0,$$

hvaraf framgå följande bestämningar:

$\Big/^{0} u' = -\frac{1}{4} = -A_1$, $\Big/^{0} u''' = \frac{1}{8} = A_2$, $\Big/^{0} u^{\mathrm{V}} = -\frac{1}{4} = -A_3$, $\Big/^{0} u^{\mathrm{VII}} = \frac{17}{16} = A_4$,
$\Big/^{0} u^{\mathrm{IX}} = -\frac{31}{4} = -A_5$ etc.*, samt $\Big/^{0} u'' = \Big/^{0} u^{\mathrm{IV}} = \Big/^{0} u^{\mathrm{VI}} = \ldots = 0$.

---

* Dessa tal A_1, A_2, A_3 etc, hvilka, som vi skola se, äro nära beslägtade med de «Bernulliska talen«, ega i likhet med dessa åtskil-

Vidare är enligt (32)

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=2}\frac{1}{(a_r)^s\psi'(a_r)} = -\left\{\frac{1}{(i\pi)^s}+\frac{1}{(-i\pi)^s}\right\},$$

hvilken summa är 0 för s = udda tal, men $-\frac{2}{(i\pi)^s}$ för s = jämnt tal.

Slutligen är fyllnadstermen

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=2}\frac{1}{(x-a_r)\psi'(a_r)} = -\frac{2x}{x^2+\pi^2}.$$

Vår serieutveckling blir alltså:

$$\frac{1}{e^x+1} = \tfrac{1}{2} - x\left\{\frac{A_1}{1}-\frac{2}{\pi^2}\right\} + x^3\left\{\frac{A_2}{\underline{|3}}-\frac{2}{\pi^4}\right\} - x^5\left\{\frac{A_3}{\underline{|5}}-\frac{2}{\pi^6}\right\}$$
$$+ x^7\left\{\frac{A_4}{\underline{|7}}-\frac{2}{\pi^8}\right\} - \ldots - \frac{2x}{x^2+\pi^2}.$$

Anm. Utvecklingen af $\frac{1}{e^x+1}$ i en konvergent serie efter stigande digniteter af x har förut varit möjlig endast

---

liga intressanta egenskaper, hvilka vi icke kunna underlåta att påpeka. Således, om vi sätta

$$\varphi(x) = 1 - e^x + e^{2x} - e^{3x} + \ldots + e^{2nx} = \frac{\Delta}{1+e^x},$$

der $\Delta = 1 + e^{(2n+1)x}$ och således $\overset{0}{/}\Delta = 2$, $\overset{0}{/}\Delta' = 2n+1$, $\overset{0}{/}\Delta'' = (2n+1)^2$, $\ldots\overset{0}{/}\Delta^{(r)} = (2n+1)^r$, så fås i öfverensstämmelse med (58):

$$\varphi^{(r)}(0) = \overset{0}{\Big/}\left\{u^{(r)}\Delta + r\,.\,u^{(r-1)}\Delta' + \frac{r\,.\,\overline{r-1}}{\underline{|2}}u^{(r-2)}\Delta'' + \ldots r u'\Delta^{(r-1)} + u\Delta^{(r)}\right\}$$

eller, som är detsamma:

$$-1^r + 2^r - 3^r + \ldots + (2n)^r = \overset{0}{\Big/}\left\{2u^{(r)} + r u^{(r-1)}.(2n+1) + \frac{r\,.\,\overline{r-1}}{\underline{|2}}u^{(r-2)}.(2n+1)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + r u'(2n+1)^{r-1} + u\,.\,(2n+1)^r\right\},$$

der vi ha att införa de funna värdena på $\overset{0}{/}u$, $\overset{0}{/}u'$, $\overset{0}{/}u''$ etc. Förmedelst denna formel kunna vi således summera de konsekutiva talens r^{te} digniteter, förenade genom alternerande tecken.

för $\bar{x} < \pi$; den här gjorda utvecklingen deremot gäller för $3\pi > \bar{x} > 0$. Det är nu möjligt att efter behag utvidga konvergens cirkeln, blott vi iakttaga, att för hvarje nytt par af kritiska punkter [$\pm 3\pi i$, $\pm 5\pi i$ etc.], hvilka inneslutas inom honom, en summering af motsvarande punktintegraler verkställes såväl i de successiva koefficienterna som i fyllnadstermen.

b) $\varrho = 2k\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln finnas nu de kritiska punktparen $\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \pm \pi i$, $\left.\begin{matrix} a_3 \\ a_4 \end{matrix}\right\} = \pm 3\pi i$, $\left.\begin{matrix} a_{2k-1} \\ a_{2k} \end{matrix}\right\} = \pm(2k-1)\pi i$. Enär i öfverensstämmelse med (62) för en oändligt stor konvergens cirkel

$$\lim \int^{\bar{z}=\varrho} \frac{1}{z(e^z+1)} = 0\,,$$

så fås enligt (63):

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z\,\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=2k} \int^{a_r} \frac{dz}{z\,\psi(z)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2k}\int^{a_r} \frac{dz}{(x-z)\,\psi(z)}$$

eller efter utförd beräkning af punktintegralerna:

$$\frac{1}{e^x+1} = \tfrac{1}{2} - 2x\left\{\frac{1}{x^2+\pi^2} + \frac{1}{x^2+(3\pi)^2} + \dots \frac{1}{x^2+\{(2k-1)\pi\}^2}\right\},$$

hvilken identitet således är sann för hvilka ändliga värden som helst på x.

Anm. Den för konvergens cirkeln $\varrho = 2k\pi$ försvinnande koefficienten till x^{s-1} [s = jämnt tal] är af formen

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z^s\,\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=2k}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\,\psi(z)}\right\} = 0\,,$$

hvaraf framgår följande särdeles anmärkningsvärda relation:

$$\frac{s\pi^s A_{\frac{1}{2}s}}{2\lfloor s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \frac{1}{(2k-1)^s}$$

eller för $s = 2n$:

$$\frac{n\pi^{2n}A_n}{\lfloor 2n} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots \frac{1}{(2k-1)^{2n}},$$

hvarur A_n (synnerligen för hög index) med lätthet låter beräkna sig.

Ex. 3. $f(x) = 1$, $\psi(x) = e^x - 1$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ representeras af $\pm 2\varkappa\pi i$ [$\varkappa = 0, 1, 2$ etc.]. Vi särskilja detta exempel i följande två moment.

a) $\varrho = 4\pi - \varepsilon$. I detta fall har qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ *tre* kritiska punkter inom konvergens cirkeln, nämnligen $a_1 = 0$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm 2\pi i$ (jfr fig. 7), då alltså enligt (54):

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\left\{\int^0 \frac{dz}{z^2\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{z\psi(z)}\right\} + x\left\{\int^0 \frac{dz}{z^3\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{z^2\psi(z)}\right\}\right.$$

$$\left. + x^2\left\{\int^0\frac{dz}{z^4\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{z^3\psi(z)}\right\} + \ldots\right] + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)}.$$

Enligt (56) fås för beräkning af punktintegralerna omkring 0:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^0 \frac{dz}{z^s\chi(z)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Big|^0 \left\{\frac{z}{\psi(z)}\right\}^{(s-1)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Big|^0 u^{(s-1)};$$

enligt (57) och (58) fås, enär $\overset{0}{/}\psi = 0$, $\overset{0}{/}\psi' = \overset{0}{/}\psi'' = \ldots = 1$:

$$\Big|^0 u = \Big|^0 \frac{1}{\chi(z)} = \Big|^0 \frac{z}{\psi(z)} = 1$$

och

$$\Big|^0 \left\{ r u^{(r-1)} + \frac{r\,.\,\overline{r-1}}{\lfloor 2} u^{(r-2)} + \ldots r u' + u \right\} = 0,$$

hvaraf framgå följande bestämningar:

$\big/^{0} u' = -\frac{1}{2}$, $\big/^{0} u'' = \frac{1}{6} = B_1$, $\big/^{0} u^{\mathrm{IV}} = -\frac{1}{30} = -B_2$, $\big/^{0} u^{\mathrm{VI}} = \frac{1}{42} = B_3$, $\big/^{0} u^{\mathrm{VIII}} = -\frac{1}{30} = -B_4$, $\big/^{0} u^{\mathrm{X}} = \frac{5}{66} = B_5$ etc.* samt $\big/^{0} u''' = \big/^{0} u^{\mathrm{V}} = \big/^{0} u^{\mathrm{VII}} = \ldots = 0$.

Vidare fås enligt (32)

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=2}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\,\psi(z)} = \sum_{r=2}^{r=3}\frac{1}{(a_r)^s\,\psi'(a_r)} = \left\{\frac{1}{(2\pi i)^s} + \frac{1}{(-2\pi i)^s}\right\},$$

hvilken summa är 0 för s = udda tal, men $\frac{2}{(2\pi i)^s}$ för s = jämnt tal.

Slutligen är fyllnadstermen

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\,\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=3}\frac{1}{(x-a_r)\,\psi'(a_r)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+(2\pi)^2}.$$

Vår serieutveckling blir alltså:

$$\frac{1}{e^x-1} = -\tfrac{1}{2} + x\left\{\frac{B_1}{\underline{|2}} - \frac{2}{(2\pi)^2}\right\} - x^3\left\{\frac{B_2}{\underline{|4}} - \frac{2}{(2\pi)^4}\right\} + x^5\left\{\frac{B_3}{\underline{|6}} - \frac{2}{(2\pi)^6}\right\} - \ldots$$
$$+ \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+(2\pi)^2}.$$

---

* Dessa tal, B_1, B_2, B_3 etc. kallas de *Bernulliska talen* och förete följande märkvärdiga egenskaper (jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 349). Om vi sätta

$$\varphi(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(m-1)x} = \frac{\Delta}{e^x - 1} = \frac{u\Delta}{x},$$

der $\Delta = e^{mx} - 1$ och således $\big/^{0}\Delta = 0$, $\big/^{0}\Delta' = m$, $\big/^{0}\Delta'' = m^2, \ldots \big/^{0}\Delta^{(r)} = m^r$, så fås enligt (58) genom att $(r+1)$ gånger derivera likheten $x\varphi(x) = u\Delta$:

$$\varphi^{(r)}(0) = \Big/^{0}\left\{u^{(r)}\Delta' + \frac{r}{\underline{|2}}u^{(r-1)}\Delta'' + \frac{r.\overline{r-1}}{\underline{|3}}u^{(r-2)}\Delta''' + \ldots\right\}$$

eller, som är detsamma:

$$1^r + 2^r + 3^r + ..(m-1)^r = m\Big/^{0}\left\{u^{(r)} + \frac{r}{\underline{|2}}u^{(r-1)}.m + \frac{r.\overline{r-1}}{\underline{|3}}u^{(r-2)}.m^2 + \text{ etc.}\right\},$$

der vi ha att införa de funna värdena på $\big/^{0}u$, $\big/^{0}u'$, $\big/^{0}u''$ etc. Förmedelst denna formel finna vi således summan af de konsekutiva talens $r^{\underline{te}}$ digniteter.

Anm. Om vi sätta $\frac{x}{e^x - 1} = F(x)$, så kan $F(x)$ utvecklas efter den Mac Laurinska serien för $\bar{x} < 2\pi$ (jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 306). För $\bar{x} \geqq 2\pi$ har utvecklingen af $\frac{1}{e^x - 1}$ i en konvergent serie efter stigande digniteter af x ansetts omöjlig (jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 421). Vi se nu, att en sådan utveckling är möjlig och utförbar för en efter behag vald konvergens cirkel, under iakttagande att för hvarje nytt inom cirkeln inträdande kritiskt punktpar [$\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i$ etc.] en summering af motsvarande punktintegraler verkställes i koefficienterna och fyllnadstermen.

b) $\varrho = (2k+1)\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu de kritiska punkterna

$$a_1 = 0, \quad \left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm 2\pi i, \quad \left.\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right\} = \pm 4\pi i, \ldots \left.\begin{matrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{matrix}\right\} = \pm 2k\pi i.$$

Enär enligt (62) för en oändligt stor konvergens cirkel

$$\lim \int^{\bar{z}=\varrho} \frac{1}{z(e^z - 1)} = 0,$$

så fås enligt (63):

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z^2 \chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=2k+1} \int^{a_r} \frac{dz}{z\,\psi(z)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2k+1} \int^{a_r} \frac{dz}{(x-z)\,\psi(z)}$$

eller efter utförd beräkning af punktintegralerna:

$$\frac{1}{e^x - 1} = -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{x^2 + (2\pi)^2} + \frac{1}{x^2 + (4\pi)^2} + \ldots \frac{1}{x^2 + (2k\pi)^2}\right\},$$

hvilken identitet således är sann för hvilka ändliga värden som helst på x.

Anm. Den för konvergens cirkeln $\varrho = (2k+1)\pi$ försvinnande koefficienten till x^{s-1} [s = jämnt tal] har formen

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z^{s+1}\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=2k+1} \int^{a_r} \frac{dz}{z^s\,\psi(z)}\right\} = 0,$$

hvaraf framgår följande särdeles anmärkningsvärda relation:

$$\frac{\pi^s}{2\lfloor s}\cdot B_{\frac{1}{2}s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \frac{1}{(2k)^s}$$

eller för $s = 2n$ [jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 421]:

$$\frac{2^{2n}.\pi^{2n}}{2\lfloor 2n}\cdot B_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \frac{1}{k^{2n}}.$$

Genom jämförelse med det i förra ex. funna värdet på A_n erhålles följande enkla relation mellan talen A_1, A_2 etc. och de Bernulliska talen B_1, B_2 etc.:

$$2n A_n = B_n\{2^{2n} - 1\}.$$

Ex. 4. $f(x) = 1$, $\psi(x) = \operatorname{Cos} x$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ representeras af $\pm(\varkappa + \frac{1}{2})\pi$ [$\varkappa = 0, 1, 2$ etc.]. Vi särskilja följande två moment.

a) $\varrho = \frac{5}{2}\pi - \varepsilon$. För detta fall har qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ *fyra* kritiska punkter inom konvergens cirkeln, nämnl. $\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}\pi$, $\left.\begin{matrix}a_3\\a_4\end{matrix}\right\} = \pm\frac{3}{2}\pi$ (jfr fig. 8), då alltså enligt (54):

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\Bigg\{\int^0 \frac{dz}{z\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{z\psi(z)}\Bigg\} + x\Bigg\{\int^0 \frac{dz}{z^2\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{z^2\psi(z)}\Bigg\}$$

$$+ x^2\Bigg\{\int^0 \frac{dz}{z^3\psi(z)} + \sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{z^3\psi(z)}\Bigg\} + \dots\Bigg] + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)}.$$

Enligt (56) ha vi för beräkning af punktintegralerna omkring 0:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^0 \frac{dz}{z^s\psi(z)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Bigg|^0 \Bigg\{\frac{1}{\psi(z)}\Bigg\}^{(s-1)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Bigg|^0 u^{(s-1)};$$

enligt (57) och (58) fås, enär för $\varkappa = 0, 1, 2$ etc. $\overset{0}{/}\psi^{(2\varkappa)} = (-1)^\varkappa$ och $\overset{0}{/}\psi^{(2\varkappa+1)} = 0$:

$$\int^0 u = \int^0 \frac{1}{\psi} = 1 \text{ och } \int^0 \left\{ u^{(r)} - \frac{r.\overline{r-1}}{\underline{|2}} u^{(r-2)} + \frac{r.\overline{r-1}..\overline{r-3}}{\underline{|4}} u^{(r-4)} - \ldots \right\} = 0,$$

hvaraf framgå följande bestämningar:

$$\int^0 u'' = 1 = C_1,\ \int^0 u^{\mathrm{IV}} = 5 = C_2,\ \int^0 u^{\mathrm{VI}} = 59 = C_3,\ \int^0 u^{\mathrm{VIII}} = 1329 = C_4,$$

$$\int^0 u^{\mathrm{X}} = 48421 = C_5 \text{ etc. samt } \int^0 u' = \int^0 u''' = \int^0 u^{\mathrm{V}} = \ldots = 0.$$

Vidare är enligt (32)

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=4}\frac{1}{(a_r)^s\psi'(a_r)} = -\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^s} - \frac{1}{(-\frac{1}{2}\pi)^s} - \left(\frac{1}{(\frac{3}{2}\pi)^s} - \frac{1}{(-\frac{3}{2}\pi)^s}\right)\right\}$$

hvilken summa är 0 för s = jämnt tal, men $-\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^s} - \frac{2}{(\frac{3}{2}\pi)^s}\right\}$ för s = udda tal.

Slutligen är fyllnadstermen

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=4}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=4}\frac{1}{(x-a_r)\psi'(a_r)} = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - x^2}.$$

Vår serieutveckling blir alltså:

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \left\{1 - \frac{2}{\frac{1}{2}\pi} + \frac{2}{\frac{3}{2}\pi}\right\} + x^2\left\{\frac{C_1}{\underline{|2}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^3} + \frac{2}{(\frac{3}{2}\pi)^3}\right\}$$

$$+ x^4\left\{\frac{C_2}{\underline{|4}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^5} + \frac{2}{(\frac{3}{2}\pi)^5}\right\} + \ldots + \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - x^2}.$$

Anm. Denna serie med sin stora konvergens cirkel $\varrho = \frac{5}{2}\pi - \varepsilon$ har företrädesvis sitt intresse för den hyperboliske sekanten, hvilken erhålles genom att sätta $x = i\xi$, då

$$\frac{1}{Ch\xi} = \frac{1}{\operatorname{Cos} i\xi} = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = \left\{1 - \frac{2}{\frac{1}{2}\pi} + \frac{2}{\frac{3}{2}\pi}\right\} - \xi^2\left\{\frac{C_1}{\underline{|2}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^3} + \frac{2}{(\frac{3}{2}\pi^3)}\right\}$$

$$+ \xi^4\left\{\frac{C_2}{\underline{|4}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^5} + \frac{2}{(\frac{3}{2}\pi)^5}\right\} - \ldots + \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + \xi^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + \xi^2}.$$

b) $\varrho = k\pi$, der k är ett särdeles stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln finnas nu de kritiska punktparen

$\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}\pi$, $\left.\begin{matrix}a_3\\a_4\end{matrix}\right\} = \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots \left.\begin{matrix}a_{2k-1}\\a_{2k}\end{matrix}\right\} = \pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$. Enär i öfverensstämmelse med (62) för en oändligt stor konvergens cirkel

$$\lim \int^{\bar{z}=\varrho} \frac{1}{z \operatorname{Cos} z} = 0,$$

så blir enligt (63) serien inskränkt till endast första termen och fyllnadstermen. Om vi införa $\frac{1}{2}\pi + \zeta = z = \varrho_\omega$, då ζ för en oändligt stor konvergens cirkel P kan anses sammanfalla med ϱ_ω [jfr fig. 8], hvaraf $d\zeta = i\zeta d\omega$ och $\lim \frac{\zeta}{\frac{1}{2}\pi+\zeta} = 1$, så kan första termen sättas under formen

$$\int^P \frac{dz}{z \operatorname{Cos} z} = -\int^P \frac{d\zeta}{(\frac{1}{2}\pi+\zeta)\operatorname{Sin}\zeta} = -i\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\operatorname{Sin}\zeta}.$$

och följaktligen enligt (64) anses såsom försvinnande. Vi kunna alltså enligt (65) sätta

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2k}\int^{a_r} \frac{dz}{(x-z)\operatorname{Cos} z} = -\sum_{r=1}^{r=2k} \frac{1}{(x-a_r)\operatorname{Sin} a_r}$$

eller efter en enkel reduktion af termerna

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \pi\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2-x^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2-x^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2-x^2} - \ldots - \frac{(-1)^k(2k-1)}{\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2-x^2}\right\}.$$

Anm. 1. Genom att sätta $x = i\xi$ få vi följande för en oändligt stor konvergens cirkel gällande serie:

$$\frac{1}{Ch\xi} = \pi\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2+\xi^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2+\xi^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2+\xi^2} - \text{etc.}\right\}.$$

Anm. 2. Den för konvergens cirkeln $\varrho = k\pi$ försvinnande koefficienten till x^s [s = jämnt tal] har formen

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z^{s+1}\operatorname{Cos} z} + \sum_{r=1}^{r=2k}\int^{a_r} \frac{dz}{z^{s+1}\operatorname{Cos} z}\right\} = 0,$$

hvaraf framgår följande anmärkningsvärda relation:

$$\frac{\pi^{s+1}.C_{\frac{1}{2}s}}{2^{s+2}\lfloor s} = 1 - \frac{1}{3^{s+1}} + \frac{1}{5^{s+1}} - \ldots - \frac{(-1)^k}{(2k-1)^{s+1}}$$

eller för $s = 2n$ [jfr Bertrand, Calc. Diff., pag. 423]:

$$\frac{\pi^{2n+1}.C_n}{2^{2n+2}\lfloor 2n} = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \text{etc.},$$

hvilken formel är giltig äfven för $n = 0$, då vi låta C_0 äfvensom $\lfloor 0$ betyda 1. Vi kunna nu med lätthet beräkna C_n för huru högt värde som helst på n.

Ex. 5. $f(x) = 1$, $\psi(x) = \operatorname{Sin} x$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ representeras af $\pm \varkappa\pi$ [$\varkappa = 0, 1, 2$ etc.]. Vi särskilja följande två moment.

a) $\varrho = 3\pi - \varepsilon$, då qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ har *fem* kritiska punkter inom konvergens cirkeln, nämnl. $a_1 = 0$, $\left.\begin{matrix}a_2\\a_3\end{matrix}\right\} = \pm\pi$, $\left.\begin{matrix}a_4\\a_5\end{matrix}\right\} = \pm 2\pi$, då alltså enligt (54):

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\left\{\int^0\frac{dz}{z^2\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{z\psi(z)}\right\} + x\left\{\int^0\frac{dz}{z^3\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{z^2\psi(z)}\right\}$$

$$+ x^2\left\{\int^0\frac{dz}{z^4\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{z^3\psi(z)}\right\} + \ldots\Bigg] + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)}.$$

Enligt (56) är

$$\frac{1}{2\pi i}\int^0\frac{dz}{z^s\chi(z)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Bigg/^{0}\left\{\frac{z}{\psi(z)}\right\}^{(s-1)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Bigg/^{0} u^{(s-1)};$$

enligt (57) och (58) fås, enär för $\varkappa = 0, 1, 2$ etc. $\Big/^{0}\psi^{(2\varkappa)} = 0$ och $\Big/^{0}\psi^{(2\varkappa+1)} = (-1)^{\varkappa}$:

$$\Bigg/^{0} u = \Bigg/^{0}\frac{z}{\psi(z)} = 1$$

och

$$\Bigg/^{0}\left\{r u^{(r-1)} - \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{\lfloor 3}u^{(r-3)} + \frac{r.\overline{r-1}..\overline{r-4}}{\lfloor 5}u^{(r-5)} - ..\right\} = 0,$$

hvaraf fås följande bestämningar:

$/\overset{0}{u''} = \frac{1}{3} = D_1$, $/\overset{0}{u^{IV}} = \frac{7}{15} = D_2$, $/\overset{0}{u^{VI}} = \frac{31}{21} = D_3$ etc. samt $/\overset{0}{u'} = /\overset{0}{u'''} = /\overset{0}{u^{V}} = \ldots = 0$. — Vidare fås enligt (32):

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=2}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\psi(z)} = \sum_{r=2}^{r=5}\frac{1}{(a_r)^s\psi'(a_r)} = -\frac{1}{\pi^s} - \frac{1}{(-\pi)^s} + \frac{1}{(2\pi)^s} + \frac{1}{(-2\pi)^s},$$

hvilken summa är 0 för s = udda tal men $= -\frac{2}{\pi^s} + \frac{2}{(2\pi)^s}$ för s = jämnt tal.

Slutligen blir fyllnadstermen

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=5}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=5}\frac{1}{(x-a_r)\psi'(a_r)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}.$$

Vår serieutveckling blir alltså:

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x} = x\left\{\frac{D_1}{\lfloor 2} - \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{(2\pi)^2}\right\} + x^3\left\{\frac{D_2}{\lfloor 4} - \frac{2}{\pi^4} + \frac{2}{(2\pi)^4}\right\}$$
$$+ x^5\left\{\frac{D_3}{\lfloor 6} - \frac{2}{\pi^6} + \frac{2}{(2\pi)^6}\right\} + \ldots + \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}.$$

Anm. Denna serie med sin vidsträckta konvergens cirkel $\varrho = 3\pi - \varepsilon$ har sitt förnämsta intresse för den hyperboliske kosekanten, hvilken fås genom att sätta $x = i\xi$, då

$$\frac{1}{Sh\xi} = \frac{i}{\mathrm{Sin}\,i\xi} = \frac{2}{e^{\xi}-e^{-\xi}} = -\xi\left\{\frac{D_1}{\lfloor 2} - \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{(2\pi)^2}\right\}$$
$$+ \xi^3\left\{\frac{D_2}{\lfloor 4} - \frac{2}{\pi^4} + \frac{2}{(2\pi)^4}\right\} - \text{etc.} + \frac{1}{\xi} - \frac{2\xi}{\pi^2+\xi^2} + \frac{2\xi}{(2\pi)^2+\xi^2}.$$

b) $\varrho = (k+\frac{1}{2})\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi de kritiska punkterna $a_1 = 0$, $\left.\begin{matrix}a_2\\a_3\end{matrix}\right\} = \pm\pi$, $\left.\begin{matrix}a_4\\a_5\end{matrix}\right\} = \pm 2\pi \ldots \left.\begin{matrix}a_{2k}\\a_{2k+1}\end{matrix}\right\} = \pm k\pi$. För en oändligt stor konvergens cirkel är formeln (65) tillämplig, då alltså

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=2k+1}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\,\mathrm{Sin}\,z} = \sum_{r=1}^{r=2k+1}\frac{1}{(x-a_r)\,\mathrm{Cos}\,a_r}$$

eller efter en enkel reduktion af termerna

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{\pi^2-x^2} - \frac{1}{(2\pi)^2-x^2} + \frac{1}{(3\pi)^2-x^2} - \ldots - \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2-x^2}\right\}.$$

Anm. 1. Genom att sätta $x = i\xi$ få vi följande för en oändligt stor konvergens cirkel gällande serie:

$$\frac{1}{Sh\xi} = \frac{1}{\xi} - 2\xi\left\{\frac{1}{\pi^2+\xi^2} - \frac{1}{(2\pi)^2+\xi^2} + \frac{1}{(3\pi)^2+\xi^2} - \text{etc.}\right\}.$$

Anm. 2. Den för konvergens cirkeln $\varrho = (k+\frac{1}{2})\pi$ försvinnande koefficienten till x^{s-1} [s = jämnt tal] har formen

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int^{0}\frac{dz}{z^{s+1}\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=2k+1}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s\psi(z)}\right\} = 0,$$

hvaraf framgår följande relation:

$$\frac{\pi^s D_{\frac{1}{2}s}}{2\lfloor s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots - \frac{(-1)^k}{k^s}$$

eller för $s = 2n$:

$$\frac{\pi^{2n} \cdot D_n}{2\lfloor 2n} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

Genom jämförelse med de i ex. 2 och 3 gifna bestämningar på A_n och B_n erhålles

$$B_n + D_n = 2n A_n$$

eller

$$D_n = B_n\{2^{2n} - 2\}.$$

Ur denna formel återfinna vi de ofvan beräknade värdena på D_1, D_2, D_3 samt $D_4 = \frac{127}{15}$, $D_5 = \frac{2555}{33}$ etc.

Ex. 6. $f(x) = \operatorname{Sin} x$, $\psi(x) = \operatorname{Cos} x$, då de kritiska punkterna äro desamma som i ex. 4.

a) $\varrho = \frac{3}{2}\pi - \varepsilon$. I enlighet med våra föregående exempel finna vi:

$$\operatorname{tg} x = x\left\{\frac{2E_1}{\lfloor 2} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^2}\right\} + x^3\left\{\frac{4E_2}{\lfloor 4} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^4}\right\}$$

$$+ x^5\left\{\frac{6E_3}{\lfloor 6} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^6}\right\} + \ldots + \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - x^2}.$$

Anm. Den hyperboliska tangenten fås genom att sätta $x = i\xi$, då

$$Th\xi = \frac{\operatorname{tg} i\xi}{i} = \frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{e^{\xi}+e^{-\xi}} = \xi\left\{\frac{2E_1}{\underline{|2}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^2}\right\}$$

$$+ \xi^3\left\{\frac{4E_2}{\underline{|4}} - \frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^4}\right\} + \text{etc.} + \frac{2\xi}{(\frac{1}{2}\pi)^2+\xi^2}.$$

b) $\varrho = k\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Formeln (65) är nu tillämplig, då

$$\operatorname{tg} x = 2x\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - x^2} + \frac{1}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - x^2} + \ldots \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2 - x^2}\right\}.$$

Anm. 1. För $x = i\xi$ få vi följande uttryck för tang. hyp.:

$$Th\xi = 2\xi\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2+\xi^2} + \frac{1}{(\frac{3}{2}\pi)^2+\xi^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Anm. 2. I enlighet med föreg. ex. mom. *b) anm. 2* fås för bestämmandet af E_n följande relation

$$E_n = 2^{2n} \cdot A_n,$$

hvaraf framgår (jfr ex. 2):

$$E_1 = 1,\quad E_2 = 2,\quad E_3 = 16,\quad E_4 = 272 \text{ etc.}$$

Ex. 7. $f(x) = \operatorname{Cos} x$, $\psi(x) = \operatorname{Sin} x$, då de kritiska punkterna äro desamma som i ex. 5.

a) $\varrho = 2\pi - \varepsilon$. Vi finna i likhet med förut:

$$\operatorname{Cotg} x = x\left\{\frac{2}{\pi^2} - \frac{F_1}{\underline{|2}}\right\} + x^3\left\{\frac{2}{\pi^4} - \frac{F_2}{\underline{|4}}\right\} + x^5\left\{\frac{2}{\pi^6} - \frac{F_3}{\underline{|6}}\right\} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2}.$$

Anm. Den hyperboliske kotangenten fås genom att sätta $x = i\xi$, då

$$\frac{1}{Th\,\xi} = i\operatorname{Cotg} i\xi = \frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{e^{\xi}-e^{-\xi}} = \xi\left\{\frac{F_1}{\underline{|2}} - \frac{2}{\pi^2}\right\} - \xi^3\left\{\frac{F_2}{\underline{|4}} - \frac{2}{\pi^4}\right\} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{\xi} + \frac{2\xi}{\pi^2+\xi^2}.$$

$b)$ $\varrho = (k + \frac{1}{2})\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Formeln (65) kan nu tillämpas, då

$$\operatorname{Cotg} x = \frac{1}{x} - 2x \left\{ \frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{(2\pi)^2 - x^2} + \frac{1}{(3\pi)^2 - x^2} + \ldots \frac{1}{(k\pi)^2 - x^2} \right\}.$$

Anm. 1. För $x = i\xi$ fås följande uttryck för Cotang. hyp.:

$$\frac{1}{Th\xi} = \frac{1}{\xi} + 2\xi \left\{ \frac{1}{\pi^2 + \xi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2 + \xi^2} + \text{etc.} \right\}.$$

Anm. 2. För bestämmandet af F_n fås följande relation:

$$F_n = 2^{2n} . B_n ,$$

hvaraf erhålles (jfr ex. 3):

$$F_1 = \tfrac{2}{3}, \quad F_2 = \tfrac{8}{15}, \quad F_3 = \tfrac{32}{21}, \quad F_4 = \tfrac{64}{15} \text{ etc.}$$

Ex. 8. $f(x) = 1$, $\psi(x) = 1 - \operatorname{Cos} x$, då rötterna till $\psi(x) = 0$ representeras af $2k\pi$ $[k = 0, 1, 2$ etc.$]$. Enär $/\psi'(x)^{2k\pi} = 0$, så äro alla rötterna till $\psi(x) = 0$ *tvåfaldiga*, hvilken omständighet är af särskildt intresse för belysningen af våra formler.

$a)$ $\varrho = 4\pi - \varepsilon$, då qvoten $\dfrac{1}{\psi(x)}$ har *tre* kritiska punkter inom konvergens cirkeln, nämnl. $a_1 = 0$ och $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm 2\pi$. Om vi enligt (55) sätta $\psi(z) = (z - a_r)^2 \chi(z)$, så fås enligt (54):

$$\frac{1}{1 - \operatorname{Cos} x} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{r=1}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{z\,\psi(z)} + x \sum_{r=1}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{z^2 \psi(z)} + x^2 \sum_{r=1}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{z^3 \psi(z)} + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{(x-z)\psi(z)},$$

då

$$\sum_{r=1}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{z^s \psi(z)} = \int^{0} \frac{dz}{z^{s+2} \chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=3} \int^{a_r} \frac{dz}{z^s (z - a_r)^2 \chi(z)}.$$

Vi få enligt (56):

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{dz}{z^{s+2}\chi(z)} = \frac{1}{\underline{|s+1}}\overset{0}{\Big/}\left\{\frac{z^2}{\psi(z)}\right\}^{(s+1)} = \frac{1}{\underline{|s+1}}\overset{0}{\Big/}u^{(s+1)}\,.$$

Enär $\overset{0}{/}\psi = 0$ samt $\overset{0}{/}\psi^{(2\varkappa-1)} = 0$ och $\overset{0}{/}\psi^{(2\varkappa)} = (-1)^{\varkappa-1}$ $[\varkappa = 1,\ 2$ etc.], så fås enligt (57) och (60) $[r = 3,\ 4$ etc.]:

$$\overset{0}{/}u = 2 \quad \text{och} \quad \overset{0}{\Big/}\left\{\frac{r.\overline{r-1}}{\underline{|2}}u^{(r-2)} - \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-3}}{\underline{|4}}u^{(r-4)}\right.$$

$$\left. + \frac{r.\overline{r-1}..\overline{r-5}}{\underline{|6}}u^{(r-6)} - \ldots\right\} = 0\,,$$

hvaraf framgå följande bestämningar:

$\overset{0}{/}u'' = \frac{1}{3} = G_1$, $\overset{0}{/}u^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{5} = G_2$, $\overset{0}{/}u^{\mathrm{VI}} = \frac{5}{21} = G_3$ etc. samt $\overset{0}{/}u' = \overset{0}{/}u''' = \overset{0}{/}u^{\mathrm{V}} = \ldots = 0$.

Om vi enligt (56) sätta $\alpha = (z-a_r)^2$, $\beta = z^s\psi(z)$ samt $\dfrac{\alpha}{\beta} = v$, då $\overset{a_r}{/}\alpha = \overset{a_r}{/}\alpha' = \overset{a_r}{/}\beta = \overset{a_r}{/}\beta' = 0$ samt $\overset{a_r}{/}\alpha'' = 1.2$, $\overset{a_r}{/}\beta'' = a_r^s$ och $\overset{a_r}{/}\beta''' = 3s\,a_r^{s-1}$, så följer enligt (60) för $r = 2$ och $r = 3$:

$$1.2 = \overset{a_r}{\Big/}\{\beta + v\}'' = \overset{a_r}{\Big/}\beta''v \quad \text{eller} \quad \overset{a_r}{\Big/}v = \frac{2}{a_r^s}$$

samt

$$0 = \overset{a_r}{\Big/}\{\beta + v\}''' = \overset{a_r}{\Big/}\{\beta'''v + 3\beta''v'\} \quad \text{eller} \quad \overset{a_r}{\Big/}v' = -\frac{2s}{a_r^{s+1}}\,.$$

Vi finna således i öfverensstämmelse med (56):

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=2}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{z^s(z-a_r)^2\chi(z)} = \sum_{r=2}^{r=3}\overset{a_r}{\Big/}v' = -2s\left\{\frac{1}{(2\pi)^{s+1}} + \frac{1}{(-2\pi)^{s+1}}\right\},$$

hvilken summa är 0 för s = jämnt tal och $= -\dfrac{4s}{(2\pi)^{s+1}}$ för s = udda tal.

Om vi slutligen sätta $a = (z - a_r)^2$, $b = (x - z)\psi(z)$ samt $\frac{a}{b} = w$, då $\Big/^{a_r} b = \Big/^{a_r} b' = 0$ samt $\Big/^{a_r} b'' = x - a_r$ och $\Big/^{a_r} b''' = -3$, så fås enligt (60) för $r = 2$ och $r = 3$:

$$1 \,.\, 2 = \Big/^{a_r} \{b + w\}'' = \Big/^{a_r} b''w \quad \text{eller} \quad \Big/^{a_r} w = \frac{2}{x - a_r}$$

samt

$$0 = \Big/^{a_r} \{b + w\}''' = \Big/^{a_r} \{b'''w + 3b''w'\} \quad \text{eller} \quad \Big/^{a_r} w' = \frac{2}{(x - a_r)^2}.$$

Fyllnadstermen antar således formen

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=3}\int^{a_r}\frac{dz}{(x-z)\psi(z)} = \sum_{r=1}^{r=3}\Big|^{a_r} w' = \frac{2}{x^2} + 2\left\{\frac{1}{(x-2\pi)^2} + \frac{1}{(x+2\pi)^2}\right\}$$

Vår serieutveckling blir alltså:

$$\frac{1}{1-\operatorname{Cos} x} = \left\{\frac{G_1}{\underline{|2}} - \frac{4.1}{(2\pi)^2}\right\} + x^2\left\{\frac{G_2}{\underline{|4}} - \frac{4.3}{(2\pi)^4}\right\} + x^4\left\{\frac{G_3}{\underline{|6}} - \frac{4.5}{(2\pi)^6}\right\} + \ldots$$
$$+ \frac{2}{x^2} + 2\left\{\frac{1}{(x-2\pi)^2} + \frac{1}{(x+2\pi)^2}\right\}.$$

Anm. Genom att sätta $x = i\xi$ fås

$$\frac{1}{1 - Ch\xi} = \left\{\frac{G_1}{\underline{|2}} - \frac{4.1}{(2\pi)^2}\right\} - \xi^2\left\{\frac{G_2}{\underline{|4}} - \frac{4.3}{(2\pi)^4}\right\} + \text{ etc.}$$
$$- \frac{2}{\xi^2} + 4 \,.\, \frac{(2\pi)^2 - \xi^2}{\{(2\pi)^2 + \xi^2\}^2}.$$

b) $\varrho = (2k+1)\pi$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu de kritiska punkterna

$$a_1 = 0, \quad \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\Big\} = \pm 2\pi, \quad \begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\Big\} = \pm 2.2\pi, \ldots \begin{matrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{matrix}\Big\} = \pm 2k\pi .$$

Enär för en oändligt stor konvergens cirkel

$$\lim \Big|^{\bar{z}=\varrho} \frac{1}{1 - \operatorname{Cos} z} = \lim \Big|^{\bar{z}=\varrho} \frac{1}{(z - a_r)^2 \chi(z)} = 0$$

[utom möjligen för $\bar{a}_r$ = ett särdeles stort tal och $\widehat{z} = 0$ eller 180°, hvilket fall dock icke kan ha något väsendtligt inflytande att göra mod. för serien $\int^P \frac{dz}{z\psi(z)} = i\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - \operatorname{Cos} z}$ till annat än en oändligt liten qvantitet], så fås enligt (65):

$$\frac{1}{1-\operatorname{Cos} x} = 2\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2\pi)^2} + \frac{1}{(x+2\pi)^2} + \frac{1}{(x-2.2\pi)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(x+2.2\pi)^2} + \ldots \frac{1}{(x-2k\pi)^2} + \frac{1}{(x+2k\pi)^2}\right\}.$$

Anm. 1. Genom att sätta $x = i\xi$ fås följande utveckling:

$$\frac{1}{1-Ch\xi} = -\frac{2}{\xi^2} + 4\left\{\frac{(2\pi)^2 - \xi^2}{\{(2\pi)^2 + \xi^2\}^2} + \frac{(2.2\pi)^2 - \xi^2}{\{(2.2\pi)^2 + \xi^2\}^2} + \ldots\right\}.$$

Anm. 2. Den för konvergens cirkeln $\varrho = (2k+1)\pi$ försvinnande koefficienten till x^{s-1} [s = udda tal] har formen

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int^0 \frac{dz}{z^{s+2}\chi(z)} + \sum_{r=2}^{r=2k+1} \int^{a_r} \frac{dz}{z^s(z-a_r)^2\chi(z)}\right\} = 0,$$

hvaraf framgår följande relation:

$$\frac{(2\pi)^{s+1}\,.\,G_{\frac{1}{2}(s+1)}}{4s\,.\,\underline{|s+1}} = 1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{1}{3^{s+1}} + \ldots \frac{1}{k^{s+1}}$$

eller för $s+1 = 2n$:

$$\frac{(2\pi)^{2n}\,.\,G_n}{4(2n-1)\,.\,\underline{|2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots \frac{1}{k^{2n}}.$$

Genom jämförelse med det i ex. 3 erhållna värdet på B_n framgår följande enkla relation:

$$G_n = 2(2n-1)B_n.$$

Ur denna formel framgå de förut beräknade värdena på G_1, G_2, G_3 samt $G_4 = \frac{7}{15}$, $G_5 = \frac{15}{11}$ etc.

Anm. 3. Att verkligen första termen $\int^P \frac{dz}{z\psi(z)}$ är 0 för P = en oändligt stor cirkel $\varrho = (2k+1)\pi$ framgår äfven af likheten

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{P}\frac{dz}{z\psi(z)} = \frac{G_1}{\lfloor 2} - 4\left\{\frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2} + \cdots \frac{1}{(2k\pi)^2}\right\},$$

der senare ledet på grund af det i a) beräknade värdet på G_1 är 0 [jfr ex. 3 b) *anm.*].

Af dessa nu anförda exempel kan man sluta sig till karakteren af de utvecklingar, som låta utföra sig enligt (54), hvilken formel är att betrakta som en supplementserie till den Mac Laurinska serien. Vi se, huruledes man förmedelst denna integralteori med lätthet löser den förut olösta frågan att utveckla funktioner i konvergenta serier efter stigande digniteter af variabeln för konvergens cirklar, som innesluta ett godtyckligt antal oändlighetspunkter, hvarigenom ett nytt fält af särdeles stor utsträckning öppnat sig för den matematiska forskningen. Vi skola finna, huru detta fält i mon af vår teories fortgående utveckling alltjämt vidgar sig att omfatta nya synpunkter, hvarifrån man med säkerhet och klarhet kan skärskåda frågor af stor vigt och betydelse, hvilka man med förut gifna hjelpkällor icke varit i tillfälle att tillfridsställande utreda.

(Forts.).

RÄTTELSER.

Årg. III. Sid. 264, rad. 13 nerifrån: kontur, som omfattar origo, etc.
„ „ „ 272 „ 3 „ : punkten 0 (origo) ligga etc.

AFDELNING IV.

Granskning.

Elementerna af Algebraiska Analysen och Differentialkalkylen, förra delen, reela qvantiteter, af C. F. E. Björling.

Sedan omständigheterna numera gestaltat sig så, att detta arbete blifvit en ganska allmänt använd lärobok, synes det vara af behofvet påkalladt, att densamma underkastas en omsorgsfull och i möjligaste måtto fullständig granskning för att lemna dem, som studera arbetet, upplysningar om de fel och oklarheter, det här och der innehåller. För att en sådan granskning skulle blifva af verklig och största möjliga nytta, vore det af vigt, att den utfördes af någon grundlig matematiker, hvilket vi länge hafva hoppats skola inträffa. Men då vi numera börjat tvifla på uppfyllelsen af denna vår önskan, hafva vi efter bästa förmåga vågat framlägga resultatet af vår undersökning af det meranämnda arbetet.

Vi börja genast med granskningen af de särskilda teorierna och skola derefter försöka att fälla ett allmänt omdöme om arbetet i sin helhet.

Först måste vi beklaga, att satserna om gränsvärden för summor, produkter och qvoter af funktioner samt om gränsvärdet för en funktion upphöjd till en annan funktion alldeles blifvit förbigångna i 1:sta bokens 3:dje kapitel, der deras plats vore. Detta har vållat, att härledningen af vissa gränsvärden blifvit dogmatiskt framställd, såsom å sid. 18, der det uppvisas, att $\lim \left(1 + \dfrac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ är densamma, oberoende af det sätt på hvilket ω går mot positiva oändligheten; å sid. 19, der det visas, att samma funktion har samma gränsvärde, äfven då ω går mot negativa oändligheten; samt å sidd. 65—68, der lagarne för derivation af summor, skilnader, produkter och qvoter härledas. En annan följd häraf har blifvit, att läsaren ej gjorts uppmärksam på de vilkor, under hvilka de uteslutna allmänna satserna gälla, utan snarare kan känna sig frestad att tro, att åtminstone satsen om en produkts gränsvärde obetingadt gäller, vare sig att faktorernas antal är ändligt eller oändligt, då han ser förf. utan vidare omständigheter verkställa gränsöfvergången i formeln (6) å sid. 252 vid härledningen af den oändliga produkten för $\sin x$. Det är öfverraskande, att förf., som ju laggt Schlömilchs Handbuch der Algebr. Analysis jemte andra arbeten till grund för sin lärobok, kunnat utesluta en så vigtig undersökning som den, hvars frånvaro vi här anmärkt och som ovilkorligen måste medtagas, såvida bevisföringen skall ega bindande kraft.

Att förf. icke alltid bland de olika framställningar af en och samma sak, hvilka han haft att välja emellan, utsett den enklaste eller bästa, hafva vi sett mer än ett exempel på. För ögonblicket vilja vi blott nämna förf:s härledning af $\lim \frac{(1+\delta)^a - 1}{\delta}$. Här hade förf. i stället för sin temligen långa härledning helt enkelt kunnat i likhet med Schlömilch reducera funktionen, hvars gränsvärde sökes, till $a \cdot \frac{e^{a \log(1+\delta)} - 1}{a \log(1+\delta)} \times \frac{\log(1+\delta)}{\delta}$, der log betecknar naturlig logaritm.

Förf. definierar kontinuitet i en viss punkt på följande sätt å sid. 23: «En funktion, $y = f(x)$, är kontinuerlig för $x = a$, om den för «detta x-värde har en finit och determinerad, d. v. s. ändlig och fullt «bestämd valör, och derjemte $f(a + \delta)$, vid indefinit aftagande δ, ten«derar indefinit mot $f(a)$.«

Som förf. icke säger, att δ *numeriskt* aftager indefinit, kan man frestas tro, att δ är en positiv mot noll konvergerande qvantitet. Vidare är alltid $\lim f(a + \delta) = f(a)$; ty detta är helt enkelt definitionen på $f(a)$, så att $\lim f(a + \delta)$, der $\delta \gtrless 0$, är ändlig eller oändlig, determinerad eller indeterminerad, på samma gång som det ena eller andra är händelsen med $f(a)$. — För att undersöka kontinuiteten af $f(x)$ för $x = a$ har man att se till, 1) att funktionen i denna punkt är ändlig; 2) att funktionen är antingen reel å båda eller imaginär å båda sidor om $x = a$ (hvilket vilkor förf. alldeles uteglömt) och 3) att $f(a + \delta)$ och $f(a - \varepsilon)$, der δ och ε äro positiva qvantiteter, som konvergera mot noll, hafva ett och samma gränsvärde, hvilket tydligen alltid inträffar, om

$$\lim [f(a + \delta) - f(a - \varepsilon] = 0 \quad \text{för} \quad \lim \delta = 0 \quad \text{och} \quad \lim \varepsilon = 0 .$$

Följden af att förf. icke framställt vilkoret 2), blir den, att förf. måste anse $f(x)$ vara kontinuerlig äfven i sina slutpunkter (t. ex. $\sqrt{x}$ för $x = 0$), såvida nämnl. öfriga kontinuitetsvilkor äro uppfyllda i dessa punkter.

Hvad förf. kallar kontinuitet *i granskapet af* en punkt, kunna vi icke skilja från kontinuitet *i* en punkt, enär det intervall, som väljes så, att det innesluter punkten, kan göras oändligt litet och således blir detsamma som punkten sjelf.

Vi komma nu till 1:sta bokens 5:te kapitel. En ganska stor del af detta kapitel utgör en nästan ordagrann öfversättning, såväl hvad teori som exempel angår, ur Catalan's Traité élémentaire des séries. Detta lån från en utmärkt författare vilja vi ingalunda klandra, men det synes oss som om detta arbete hade bort omnämnas i förf:s «Förord« bland «de arbeten, hvilka förf. lagt till grund för sin bok eller rådfrågat«, men vi hafva blott funnit förf. i förbigående omnämna det i en not å sid. 65.

Den nedtill å sid. 30 stående omvändningen af teorem IV å samma sida tillhör den å följande sida begynnande § 14, enär de båda förekommande serierna måste hafva alla sina termer positiva.

Öfverst å sid. 35 samt i noterna å sidd. 38 och 42 hänvisar förf. till 3:dje boken; i ex. 1) å sid. 43 gör förf. en antecipation af serieutvecklingen för e^x utan någon hänvisning. Som tankesammanhanget lider af dylika hänvisningar framåt och möjligheten af en «circulus in demonstrando« derigenom uppkommer, bör man, såvida det utan svårighet kan ske, undvika sådant förutsättande af bekantskap med det följande. Detta kan med en, om ej bättre, dock lika god ordningsföljd åstadkommas, om 1:sta bokens 5:te kapitel, hvari samtliga de ofvannämnda hänvisningarna förekomma, borttages från dess nuvarande plats och i stället användes som inledning till 4:de boken, hvars början handlar om oändliga serier. Derigenom kommer hela framställningen af differentialkalkylen att följa omedelbart efter limesteorien, hvaraf den sjelf utgör en del, och dessutom blir det hufvudsakliga innehållet af 4:de boken algebraisk analys.

Å sid. 53 undersöker förf. seriens (4) konvergens ofullständigt. Förf. säger nämnl.: — «så inser man lätt dess konvergens genom att «sammanslå termerna två och två och derpå« (d. v. s. på den nybildade serien) «använda teorem VIII.« Låtom oss för korthetens skull kalla serien (4) för $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$, der alla u äro > 0, och den genom termernas parvisa sammanslående derur bildade serien för $t_0 + t_1 + t_2 + \ldots$, hvilken får alla sina termer positiva; då har man $t_n = u_{2n} - u_{2n+1}$. Ur t-seriens konvergens följer nu, att $\lim t_n = 0$ d. v. s. $\lim (u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$, hvilket tydligen ingalunda behöfver innebära att $\lim u_n = 0$. Om vi t. ex. hade $u_n = \dfrac{n+4}{2(n+2)}$, så blefve t-serien: $\dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{6.7} + \ldots$, som konvergerar enligt förf:s teorem VIII, men likväl är icke $\lim u_n = 0$ utan $= \lim \dfrac{1 + \dfrac{4}{n}}{2\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} = \frac{1}{2}$. Hvad förf. behöft tillägga för att bevisa seriens (4) konvergens, är lätt att inse; ty vi hafva enligt våra nyss använda beteckningar, om man tillika med S_m menar summan af de $(m+1)$ första termerna i u-serien och för t-serien använder den analoga beteckningen T_m,

$$S_{2n-1} = T_{n-1} \quad \text{och} \quad S_{2n} = T_{n-1} + u_{2n}.$$

Af dessa eqvationer följer nu omedelbart, att u-serien har en ändlig och determinerad summa d. v. s. konvergerar, om t-serien konvergerar och *tillika gränsvärdet af allmänna termen i u-serien är noll*, men ej i andra fall. Förf. har alltså uraktlåtit att bevisa, att serien (4) uppfyller det nödvändiga konvergensvilkoret $\lim u_n = 0$. Under förutsättning att 1:sta bokens 5:te kapitel flyttas till den af oss föreslagna platsen, kan detta bevis utan antecipationer framställas på följande enkla sätt. Om x betyder ett positivt egentligt bråk, så aftager funktionen $x + \log(1-x)$, der log betyder naturl g logaritm, med växande x, enär dess derivata $-\frac{x}{1-x}$ är negativ; funktionen är alltså $<$ sitt värde för $x = 0$, d. v. s. att $\log(1-x) < -x$ och således $0 < 1-x < e^{-x}$, då $0 < x < 1$. Man kan nu skrifva

$$u_n = \left(1 - \frac{1-b}{1}\right)\left(1 - \frac{1-b}{2}\right)\left(1 - \frac{1-b}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1-b}{n}\right);$$

och om man i detta uttryck använder nyss erhållna olikhet på hvarje faktor, så finner man, enär $0 < b < 1$, att

$$0 < u_n < e^{-(1-b)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)},$$

hvaraf $\lim u_n = 0$, enär den harmoniska serien är divergent och exponenten till e alltså går mot negativa oändligheten. Ehuru förf:s bevis, om vårt nu framställda tillägg vidfogas, verkligen är fullt bindande, kunna vi dock ej rekommendera detsamma, allraminst i ett arbete, som vill vara kort och undvika onödigt långa bevis och räkningar. Vi hemställa derför till förf., huruvida han ej anser det vara lämpligare att bygga undersökningen af seriens (4) konvergens på teorem XI å sid. 45, d. v. s. blott uppvisa, att u_n är en funktion, som aftager med växande n (hvilket omedelbart inses ur den form, vi här gifvit åt denna term) samt att dess gränsvärde för $n = \infty$ är noll.

Att förf. icke strängt bevist lagarne för derivation af summor, skilnader, produkter och qvoter af funktioner, hafva vi i våra anmärkningar om limesteorien omnämnt. Å sid. 65 visar förf., att derivatan af en summa af oändligt många funktioner icke alltid är lika med summan af funktionernas derivator. Der förekommer åter en förutsättning af bekantskap med det följande i det förf. använder Taylors teorem. Hela denna undersökning hade alldeles kunnat uteslutas, om förf. i sin limesteori intagit de vigtiga satser, hvilkas frånvaro vi förut anmärkt hafva på ett menligt sätt inverkat på mer än ett ställe i förf:s arbete.

Förf:s framställning af Cauchy's differentialteori å sidd. 69 och 116 synes innehålla en sammanfattning af den framställning deraf, hvilken prof. Daug gifvit i Upsala Universitets Årsskrift i hans behandling af Principe des vitesses virtuelles; äfven detta synes förf. hafva bort omnämna.

Å sid. 72 uttalar förf. satsen om deriveríng af inversa funktioner men utan bevis. Förf. säger nämnligen:

«Af den sjelfklara likheten $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ följer då omedelbart «$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, hvilken formel innehåller solutionen af problemet.« Förf. synes nämnl. antaga för gifvet, att det är samma dx och dy som ingå både i $\frac{dy}{dx}$ och i $\frac{dx}{dy}$ och att det är genom bråkförkortning som den nämnda likheten blir «sjelfklar«. Detta sätt att bevisa den ifrågavarande satsen har visserligen förut användts; men med den af Cauchy gifna och af förf. antagna uppfattningen af differentialernas betydelse passar det ingalunda i stycke. Ty uti qvoten $\frac{dy}{dx}$ äro nämnl. dy och dx endast ett par qvantiteter η och ξ sådana, att deras qvot $\frac{\eta}{\xi}$ är $= f'(x)$, under det att i qvoten $\frac{dx}{dy}$, härledd genom derivation af $x = f^{-1}(y)$, dx och dy äro ett par qvantiteter ξ_1 och η_1 för öfrigt hvilka som helst, blott deras qvot $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ är $=$ derivatan af $f^{-1}(y)$. Men häraf följer ingalunda, att $\frac{\eta}{\xi} \cdot \frac{\xi_1}{\eta_1} = 1$ eller att man eger rättighet till bråkförkortning under förutsättning att $\xi_1 = \xi$ och $\eta_1 = \eta$. Då förf. hade att välja mellan detta s. k. bevis, hvars enda förtjenst torde vara dess skenbara enkelhet, och den goda bevisföring, som finnes i Todhunters af förf. använda Differential-Calculus (andra arbeten att förtiga), så kunna vi ej annat än beklaga, att förf. uppoffrat bevisets klarhet och bindande kraft för att lemna ett till skenet enkelt, men på all inre halt blottadt bevis.

Å sid. 76 synes oss förf. hafva valt ett ganska olämpligt beteckningssätt för en partiel derivata nämnl. $\left(\frac{dy}{du}\right)$. Dettas användande vållar ofta tvetydighet t. ex. i ett uttryck sådant som $\left(\frac{dy}{du}\right)^m$, der man ej kan se, om parentesen är använd för exponentens skull eller för att uttrycka att derivatan är partiel; ty äfven en vanlig derivatas m^{te} dignitet skrifves på alldeles samma sätt, såvida derivatan tecknas $\frac{dy}{du}$. Nästan lika gerna som förf. antagit ofvannämnda beteckningssätt, kunde han hafva alldeles underlåtit att göra någon skilnad i beteckningen af en partiel och en ordinär derivata, såsom fransyska och engelska författare vanligen bruka. Förf. nämner visserligen ett annat bättre beteckningssätt y'_u men använder detsamma mindre ofta. Det tydligaste uttrycket, för så vidt man vill beteckna en partiel derivata med differentialer, är utan tvifvel $\frac{d_u y}{du}$; men för att icke få täljarens utseende mer än behöfves inveckladt, skrifver man hellre $\frac{\partial y}{du}$, der det krökta d (∂) betecknar, att derivatan är partiel, och nämnaren är tillräcklig att visa, i afseende på hvilken funktion (här: u) derivationen är gjord. Kommer nämnaren du att bortskaffas, så är ∂y icke längre tillräckligt för att karakterisera en partiel differential fullständigt, utan man måste då skrifva $d_u y$ eller $\partial_u y$. En ledsam följd af förf:s beteckningssätt och hvilken äfven visar detsammas olämplighet, är att förf. genom förkortningar i eqv. (g) å sid. 77 finner ett resultat, som ovedersägligen är absurdt *till sin form*, såvida ej dy är $= 0$; detta resultat är $dy = dy + dy$. Det fullt klara uttrycket för eqv. (g) är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d_z y}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_u y}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial y}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

hvaraf genom förkortningar och multiplikation med dx fås $dy = \partial_z y + \partial_u y$, som hvarken till form eller betydelse är absurdt utan blott fullt klart uttrycker, att den totala differentialen är = summan af de partiela. Vi tillägga, att det äfven gifves ett annat och mycket godt sätt att uttrycka partiela derivator. Om nämnl. $y = f(z, u)$, så skrifver man f'_u och f'_z i st. f. $\frac{\partial y}{du}$ och $\frac{\partial y}{dz}$. Af detta goda beteckningssätt hafva vi icke, så vidt vi kunna påminna oss, sett förf. begagna sig i sitt i fråga varande arbete. Häraf framgår, att förf. bland de olika sätt att beteckna partiela derivator, som vanligen användas, valt det, som väl nästan bör kallas det sämsta.

Å sidan 92 bevisar förf. det vigtiga teoremet om, att derivationsordningen är likgiltig vid bildandet af partiela derivator af högre ordningar, men utan att dervid framhålla de fall, då detta teorem förlorar sin giltighet. Det sätt, hvarpå beviset föres, innebär dock, att undantag verkligen finnas; ty det är icke säkert, att gränsvärdena i högra membra af eqvationerna (2) och (3) äro lika. Hvad förf. anmärker i noten å samma sida, att det är likgiltigt, i hvilken ordning Δu och Δz försvinna, enär de äro af hvarandra fullkomligt oberoende, är icke alltid sannt. Tvärtom är det en lätt sak att uppvisa funktioner af två oberoende variabler, hvilka hafva olika gränsvärden, alltefter som man först gör limesöfvergång i afseende på den ena eller andra af variablerna, och för att förf:s påstående skulle blifva bevist, hade förf. derför bort *ådagalägga*, att högra membrum af (2) eller (3) icke är en sådan funktion, hvars gränsvärde beror på limesöfvergångarnes ordningsföljd. Det af förf. framställda beviset återfinnes i Sturms Cours d'Analyse äfvensom i åtskilliga andra arbeten. Det hade varit vida bättre, om förf. byggt såväl detta bevis, som den å sid. 76 gjorda härledningen af lagen för derivation af en funktion af två variabler, på satsen: «Om en «funktion är kontinuerlig såväl mellan som för gränserna a och $(a+h)$ «och dess derivata är kontinuerlig mellan samma gränser, så har man «alltid $f(a+h)-f(a) = hf'(a+\vartheta h)$, der $0<\vartheta<1$,« hvilken sats då hade bort bevisas före teoremet å sid. 76. Det lämpligaste sättet att med denna sats bevisa teoremet om derivationsordningens likgiltigtighet synes då vara att *utgå* från expressionen

$$f(z+\varDelta z,\ u+\varDelta u)-f(z+\varDelta z,\ u)-f(z,\ u+\varDelta u)+f(z,\ u)$$

och visa att densamma såväl är

$$=\varDelta u\left\{f'_u(z+\varDelta z,\ u+\lambda\varDelta u)-f'_u(z,\ u+\lambda\varDelta u)\right\},$$

som

$$=\varDelta z\left\{f'_z(z+\vartheta\varDelta z,\ u+\varDelta u)-f'_z(z+\vartheta\varDelta z,\ u)\right\};$$

och genom att sätta dessa uttryck lika samt dividera med $\varDelta u\,.\,\varDelta z$ hade man då lätt erhållit

$$\frac{f'_u(z+\varDelta z,\ u+\lambda\varDelta u)-f'_u(z,\ u+\lambda\varDelta u)}{\varDelta z}=\frac{f'_z(z+\vartheta\varDelta z,\ u+\varDelta u)-f'_z(z+\vartheta\varDelta z,\ u)}{\varDelta u},$$

hvaraf genom limesöfvergång för försvinnande $\varDelta u$ och $\varDelta z$ ej blott satsen om derivationsordningen bevisas, utan äfven genom det till bevisföringen använda teoremet blir klart; att för satsens giltighet i allmänhet fordras, att $f(z,\ u)$, f'_z, f'_u och f''_{uz} måste vara kontinuerliga för de u och z, som förekomma i dessa funktioner.

Af § 33 sidd. 102 och 103 hade förf. kunnat saklöst utesluta härledningen af formeln för $x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}$, hvilkens egentliga användning tillhör operationskalkylen. I en elementär lärobok i Differentialkalkyl eger den vida mindre anspråk på plats än många af de vigtiga satser, hvilka vi redan beklagat att förf. med tystnad förbigått.

Å sid. 113 uppställer förf. en analogi, hvilken han blott tillerkänner *approximativ* giltighet, så länge ej dess membra äro $=0$; men i samma ögonblick, som täljarne blifva $=0$, försvinner möjligheten att tala om proportionalitet Deremot finna vi ej något hinder för att låta analogien hela tiden vara exakt. Låt oss tvertom definiera $\varDelta x$, $\varDelta y$ och $\varDelta z$ genom följande exakt gällande eqvationer

$$\frac{\varDelta x}{dx}=\frac{\varDelta y}{dy}=\frac{\varDelta z}{dz}=\alpha,$$

der α är en mot noll konvergerande qvantitet. Har man då $z = f(x, y)$, så blir tydligen för $\lim \alpha = 0$

$$dz = \lim \frac{\Delta z}{\alpha} = \lim_{\alpha=0} \frac{f(x + \alpha dx, y + \alpha dy) - f(x, y)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \frac{df(x + \alpha dx, y + \alpha dy)}{d\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \{f_x'(x+\alpha dx, y+\alpha dy) dx + f_y'(x+\alpha dx, y+\alpha dy) . dy\}$$

eller

$$dz = f_x'(x, y) dx + f_y'(x, y) dy,$$

hvilken formel ger den totala differentialen af $f(x, y)$.

Ett annat sätt att härleda denna formel vore att tänka sig en arbiträr relation $y = \varphi(x)$ mellan x och y, hvarigenom man medelst differention af $z = f(x, y)$ erhåller

$$dz = f_x'(x, y) dx + f_y'(x, y) . \varphi'(x) dx$$

eller

$$dz = f_x'(x, y) dx + f_y'(x, y) dy,$$

hvilken formel måste gälla för alla möjliga former af φ, hvadan alltså dy är lika arbeträr och af x och y oberoende som någonsin dx.

Mot § 39 å sid. 117 hafva vi samma anmärkningar att göra som mot beviset å sid. 92; det är obehöfligt att upprepa dem.

Å sid. 121 böra de 3 raderna af formler mellan eqvationerna (4) och (5) förvandlas till eqvationer genom att sätta dem i ordning $= n\frac{\partial f}{dx}$, $n\frac{\partial f}{dy}$ och $n\frac{\partial f}{dz}$, såvida eqvationen (5) skall derur kunna härledas på det sätt, som förf. uppgifver.

Andra bokens 6:te kapitel, som handlar om ombyte af oberoende variabler i funktioner af mer än en oberoende variabel samt om elimination af funktioner, synes förf. hafva bort trycka med mindre typer, enär det dels ej är så elementärt som den föregående delen af differentialkalkylen och dels ej heller lika vigtigt för nybörjaren att känna.

Då förf. å sid. 145 uttalar vilkoren för giltigheten af Taylors och Mac Laurins serier, sker detta på ett sådant sätt, att icke dessa formler nödvändigt behöfva vara sanna; ty ehuru förf. deri har funktionens värden för båda och de n första derivatornas för ena gränsvärdet af den oberoende variabeln, nöjer sig förf. med att fordra, att funktionen och de förekommande derivatorna blott behöfva vara kontinuerliga mellan samma gränser, hvilket, enl. förf:s egen definition på kontinuitet mellan vissa gränser sid. 24, icke fordrar att kontinuiteten existerar för sjelfva gränspunkterna. Men finnes icke kontinuiteten för sjelfva gränspunkterna, så komma formlerna tydligen att innehålla en eller flera indeterminerade termer. De stränga vilkoren äro tydligen, att funktionen och de n första derivatorna måste vara kontinuerliga *i* och *mellan* gränspunkterna och den i resttermerna förekommande $(n+1)$^sta^ derivatan *mellan* samma gränser. Denna anmärkning gäller naturligtvis om formlerna (a) och (b) både i 47:de och 48:de §§. — Som de egentliga bråken ϑ, hvilka ingå i resttermerna i (a), äro till sin storlek beroende af x, h och n, så kunna vi säga, att den qvantitet ϑ, som definieras genom eqv. (a) och genom hvars uttrycks insättning i samma eqvation denna blir *identiskt* satisfierad, är en funktion af x, h och n. Härledningen af Taylors teorem bevisar då, att, såvida de ofvan nämnda kontinuitetsvilkoren äro uppfyllda, den funktion ϑ, som reducerar formeln (a) till identitet, alltid är ett positivt egentligt bråk. En dylik uppfattning af formlerna (b) erhålles genom samma sorts slutledning; och häraf följer, att, *så snart kontinuitetsvilkoren gälla, böra dessa formler anses som fullkomliga identiteter och qvantiteterna ϑ som positiva egentliga bråk.* Af denna uppfattning hafva vi längre fram att draga fördel.

I början af § 59 säger författaren: »Den fullständiga teorien om maxima och minima grundar sig på Taylors teorem». Detta är icke sannt. En fullständig sådan teori måste kunna användas för uppsökande af *alla* funktioners *alla* maxima och minima, men den på Taylors teorem grundade teorien fordrar ej blott funktionens utan äfven åtminstone dess första derivatas kontinuitet i den sökta maximi- eller minimipunkten. De maxima och minima, som finnas i diskontinuitetspunkter (vare sig att det är funktionen eller dess derivata, som är diskontinuerlig), kunna ej härledas med den på Taylors teorem grundade teorien, enär Taylors teorem då ej gäller om funktionen. För öfrigt *behöfver* ingalunda maximi- och minimi-teorien ens för de funktioner, som uppfylla de i Taylors teorem fordrade kontinuitetsvilkoren, grundas på detta. För sanningen af detta vårt påstående äfvensom för åtskilliga vigtiga upplysningar angående kurvors slutpunkter såsom maximi- eller minimipunkter med mera hänvisa vi till en värdefull uppsats af professor Holmgren uti denna tidskrift för år 1868 häftt. 1 och 2.

Likartade anmärkningar med dem, som vi redan gjort angående förf:s sätt att uppgifva kontinuitetsvilkoren vid Taylors och Mac Laurins teoremer för funktioner af en oberoende variabel, hafva vi äfven att göra å sidan 193, der förf. uttalar kontinuitetsvilkoren vid motsvarande teoremer för funktioner af två oberoende variabler. Vi behöfva ej serskildt formulera våra anmärkningar härom, enär de omedelbart inses af hvad vi förut sagt.

I 4:de bokens 1:sta kapitel uttalar förf. sina vilkor för användningen af Taylors och Mac Laurins teoremer till funktioners utveckling i oändliga serier. Dessa vilkor äro enl. förf. följande tre:

1) »Att de sålunda erhållna infinita serierna skola vara konvergenta»;

2) «Att $f(x)$ och *alla* dess derivator skola vara kontinuerliga för «alla valörer af den ingående variabeln mellan x och $x+h$ i (a), «samt mellan 0 och x i (b); och

3) «Att de s. k. *rest-termerna*

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1}(x+\vartheta h) \quad \text{och} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\vartheta x)$$

«skola försvinna vid indefinit växande n.«

Härom upplyser förf., att man med ganska stor sannolikhet kan antaga, att, då vilkoret 1) är uppfyldt, äfven 2) och 3) gälla; dock inträffar detta ej alltid, såsom man kan se af exempel (t. ex. i Sturms Cours d'Analyse). Deremot har förf. icke omnämnt ett annat beroende mellan ofvannämnda 3 vilkor, nämnl. att det första med nödvändighet följer ur de två andra. Detta inses lätt sålunda för t. ex. Mac Laurins teorem. Om vilkoret 2) gäller, hafva vi alltid

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R\,,$$

der R betyder resttermen och innehåller det förut omnämnda positiva egentliga bråket ϑ, som är en funktion af x och n, hvilken reducerar ofvanstående eqvation till fullkomlig identitet. Om då lim $R=0$ för $n=\infty$, så blir tydligen genom limesöfvergång för $n=\infty$ (sedan R öfverflyttats till venster om likhetstecknet) *den oändliga serien*

$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$ *identiskt* $=f(x)$ d. v. s. får ett fullt determineradt gränsvärde, enär enl. vilkoret 2) $f(x)$ är kontinuerlig; men detta är just definitionen på, att den nämnda oändliga serien konvergerar, hvadan alltså vilkoret 1) följer ur 2) och 3).

Våra anmärkningar till sid. 145 angående kontinuitetsvilkoren träffa äfven det ofvan nämnda vilkoret 2), nämnl. att förf. ej fordrar, att kontinuiteten skall finnas för sjelfva gränserna.

Å sid. 248 utvidgar förf. teorem IV å sid. 30 till följande, men utan bevis: Om en series termer hafva omvexlande tecken och äro numeriskt mindre än motsvarande termer i en konvergent serie med omvexlande tecken, så är den förra serien konvergent. Detta innehålles näml. i det som förf. säger å samma sida 248: «Då konvergerar visserligen äfven (10), emedan dess termer hafva samma tecken som och «mindre numeriska valörer än de motsvarande termerna i den förra«. Men en sådan utvidgning af teorem IV är icke tillåten; detta skola vi nu visa med ett enkelt exempel. Låt oss taga de båda serierna

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{\sqrt[4]{7}} - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \ldots,$$

som konvergerar enl. teorem XI å sid. 45, och

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\ldots,$$

hvilken deremot divergerar, såsom förf. å sid. 46 — på alldeles samma sätt som Catalan i hans förut omnämnda arbete — uppvisar. Mot termen $\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$ i den förra serien svarar $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ i den senare, och deras skilnad

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{2})+1}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n}+1)}$$

är positiv. Mot termen $\frac{1}{\sqrt[4]{2n-1}}$ svarar $\frac{1}{\sqrt{n}-1}$, och deras skilnad

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}-1}=\frac{\sqrt{n}-1-\sqrt[4]{2n-1}}{\sqrt[4]{2n-1}(\sqrt{n}-1)}>\frac{\sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{2})-1}{\sqrt[4]{2n-1}(\sqrt{n}-1)}$$

är positiv för alla $n >$ ett visst finit positivt talvärde. Alltså äro, från en viss term räknadt, termerna i den senare serien numeriskt mindre än motsvarande termer i den förra, hvilket visar, att en serie kan vara divergent, äfven om dess termer hafva samma tecken som och mindre numeriska valörer än motsvarande termer i en konvergent serie med omvexlande tecken för sina termer.

Hvad beträffar förf:s framställning af läran om kedjebråk med blott positiva leder, kunna vi ej inse, hvarför ej den fullständiga teorien, som innehålles i §§ 94—96, förtjenar att framhållas såsom lika vigtig som — för att ej säga: vigtigare än — det temligen litet känsliga kriteriet, hvilket förf. tryckt med stora typer å sidan 273, helst som härledningen af den fullständiga teorien är lika elementär och lättfattlig som någonsin beviset för det nämnda kriteriet, och dessutom detta kriterium med största lätthet kan härledas ur teorem IV å sid. 279, om man serskildt vill framhålla det för dess stora enkelhet i användningen. Vi vilja uppvisa härledningen af kriteriet ur det nämnda teoremet. Vi finna enl. beteckningarna å sid. 279

$$h_{2n-1}h_{2n}=\frac{a_{2n-1}a_{2n}}{b_{2n}} \quad \text{och} \quad h_{2n}h_{2n+1}=\frac{a_{2n}a_{2n+1}}{b_{2n+1}}.$$

Af dessa synes, att, om $\lim \frac{a_{m-1}a_m}{b_m}$ för $m = \infty$ är > 0, så måste åtminstone någondera af de båda h-seriernas allmänna termer hafva ett gränsvärde > 0, d. v. åtminstone någondera af dessa serier divergera, och kedjebråket således konvergera.

I §§ 91 och 97 har förf. i likhet med Schlömilch alldeles onödigtvis och utan att vinna någon förenkling i bevisen inskränkt qvantiteterna a och b att vara hela tal. Det enda antagande, som fordras för att beviset för kedjebråkets konvergens skall kunna ske på alldeles samma sätt, som förf. utfört det, är blott att dessa qvantiteter äro positiva och att $a_n \geqq 1 + b_n$ för alla hela positiva n, men ingalunda att a och b äro hela tal. Äro dessa vilkor uppfyllda, så konvergerar alltid kedjebråket med blott negativa leder; och dess värde är alltid ett egentligt positivt bråk, utom då $a_n = 1 + b_n$ för *alla* n och tillika serien $1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots$ divergerar. För att härleda dessa satser behöfves ingen väsendtlig förändring i förf:s framställning.

Hvad förf:s språk angår, synes deri intet bemödande att undvika onödiga fremmande ord och termer; vi vilja blott exempelvis omnämna, att förf. begagnar orden: differens, valör, expression, finit, infinit etc., ehuru vårt modersmål eger fullt motsvariga ord för dessa begrepp såsom: skilnad, värde, uttryck, ändlig, oändlig etc.

Vi afsluta härmed vår granskning, för att den ej må blifva alltför lång.

Förf. har ställt sig ett stort och ädelt mål före: det att bereda vår Svenska studerande ungdom en ändamålsenlig lärobok i elementerna af algebraiska analysen och differentialkalkylen. Att förf. ej låtit afskräcka sig af de mötande svårigheter, som alltid uppställa sig mot ett sådant företag, äro vi så villige som skyldige att hembära förf. vår tacksamhet för. Synnerligen förtjenar det att räknas förf. till beröm, att han åstadkommit det första något utförligare originalarbete på Svenska språket öfver den nämnda delen af matematiken samt att han genom den lyckliga tanken att förena algebraisk analys och differentialkalkyl och låta den ena af dem hjelpa den andra förstått att inom en jemförelsevis trång ram infatta mycket mer än hvad med en annan uppställning skulle hafva låtit sig göra. Men angående det sätt, hvarpå förf. utarbetat de enskilda delarne, måste vi på grund af de många anmärkningar, vi nu framställt, fälla det omdöme, att förf. ej med all önskvärd omsorg och noggrannhet utfört, hvad han föresatt sig, utan att tvertom, beklagligtvis, åtskilligt i förf:s lärobok är oklart, ofullständigt eller t. o. m. felaktigt.

M. FALK.

Anmälan af böcker.

GERNERTH, A. *Fünfstellige gemeine Logarithmen der Zahlen und der Winkelfunctionen von 10 zu 10 Secunden nebst Proportionaltheilen ihrer Differenzen von Aug. Gernerth. Wien 1866.* Imperialoktav 120 sidor tabeller och 24 sidor text. Pris 2 rdr 75 öre.

Denna af lektor Phragmén i hans reseberättelse i Örebro läroverksprogram för år 1868 fördelaktigt vitsordade tabell har följande utmärkande goda egenskaper.

1. Den är 5- och ej 7-siffrig. För de sammansatta ränteberäkningar förekommande talen mellan 10000 och 10800 äro dock logaritmerna 6-siffriga.

2. Sista decimalen åtföljes af en punkt om logaritmen är exakt, men är genomskuren af ett horizontelt streck, om den är för hög.

Gagnet af markering på sista decimalen för att antyda, huruvida den är för hög eller ej, är tydlig. Så t. ex. om man vill finna log. $\sqrt{2}$, blir denna $= \frac{0{,}30103}{2}$, hvilket bråk enligt vanligt bruk blir $= 0{,}15052$, men enligt denna tabell rigtigare $= 0{,}15051$, emedan sista decimalen i $0{,}30301$ här är genomstruken. Vid logaritmer med 5 decimaler är vigten af markering på sista decimalen ännu vigtigare än vid dem med 7, emedan ett fel utgörande en viss bråkdel af den femte decimalen är större än ett fel utgörande samma bråkdel i den 7:de decimalen. Skälet till att Gernerth satt strecket igenom siffran i st. f. öfver eller under densamma är, att erfarenheten visat, att vid stereotypering kanten af stilen ofta blifvit så nött, att strecket försvunnit.

3. Vertikalkolumnernas antal är här 11, då andra tabeller ha 10. Öfverskriften i Gernerths tabeller är näml.:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Genom anordningen att ha en vertikalkolumn med öfverskriften 10 blir den sista logaritmen i en rad lika med den första logaritmen i den följande raden. På detta sätt underlättas subtraktionen, då man vill söka skilnaden mellan logaritmen för ett tal i tabellen, hvilket slutas på noll, och logaritmen för det närmast föregående talet.

4. Den trigonometriska tabellen innehåller logaritmerna för hvar 10:de sekund, då deremot andra 5-siffriga tabeller ha dem blott för hvar 30:de sekund eller för hvar minut. Härigenom uppgår hos Gednerth skilnaden mellan 2 på hvarandra följande logaritmer från och mer

3^0 till och med 87^0 till endast 41, under det i andra dylika tabeller uppgår till 3 gånger eller 6 gånger så mycket. För att kunna väl interpolera mellan logaritmerna för vinklar under 3^0 har utgifvaren nederst på hvarje sida af tallogaritmerna de bekanta, men ej lika mycket använda S- och T-tabellerna.

5. För att vid interpolering kunna fästa afseende på om sista siffran i den ena af 2 på hvarandra följande logaritmer är genomstruken men i den andra ej, har förf. bland partes proportionales upptagit som skilnad mellan 2 på hvarandra följande logaritmer skrifna såsom hela tal ej allenast denna skilnad sådan den omedelbart visar sig, utan ock samma skilnad ökad eller minskad med $0{,}5$. Så t. ex. är skilnaden mellan de på hvarandra följande logaritmerna 30103 (sista 3:an genomstruken) och 30125 (5:an genomstruken) lika med 22, men skilnaden mellan 30125 (5:an genomstruken) och 30146 (6:an ej genomstruken) $= 21{,}5$. Skilnaden mellan de på hvarandra följande logaritmerna 30168 (8:an genomstruken) och 30190 (nollan genomstruken) är $21{,}5$. Skälet härtill är att enligt denna tabell dessa logaritmer kunna läsas och skrifvas på följande sätt.

30 102 750, 30 124 75, 30 146 25, 30 168 25, 30 189 75.

6. Förf. har på 2 sidor upptagit en hjelptabell, förmedelst hvilken man kan sjelf räkna ut de vanliga tallogaritmerna med 15 decimaler.

7. Slutligen har utgifvaren en tabell utvisande båglängder, en utvisande korderna för bågarne och en för vissa konstanter.

Det torde bli svårt att påträffa en tabell, der man som i denna kan med ”*minimum af tid åstadkomma maximum i noggranhet*” (utgifvarens ord i företalet).

Warberg i Augusti 1870.

F. W. H.

Nya böcker.

SILJESTRÖM, P. A. Samling af räkneexempel. Första häftet, innehållande 1100 exempel af de fyra räknesätten med hela tal. (Exemplen till stor del hemtade ur Sveriges officiela statistik). Stockholm 1870.

GERHARDT, C. J. Der Sammlung des Pappus von Alexandrien 1:es und 8:es Buch griechisch und deutsch Halle 1871. 7 rdr 40 öre.

Satser,

lösta i den skriftliga mogenhetsexamen v. t. 1870.*

A) Af en elev vid Stockholms högre elementarläroverk.

1. *Att konstruera ett paralelltrapezium, då dess ytinnehåll, afståndet mellan de paralella sidorna och samtliga vinklarne äro gifna.*

Gifvet: en yta $ABCDE$, en linie FG, samt fyra vinklar P, Q, R, S, hvilka äro så beskaffade, att $\wedge P + \wedge Q = 180^0$, och $\wedge R + \wedge S = 180^0$. $(\wedge Q > \wedge P, \wedge R > \wedge S)$.

Sökes: ett paralleltrapezium, hvars yta är $= ABCDE$, hvars höjd är $= FG$, och hvars fyra vinklar äro $= \wedge P$, $\wedge Q$, $\wedge R$, $\wedge S$.

Upplösning. Applicera till FG en rektangel $FGHI$, som är lika stor med figuren $ABCDE$; skär GF midtitu i T och HI i U. Sätt vid T mot TF en vinkel $= \wedge Q - 90^0$, och vid U mot UI en vinkel $= \wedge S - 90^0$; låt den genom T dragna linien träffa HG i M och FI i N, samt den genom U dragna linien GH i X och FI i O. Då är paralleltrapeziet $MXON$ den sökta figuren.

Bevis. $\wedge Q - 90^0 = \wedge FTN = \wedge ONM - 90^0$;
derföre
$$\wedge Q = \wedge ONM.$$
$$\wedge P + \wedge Q = 180^0 = \wedge ONM + \wedge NMX;$$
derföre
$$\wedge P = \wedge NMX.$$
På samma sätt bevisas, att
$$\wedge R = \wedge MXO, \text{ och } \wedge S = \wedge XON.$$
Vidare är tydligen
$$\Delta NFT = \Delta MTG,$$
och
$$\Delta OUI = \Delta XUH,$$
samt
$$\text{figuren } GHUONT = \text{figuren } GHUONT;$$
derföre
$$\text{rektangeln } GHIF = \text{figuren } MXON.$$
Men
$$\text{rektangeln } GHIF = \text{figuren } ABCDE,$$

---

* Jfr årg. 1870, sid. 141.

derföre

$$\text{paralleltrapeziet } MXON = \text{ figuren } ABCDE.$$

Således uppfyller paralleltrapeziet alla begärda egenskaper, då äfven FG tydligen är $=$ dess höjd, h. s. g. o. b.

Anm. 1. Om $\wedge P = \wedge Q = 90^0$, eller om $\wedge R = \wedge S = 90^0$, sammanfaller MN eller OX med FG eller HI, och, om båda fallen på samma gång inträffa, öfvergår paralleltrapeziet till en rektangel. Om $\wedge P = \wedge S$, öfvergår paralleltrapeziet till en parallelogram.

Anm. 2. Om $ABCDE = Y$, $FG = h$, $\wedge P = \alpha$, $\wedge R = \beta$, så blir

$$MN = \frac{h}{\operatorname{Sin} \alpha}, \quad XO = \frac{h}{\operatorname{Sin} \beta},$$

$$MX = \frac{2Y + h^2 (\operatorname{Cot} \alpha + \operatorname{Cot} \beta)}{2h},$$

samt

$$NO = \frac{2Y - h^2 (\operatorname{Cot} \alpha + \operatorname{Cot} \beta)}{2h}.$$

Vi finna häraf, att om

$$2Y = h^2 (\operatorname{Cot} \alpha + \operatorname{Cot} \beta),$$

$NO =$ lika med noll, d. v. v. N och O sammanfalla, samt paralleltrapeziet öfvergår till en triangel. Om deremot

$$2Y < h^2 (\operatorname{Cot} \alpha + \operatorname{Cot} \beta),$$

skära linierna hvarandra inom rektangeln, och problemet är omöjligt.

2. *Två koncentriska cirklar äro gifna. I den större skall en korda dragas så, att hon af den mindre cirkelns periferi delas i tre lika stora delar.*

Denna sats är tydligen endast ett enskildt fall af följande:

Två koncentriska cirklar äro gifna. Att i den större draga en korda så, att den del, som ligger inom den mindre cirkeln blir $\frac{1}{n}$ *af hela kordan.*

Gifvet: två koncentriska cirklar, hvilkas gemensamma medelpunkt är O.

Begäres: att i den större draga en korda så, att den del, som ligger inom den mindre cirkeln, blir $\frac{1}{n}$ af hela kordan.

Upplösning. Drag från O en linie efter behag, hvilken skär den mindre cirkeln i P och den större i S, samt utdragen den mindre ånyo i T. Tag medelproportionalen BC mellan SP och $\frac{n-1}{n+1} ST$, samt inpassa BC från S mot den mindre cirkelns periferi, hvilken den träffar i P'. Drag ut SP', till dess den ånyo skär den större cirkeln i V och den mindre i U. Då är SV den sökta kordan.

Bevis. $(SP')^2 = (BC)^2 = \frac{n-1}{n+1} . ST . SP = \frac{n-1}{n+1} . SU . SP'$;
derföre

$$SP' = \frac{n-1}{n+1} . SU,$$

eller

$$\frac{n+1}{n-1} SP' = SU,$$

och

$$SP' = SP',$$

derföre genom subtraktion

$$\frac{2}{n-1} . SP' = P'U,$$

eller

$$2SP' = (n-1)P'U,$$

och

$$PU = P'U,$$

derföre

$$2SP' + PU = nP'U;$$

men

$$2SP' + PU = SP' + PU + UV = SV,$$

derföre

$$SV = nP'U,$$

eller

$$\frac{1}{n} SV = P'U,$$

h. s. g. o. b.

Anm. 1. Om i denna sats n sättes 3, blir BC medelproportionalen SP och $\frac{3-1}{3+1} ST = \frac{1}{2} ST$.

Anm. 2. I det fall, då n är $= 3$, kan konstruktionen äfven utföras på följande sätt:

Upprita på OS en halfcirkel, som skär den mindre cirkeln i G; drag SG och upprita derpå en halfcirkel; om i denna från S en linie $SM = \frac{1}{3} SG$ inpassas, så är $GM =$ den del af kordan, som ligger inom den mindre cirkeln.

Anm. 3. Om $SO = R$, $OP = r$,
så blir

$$SV = \frac{2n}{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}(R^2 - r^2)},$$

$$PU = \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}(R^2 - r^2)},$$

$$SP = UV = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}(R^2 - r^2)}.$$

5. *Att upprita en triangel, då basen, skilnaden och förhållandet mellan de båda andra sidorna äro gifna.*

Gifvet: fyra linier m, n, AB, CD. $(m > n)$.

Begäres: att på CD såsom bas upprita en triangel så, att sidorna förhålla sig till hvarandra som $m : n$ och så, att deras skilnad är $= AB$.

Upplösning. Tag fjerde proportionalen EF till $(m - n)$, n och AB. Upprita på CD en triangel, hvars sidor äro EF, $EF + AB$. Låt denna triangel vara CDG. Då är CGD den sökta triangeln.

Bevis. $$(m - n) : n = AB : EF$$
derföre
$$m : n = (AB + EF) : EF;$$
men
$$AB + EF = CG,\ EF = DG,$$
derföre
$$m : n = CG : DG,$$
och
$$CG - EF = AB,$$
h. s. g. o. b.

Anm. Om $AB = d$, $CD = a$,
så blir

$$DG = \frac{nd}{m-n},\ CG = \frac{md}{m-n},$$

$$\text{Cos}\, G = \frac{d^2(m^2 + n^2) - a^2(m-n)^2}{2mnd^2},$$

$$\text{Cos}\, C = \frac{d^2(m+n) + a^2(m-n)}{2mad},$$

$$\text{Cos}\, D = \frac{a^2(m-n) - d^2(m+n)}{2nad}.$$

B) Af en yngling (G. F. E—N) vid Örebro högre elementarläroverk.

3. *Bevisa, att, om man i en qvadrat åt samma led förenar hvarje sidas ena ändpunkt med midtpunkten på närliggande sida, så uppstår en ny qvadrat, hvars yta är $\frac{1}{5}$ af den gifna qvadratens yta.*

Låt $ABCD$ vara den uppgifna qvadraten. Om jag då från vinkelspetsarne A, B, C, D till sidornas midtpunkter G, H, E, F drager räta linier $AMNG$, $BNOH$, $COLE$, $DLMF$, skall figuren $LMNO$ blifva en qvadrat, som är $= \frac{1}{5}\ ABCD$.

Bevis. $FB \,//$ och $= DH$, alltså $FD \,//$ och $= BH$.

$AE \,//$ och $= CG$, alltså $AG \,//$ och $= EC$. Fig. $LMNO$ är derför en parallelogram.

$$\Delta\, ABG \cong \Delta\, DAF, \text{ alltså } \wedge\, FAM = \wedge\, ADF;$$

men

$$\wedge\, AFD \text{ är gemensam för } \Delta\Delta\, FAM \text{ och } ADF,$$

alltså

$$\wedge\, DAF = \wedge\, AMF = \wedge\, LMN.$$

$\wedge\, DAF$ är rät, alltså blir parallelogrammen $LMNO$ en rektangel.

Eftersom

$$DF \,//\, BH \text{ och } AG \,//\, EC,$$

blir

$$AM : MN = AF : FB \text{ och } BN : NO = BG : GC;$$

men

$$AF : FB = BG : GC;$$

alltså

$$AM : MN = BN : NO.$$

AM och BN äro lika stora, emedan $\Delta\, AFM \cong BGN$.

MN blir således $= NO$ och rektangeln $LMNO$ en qvadrat.

Eftersom

$$\wedge\, ANB \text{ är rät},$$

blir

$$AB \text{ qv.} = AN \text{ qv.} + BN \text{ qv.}$$

$$AN \text{ qv.} = 4\, MN \text{ qv., emedan } AN = 2\, MN,$$

och

$$BN \text{ qv.} = MN \text{ qv., emedan } BN = MN.$$

Alltså blir

$$5 \times \text{qvadraten } LMNO = \text{qvadraten } ABCD$$

och

$$\text{qvadraten } LMNO = \tfrac{1}{5} \text{ af qvadraten } ABCD,$$

h. s. b.

6. *Två parallela linier skäras af en tredje. Konstruera en cirkel, som tangerar hvardera af dessa tre linier.*

Låt AB skära de parallela linierna AD och BC. Det begäres då att uppritа en cirkel, som tangerar alla tre linierna.

Skär $\wedge \wedge DAB$ och ABC midt itu och drag ifrån punkten F, der delningslinierna råkas, vinkelräta linier till D, E och C. Jag skall då bevisa, att F är medelpunkten till den begärda cirkeln.

Bevis. Eftersom AF är gemensam, $\wedge \wedge EAF$ och DAF gjorda lika stora och $\wedge \wedge AEF$ och ADF hvardera en rät, så bli $\Delta\Delta AEF$ och ADF kongruenta, och sidan $FE =$ sid. FD. Af samma orsak blir $FE = FC$. Om man derför tager F till medelpunkt och inritar en cirkel, hvars periferi går genom endera af punkterna D, E, C, så måste den ock gå genom de öfriga och tangera de tre gifna linierna; h. s. g.

Anm. Naturligtvis kan ännu en lika stor cirkel uppritas på andra sidan om AB.

C) Af en yngling (F. G—M) vid Örebro högre elementarläroverk.

4. *Inskrif i en gifven triangel en annan på samma gång likbent och rätvinklig, så att dess hypotenusa blir vinkelrät mot den gifna triangelns bas.*

Låt ABC vara den gifna triangeln. Drag från A mot BC en vinkelrät linie AD! Gör $DE = AD$, sammanbind A med E, dela AE midt itu i F, drag FC, som skär AB i G, drag HGK parallel med AE, $KL \,//\, AD$ och sammanbind G med L. Jag påstår då, att KGL är den begärda Δ.

Ty eftersom AE är $//$ HK och $AD \,//\, KL$, så äro $\Delta\Delta AED$ och KLH likformiga. Alltså är $\wedge KLH$ en rät, $HKL = \frac{1}{2}$ rät $\wedge$. KL och LH bli lika stora. Men

$$FA : FC = KG : GC;$$
$$\underline{FC : FE = GC : GH;}$$

alltså $FA : FE = KG : GH;$

alltså bli KG och GH lika stora.

$\Delta\Delta KGL$ och GLH bli kongruenta, alltså $\wedge KGL =$ en rät $\wedge$, $GLK = \frac{1}{2}$ rät $\wedge$, $GK = GL$. Således är ΔKGL den begärda triangeln, h. s. g.

Problemet är omöjligt, om $\wedge ABC$ är $< \frac{1}{2}$ rät eller $> \frac{3}{2}$ rät.

(Härefter har läraren tillagt orden: «Således kunna understundom, äfven i strängare mening, två trianglar, sådana som den begärda, inskrifvas i en gifven triangel«.)

D) Af en yngling (C. E. F—G) vid Örebro högre elementarläroverk.

7. *Tvenne icke koncentriska cirklar äro gifna. Att upprita en ny cirkel så, att den tangerar de båda gifna och har en gifven radie.*

Cirklarne CDP och EFQ äro gifna. Det begäres att upprita en cirkel, som tangerar dessa båda och har AB till radie.

Drag en radie i hvardera cirkeln och förläng dem med AB och upprita med dessa sammansatta linier till radier 2 nya cirklar med samma medelpunkt som de förra. Sammanbind deras skärningspunkt L med med medelpunkterna O och O_1.

Då blir $OL = OG$; OD är $= OC$; alltså blir $DL = CG = AB$.

På samma sätt bevisas att EL är $= AB$. Om då L tages till medelpunkt för en cirkel, hvars periferi går genom E, måste den äfven gå genom D och i dessa punkter tangera cirklarne.

Anm. För att problemet i detta fall skall vara möjligt, måste dubbla linien AB vara större än eller lika med den del af linien OO_1, som ligger utom båda cirklarne. I förra fallet finnas 2 sådana cirklar med sina medelpunkter i L och M.

Ligger deremot den ena cirkeln CF helt inom den andra EG, gifves äfven 2 cirklar, ifall den gifna radien $< \frac{1}{2} EC$, men $> \frac{1}{2} FG$. (Anm. E, C, O_1, O, F och G ligga alla på en och samma räta linie). Är den $= \frac{1}{2} EC$ eller $\frac{1}{2} FG$, gifves blott en; i öfriga fall ingen. Konstruktionen är densamma, blott man af den större cirkelns radie *afskär* den gifna.

Tangerar den ene cirkeln den andre innantill, tangeras de båda i deras egen tangeringspunkt af två andra och kunna dessutom liksom i förra fallet tangeras af två andra, som tangera, såsom i förra fallet, den ena cirkeln innantill, den andra utantill.

Skära de hvarandra, kunna de efter olika omständigheter tangeras af 2, 3, 4, 5, 6, 7 eller 8 cirklar, af hvilka 2 tangera utantill och de öfriga dels båda innantill, dels den ena innantill och den andra utantill.

8. *Tre räta linier äro gifna. Att dela den ena af dem i 3 delar, så att den första delen förhåller sig till den andra, som den andra till den tredje och som den andra gifna linien till den tredje gifna.*

Linierna A, B och C äro gifna. Det begäres att dela A i tre sådana delar a, b och c, att

$$a:b = b:c = B:C.$$

Sök på vanligt sätt tredje proportionalen till C och B, låt vara M; och skär sedan A i delarne a, b och c proportionelt mot M, B och C.

Eftersom då

$$a:b = M:B$$

och

$$M:B = B:C,$$

är äfven

$$a:b = B:C = b:c.$$

Alltså är äfven A skuren i det förhållande som begärdes.

E) Af hufvudläraren i matematik vid Örebro elementarläroverk. *

Sats 35. (Sid. 143, årg. 1870). "*Ett ur, hvars pendels reducerade längd är* 3,3 *fot vid fryspunkten, går rätt vid denna temperatur. Huru mycket drar sig uret på dygnet, om temperaturen hela tiden är* + 20° *C.*

Anm. Pendelämnets längdutvigdningstal för 1° C. är 0,00001; pendeln behandlas vid beräkningen såsom enkel enligt formeln

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

g antages till 33 fot".

* Vi kunna ej neka oss nöjet att införa den eleganta lösning, som denne lärare meddelat i sin granskning af en elevs skriftliga arbete vid mogenhets-skrifningen.

Låt n, t, l beteckna antalet oscillationer på ett dygn, tiden för en oscillation och reducerade pendellängden vid 0°, samt n_1, t_1, l_1 ... vid 20° samt x det antal sekunder, uret vid 20 grader utvisar såsom under dygnet förflutna.

Af

$$86400 : x = n : n_1 = t_1 : t = \sqrt{l_1} : \sqrt{l} = \sqrt{1{,}0002} : 1$$

erhålles

$$x = \frac{86400}{\sqrt{1{,}0002}} = 86391{,}36.$$

Uret drar sig således 8,64 sekunder efter på ett dygn.

Anm. Värdena på l och g behöfva således ej vid beräkningen användas.

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen v. t. 1870.

För latinlinien.

1. *Bevisa, att i en likbent triangel basens ändpunkter ligga på lika afstånd från sina motstående sidor.*

2. *En vinkel i en triangel är rät, spetsig eller trubbig, allteftersom den linie, hvilken förenar vinkelspetsen med motstående sidas midtpunkt, är lika med, större eller mindre, än hälften af denna sida.*

3. *Att upprita en triangel, då man känner dess ena höjd samt förhållandet mellan dess sidor.*

4. *Om i en rätvinklig triangel en af de spetsiga vinklarne är dubbelt så stor, som den andra, så är hypotenusan dubbelt så stor som triangelns minsta sida.*

5. *Tre cirklar och en determinerad linie äro gifna. Dela den gifna linien i tre delar, hvilka förhålla sig till hvarandra som cirklarnes areor!*

6. *En liksidig triangel är gifven. Att upprita en cirkel så, att de af triangelns sidor afskurna kordorna äro sidor i en i cirkeln inskrifven regulier sexhörning.*

7. *Att genom en gifven punkt lägga en cirkel så, att den tangerar 2 gifna räta linier.*

8. *Att till en cirkel draga en tangent, som gör en gifven vinkel med en gifven rät linie.*

---

9. Det finnes 2 tal, hvilka förhålla sig till hvarandra som 3 : 5 och hvilkas qvadrater adderade göra 1666. Hvilka äro dessa tal?

10. Tre man skola tillsammans gräfva ett dike af 1200 famnars längd. Den ene kan gräfva 70 famnar på 5 dagar, den andre 80 famnar på 6 dagar och den tredje 90 famnar på 7 dagar. Huru länge skola de arbeta tillsammans för att få diket färdigt?

11. Förhållandet mellan omkretsen och diametern i en cirkel angifves ganska noga genom ett sålunda beskaffadt bråk: täljare och nämnare äro tresiffriga; de båda sista siffrorna i täljaren äro lika; de båda första siffrorna i nämnaren äro lika; första siffran i täljaren är lika med den sista i nämnaren; summan af alla täljarens siffror är 13; summan af alla nämnarens siffror är 5; summan af täljaren och det tal, som bildas af nämnarens siffror, tagna i omvänd ordning, är 666. Hvilket är bråket?

12. Ytan af en rektangel är 25 qv.-tum, omkretsen är 22 tum. Huru stora äro sidorna?

13. En cirkel, hvars radie är 8 tum, tangeras utantill af 10 mindre, men sinsemellan lika stora cirklar, af hvilka hvar och en tangeras utantill af de båda närmast liggande. Huru stor är radien i hvar och en af dem?

14. Dela talet 36 i tre sådana delar, att summan af deras qvadrater gör 464 och en del öfverskjuter en annan med 4.

15. Finnes något värde på x, som satisfierar eqvationen

$$a + \sqrt{a^2 + x^2} = ax?$$

För reallinien.

16. Summan af afståndet från en punkt på basen i en likbent triangel till de två andra sidorna förändras icke med punktens läge.

17. Att omkring en gifven cirkel omskrifva en parallelogram, hvilkens area har en gifven storlek.

18. Höjderna AA_1, BB_1, CC_1 i triangeln ABC, hvilken som helst, äro bissectricer till vinklarne i triangeln $A_1 B_1 C_1$.

19. I en triangel är hvarje median, d. v. s. räta linie, som förenar en vinkelspets med midten af motstående sida, mindre än halfva summan af de båda sidor, som utgå från samma vinkelspets, och större än hälften af denna summas öfverskott öfver den tredje sidan.

20. Att i en gifven rektangel inskrifva en annan rektangel, likformig med en gifven.

21. Att upprita tre lika stora cirklar, som utantill tangera hvarandra två och två och innantill tangera en gifven cirkel.

22. En kon och en cylinder stå på samma bas. Konens höjd är dubbelt så stor som cylinderns. Huru förhålla sig baserna till hvarandra i den genom cylinderns andra bas stympade konen?

---

23. En andra grads eqvation af formen:

$$x^2 + ax + 2a = 0$$

har sin ena rot $= 6$. *Hvilken är eqvationen och hvilken är den andra roten?*

24. En legering innehåller 8 delar koppar och 2 delar zink; en annan 4 delar koppar och 6 delar zink. Huru mycket bör man taga af hvardera legeringen för att åstadkomma 12 ℔ vanlig messing, d. v. s. en legering, som innehåller 7 delar koppar och 3 delar zink?

25. En serie, som består af endast positiva termer, är så beskaffad, att summan af två på hvarandra följande termer, hvilka som helst, förhåller sig till den förste bland dem, som denne term förhåller sig till den andre. Seriens förste term är 1. Huru stor är summan af oändligt många termer i serien?

26. Man vill af messing förfärdiga en sats vigter, så att 1 ℔ blifver en solid och 1 fot hög cylinder, 2 ℔ en lika hög men ihålig och i båda ändarne öppen cylinder, hvari den förre kan inpassas, 3 ℔ en på samma sätt beskaffad cylinder, hvari den föregående kan inpassas o. s. v. Gif formlerna för beräkning af dimensionerna på en vigt af r ℔, och beräkna enligt dem dimensionerna på en vigt af 16 ℔.

Messingens sp.-vigt = 8,61. Vigten af 1 kub.-fot vatten = 61,522 ℔.

27. En rund stock är 30 fot lång, 1 fot i diameter i den ena och 7 tum vid den andra ändan; på hvilket afstånd från den smalare ändan bör den afsågas, för att blifva delad midt itu?

28. Bestäm tvänne sådana tal, att deras summa, deras produkt och skilnaden mellan deras qvadrater äro lika stora.

29. Uti en plan triangel äro 2 vinklar lika med $130^0\ 20'$ *och* $15^0\ 45'$ *samt mellantiggande sidan 25 fot; huru stora äro de emot de nämnda vinklarne stående sidorna?*

---

30. Tvänne elektriska strömmar leddes genom hvar sin af de båda sinsemellan lika och kring ringen på en tangentbussol lindade trådarne. När riktningen för de båda strömmarne var densamma, erhölls 40^0 *såsom utslagsvinkel hos bussolens nål; leddes strömmarne i motsatta riktningar, minskades vinkeln med* 10^0. *Huru förhöllo sig strömstyrkorna till hvarandra?*

31. Den ena väggen hos ett med vätska fyldt kärl är vertikal och utgöres af en rektangulär yta, som genom två diagonaler antages vara delad i fyra delar. I hvilka förhållanden stå vätsketrycken på de särskilda triangelytorna till hvarandra?

32. Från en och samma punkt falla under lika långa tider tvänne partiklar, den ena längs lodlinien, den andra längs ett lutande plan af gifven *lutning mot horizonten. Bestäm förhållandet mellan de båda tillryggalagda väglängderna, samt gif en geometrisk tolkning af svaret.*

33. Till hvilken temperatur, enligt Fahrenheits thermometer, måste en luftmassa afkylas, hvars ursprungliga volym vid 50^0 Cels. och 25 tums tryck är 5 kub.-fot, för att hon efter afkylningen må, ehuru trycket ökats med 2 tum, intaga blott $\frac{3}{4}$ af sin ursprungliga volym?

Luftens utvidgningskoeff. är enligt Cels. therm. 0,00367.

34. Ett glaskärl med lodräta väggar är fyldt med vatten och står på kanten af ett fensterbräde. Huru högt öfver horizonten måste solen befinna sig, för att mot vattenytan fallande solstrålarne skola efter brytningen träffa golfvet under en vinkel af 78^0?

Vi antaga dervid, att den vägg hos kärlet, hvilken ljusstrålarne skola genomgå, är vinkelrät mot det vertikalplan, hvari strålarne röra sig; att glasets brytning ej medtages i beräkningen och vattnets brytningsindex är $\frac{4}{3}$.

35. Hvilken lutning bör ett hustak hafva för att regnet skall rinna af på möjligast korta tid?

36. En gas är inpressad i ett kärl, hvars volym är V cubikfot. I en å kärlet anbragt öppen qvicksilfvermanometer är höjdskilnaden h tum; barometern visar B tum. Kärlet har ett med kran försedt utströmningsrör, och omkring detta är halsen af en större och ytterst mjuk, lufttom gummiblåsa fastknuten. Till hvilken volym sväller denna blåsa ut, när kranen öppnats och höjden h minskats, så att hon i beräkningen kan anses = 0.?

RÄTTELSER:

Sid. 150 rad. 14 nedifr. står: vara $= QO$, läs: vara $= QO'$

„ 160 sista raden „ noten ** under sid. 156, „ noten under sid. 157.

„ 161 rad. 5 nedifr. „ $(r - \varrho')^2$ „ $(\mathfrak{r} - \varrho')^2$

Planch. III. Fig. 1. Nedersta sidan af 5-hörningen ABC' skall vara signerad med BB'.

Fig. 4. I anteckningen derunder står: $TA = Tb$, läs: $TA = TB$.

Fig. 1.

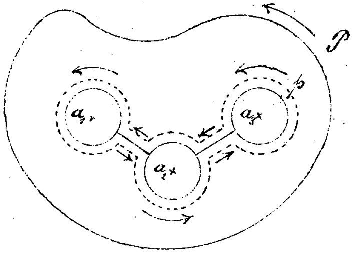


Fig. 2.

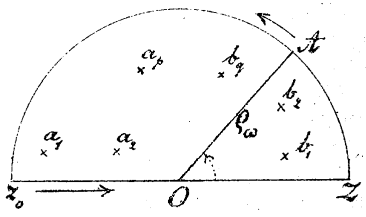


Fig. 3.

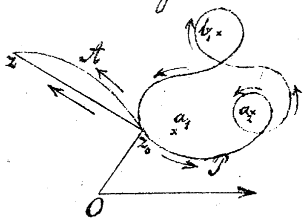


Fig. 4.

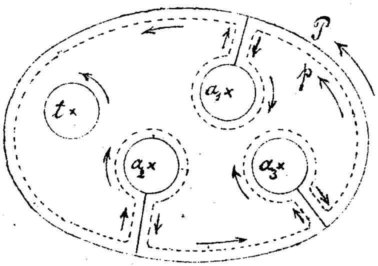


Fig. 5.

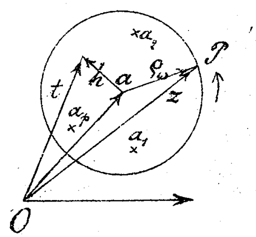


Fig. 6.

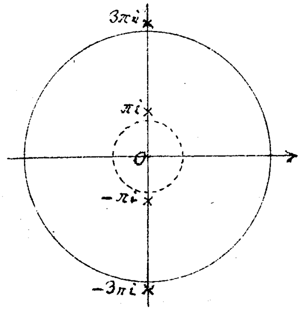


Fig. 7.

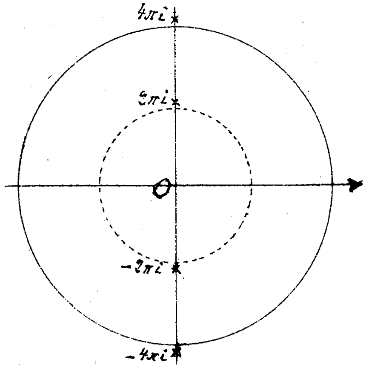
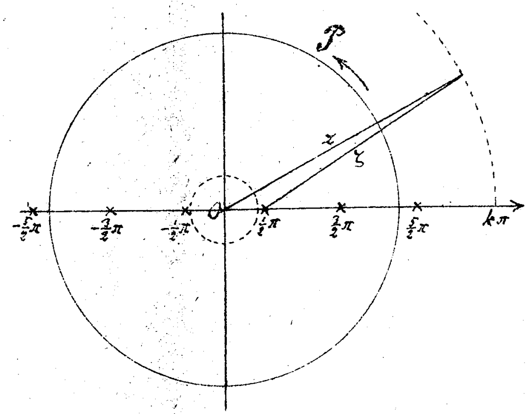


Fig. 8.



AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. Hultman.

(Forts. fr. sid. 12).

11. Nils Buddæus.*

Buddæi aritmetiska afhandlingar äro följande 5.

1. »Gymnasma arithmeticum de computatione numerorum integrorum» (om räkning med hela tal),
2. »Gymnasma arithmeticum fractionum doctrinam exhibens» (läran om bråk),
3. »Gymnasma arithmeticum de computatione comparata» (aritmetiska och geometriska serier, regula de tri m. m.),
4. »Gymnasma arithmeticum de extractione radicum») (om utdragning af qvadrat- och kubikrötter),
5. »Gymnasma arithmeticum logisticæ epitomen exhibens» (= logistica astronomica, räkning i ett talsystem der 60 är bas). Strengnäs 1646.

---

* Ur ”*Blad ur Örebro skolas äldsta historia*”, utgifne af lektor Karlsson och tryckte i Karol. läroverkets årsprogram 1871 meddela vi följande biografiska underrättelser.

Nils Svensson Buddæus Nericiensis, den tolfte af Örebro skolas rektorer, var född 1595 i Längbro socken vid Örebro; började sina studier

Buddæus skrifver kort och nyktert, ehuru nästan knapphändigt, så att arbetet ej är passande som lärobok. Det är mera lämpligt för att få en öfversigt af aritmetikens delar med dithörande regler, belyste med några få exempel.

---

vid 7 års ålder i Örebro skola, och har äfven studerat i Westerås. Blef prestvigd i Strengnäs 1623, skolans konrektor derstädes 1624 samt extraordinarie professor (lektor) i retorik och grekiska språket vid Strengnäs kollegium 1627. Reste derefter utomlands och besökte akademierna i Jena, Giessen, Olmütz och Basel. I Jena disputerade han *De Filio Dei* 1632. I Basel egnade han sig åt matematik och grekiska. Återkommen till Sverige efter en femårig utrikes vistelse, disputerade han i Uppsala *De Luce* och *De Methodo*, samt promoverades till magister 1633, blef rektor i Örebro 1635. I följd deraf att vederbörande egenmäktigt togo och till kyrkan använde ett till skollärarens underhåll anslaget testamente, kom han i häftig tvist med Örebro borgmästare och råd samt bestraffade deras orätträdighet i en predikan palmsöndagen 1637, hvilket ännu mer ökade oenigheten. Han trifdes derför icke här, utan lemnade Örebro omkr. 1638. Blef 1645 lektor i matematik i Strengnäs, hvilken syssla han bestridde i 4 år. Sedan han under de tre följande åren förestått grekiska lektionen, blef han såsom theologie lektor primarius prost och kyrkoherde i Öfver-Selö 1652. — Buddæus var besvärad af fallandesot, hvilken var orsaken till att han våren 1653, då han skulle fara öfver sjön till sin församling, drunknade mellan Strängnäs och Öfver-Selö.

Hans matematiska skrifter äro:

1) 5 afhandlingar i räkning (»gymnasmata arithmetica«), hvar och en utgör 8 små oktavsidor, tryckta i Strengnäs 1646.
2) 2 „ i geometri (»gymnasmata geometrica«), hvar och en utgör 8 små d:o, tryckta i Strengnäs s. å.
3) 2 „ i geografi (»gymnasmata geographica«), hvar och en utgör 8 små d:o, tryckta i Strengnäs s. å.
4) 4 „ i astronomi (»gymnasmata astronomica«), af hvilka den ena behandlar tidräkningen och upptager 80 sidor samt är tryckt i Strengnäs 1647.

Samtliga dessa finnas sammanförda i ett band under titeln: »Gymnasmata mathematica a Nicolao Buddæo Nericiensi. Strengnesiæ 1647«. Arbetet finnes på Riksbiblioteket i Stockholm och i Örebro läroverks bibliotek.

Så här ser hans multiplikationstabell ut:

1
2 4
3 6 9
4 8 12 16
5 10 15 20 25
6 12 18 24 30 36
7 14 21 28 35 42 49
8 16 24 32 40 48 56 64
9 18 27 36 45 54 63 72 81.

Äfven Buddæus har det ur Peter Lauremberg's* arbete hemtade exemplet om Fredrik II:s gädda.

Division definierar han som en upprepad subtraktion af ett och samma tal.

Bråk förenklar han genom att dividera täljare och nämnare flere gånger efter hvarandra med lämpliga tal, t. ex.

$$\frac{1134^2}{1512} \Big| \frac{567^3}{756} \Big| \frac{189^3}{252} \Big| \frac{63^3}{84} \Big| \frac{21^7}{28} \Big| \frac{3}{4}.$$

Detta sätt att förenkla bråk har förut användts endast af Biörk. Samtliga föregående utgifvare af räkneböcker förenkla enligt metoden för största gemensamma divisorn.

Det är egentligen genom sin femte afhandling, logistica sexagenaria eller astronomica, d. v. s. räkning i ett talsystem, der 60 är bas som Buddæus är intressant. Se här en kort redogörelse för denna räkning.

Enheten kallar han här för en grad ($\frac{1}{360}$ af en cirkel). Enheterna af högre ordning kallar han

sexagena prima = 60 grader,
„ secunda = 60 sexagenæ primæ (sextior af första ordningen),

---

* Peter Lauremberg citeras af Stjernhjelm i dennes astronomiska funderingar. Han var astronom samt professor i matematik och fysik i Hamburg. Blef sedan 1624 prof. i poesi i Rostock. Föddes derstädes 1585 och död 1639. Han har skrifvit åtskilliga astronomiska arbeten.

sexagena tertia = 60 sexagenæ secunda (sextior af andra ordningen),

o. s. v.

Enheter af lägre ordningen kallar han scrupula eller minuta, så att

1 grad = 60 scrupula prima (skrupler eller minuter af första ordningen),

1 scrupulum primum = 60 scrupula secunda (skrupler eller minuter af andra ordningen),

1 „ secundum = 60 scrupula tertia (skrupler eller minuter af tredje ordningen),

o. s. v.

Dessutom har han i vissa exempel en enhet, kallad signum (tecken) = 30 grader.

Anm. Benämningarne grader och tecken äro tagna från astronomien.

Följande exempel

$$12^{\mathrm{IV}}\ \ 13^{\mathrm{III}}\ \ 15^{\mathrm{II}}\ \ 22^{\mathrm{I}}\ \ 4^{\mathrm{s}}\ \ 28^{0}\ \ 23'\ \ 24''\ \ 15'''$$

utläses:

12 sextior af fjerde ordningen,
13 „ „ tredje,
15 „ „ andra,
22 „ „ första,
4 tecken,
28 grader,
23 minuter af första,
24 „ „ andra,
15 „ „ tredje ordningen.

Såsom exempel på Buddæi stil anföra vi hans redogörelse för multiplikation.

Multiplikations regel.

I. Hela multiplicerade med hela gifva hela. Så t. ex. får man 45^0 genom multiplikation af 15^0 med 3^0; likaledes genom multiplikation af 9^{0} med 7^{0} erhålles 63^{0}, d. v. s. en sextia af första ordningen och 3^{0}.

II. Hela multiplicerade med skrupler gifva skrupler. Så t. ex. frambringa 6^{0} gånger $8'$ $48'$.

III. Sextior af första och andra ordningen multiplicerade med hvarandra gifva sextior af tredje ordningen. Så t. ex. göra 5^{I} gånger 4^{II} 20^{III}.

Ex. Man skall multiplicera 21^{0} $59'$ $16''$ $40'''$ med 19^{0} $36'$.

Buddæus utför räkningen sålunda:

$$\begin{array}{r}
21^{0}\ 59'\ 16''\ 40''' \\
19^{0}\ 36' \\
\hline
24'''\ 0'''' \\
9-36\quad\quad \\
35-24\quad\quad\quad\quad \\
12-36\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
\\
12-40\quad\quad \\
5-4\quad\quad\quad\quad \\
18-41\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
6-39\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
7^{\mathrm{I}}\ 10^{0}\ 57'\ 50''\ 40'''\ 0''''
\end{array}$$

Vid division förfar Buddæus fullkomligt rigtigt, då han säger: »om skrupler divideras med andra skrupler som äro på samma afstånd från den hela, uppkommer hela; men äro de på olika afstånd, subtraheras divisorns karakter från dividendens, och resten angifver qvotens karakter m. m.» — Som vi erinra oss, var Biörcks divisions regel i detta fall ej rigtig.

Någon decimalräkning eller algebra finnes ej i Buddæi lärobok.

Buddæi arbete visar, att förf. varit en lärd och grundlig man.

Satserna 19—21 (F. W. Hultman), löste af student O. I. STENBORG från Haparanda.

19. Hänför klotet $AOBC$ till ett rätvinkligt axelsystem, hvars origo är hörnet O, der a, b_1 och b_2 sammanträffa; låt basytan BOC infalla på XY-planet och kantlinien OB eller b_1 på X-axeln.

Den vinkel φ, som sidoplanet OAB gör med basplanet OBC, bestämmes enligt sferiska trigonometrien genom formeln

$$\operatorname{Cos} \varphi = \frac{\operatorname{Cos} AOC - \operatorname{Cos} AOB \,.\, \operatorname{Cos} BOC}{\operatorname{Sin} AOB \,.\, \operatorname{Sin} BOC}.$$

Sedan vinkeln φ blifvit känd, erhåller man lätt eqvationerna på pyramidens fyra begränsningsplan. De blifva för basytan BOC:

$$z = 0,$$

för ytan AOB:

$$y - z \operatorname{Cot} \varphi = 0,$$

för ytan AOC:

$$x - y \operatorname{Cot} BOC + z \,.\, \frac{\operatorname{Cot} BOC \,.\, \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cot} AOB}{\operatorname{Sin} \varphi} = 0,$$

samt för ytan ABC:

$$x + \frac{b_1 - b_2 \operatorname{Cos} BOC}{b_2 \operatorname{Sin} BOC} \,.\, y$$

$$+ \frac{b_1 b_2 \operatorname{Sin} BOC - a b_2 \operatorname{Cos} AOB \operatorname{Sin} BOC - a \operatorname{Sin} AOB \operatorname{Cos} \varphi (b_1 - b_2 \operatorname{Cos} BOC)}{a b_2 \operatorname{Sin} AOB \operatorname{Sin} BOC \operatorname{Sin} \varphi} \,.\, z - b_1 = 0;$$

eller kortare:

$$z = 0,$$

$$y + q_1 z = 0,$$

$$x + p_2 y + q_2 z = 0,$$

$$x + p_3 y + q_3 z - b_1 = 0.$$

Kalla koordinaterna till klotets medelpunkt för α, β och γ. Emedan klotets radie ($= r$) är lika med medelpunktens afstånd från hvart och ett af de 4 nämnda planen, har man eqvationerna

$$r = \gamma = \frac{\beta + q_1\gamma}{\sqrt{1+q_1^2}} = \frac{\alpha + p_2\beta + q_2\gamma}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}} = \frac{\alpha + p_3\beta + q_3\gamma - b_1}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}}.$$

Då α, β och γ härur elimineras, finner man:

$$r = \frac{-b_1}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}-\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}+(p_2-p_3)(\sqrt{1+q_1^2}-q_1)+q_2-q_3}.$$

20. Emedan detta klot skall tangera samma ytor, som det i föregående problem afhandlade, men ytan $z = 0$ på motsatta sidan, så är det klart, att medelpunktskoordinaterna α', β', γ', äfvensom radien r', kunna bestämmas ur samma formler, om blott man i st. f. $r = \gamma$ insätter $r' = -\gamma$, emedan γ' här är negativt. Man har alltså:

$$r'_0 = -\gamma' = \frac{\beta' + q_1\gamma'}{\sqrt{1+q_1^2}} = \frac{\alpha' + p_2\beta' + q_2\gamma'}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}} = \frac{\alpha' + p_3\beta' + q_3\gamma' - b_1}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}}.$$

Häraf erhålles:

$$-r_1 = \frac{b_1}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}+(p_2-p_3)(\sqrt{1+q_1^2}+q_1)-\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}-q_2+q_3}.$$

21. Klotets eqvation i ett rätvinkligt axelsystem är

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2.$$

Medelpunktskoordinaterna α, β, γ äfvensom radien R bestämmas af de fyra eqvationer, som erhållas genom att låta denna eqvation satisfieras af koordinaterna för pyramidens fyra spetsar O, B, C, A. Begagnar man samma axelsystem och figur som i de båda föregående satserna, så blifva dessa koordinater respektive:

$$\begin{pmatrix} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = b_1 \\ y = 0, \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = b_2 \operatorname{Cos} BOC = x' \\ y = b_2 \operatorname{Sin} BOC = y' \\ z = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = a \operatorname{Cos} AOB = x_2 \\ y = a \operatorname{Sin} AOB \operatorname{Cos} \varphi = y_2 \\ z = a \operatorname{Sin} AOB \operatorname{Sin} \varphi = z' \end{pmatrix}.$$

Det första systemet (punkten 0) gifver:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2,$$

hvilken eqvation subtraherad från klotets eqvation lemnar som eqvation på klotet:

$$x(x-2\alpha) + y(y-2\beta) + z(z-2\gamma) = 0.$$

Insättas i denna eqvation i st. f. x, y, z punkten B^s_- koordinater, finner man:

$$\alpha = \frac{b_1}{2}.$$

Punkterna C^s_- och A^s_- koordinater gifva:

$$\beta = \frac{x'^2 + y'^2 - b_1 x'}{2y'},\ \gamma = \frac{x_2^2 y' + y_2 y'(y_2 + y') - b_1(x_2 y' + x' y_2) + y_2 x'^2 + y' z'^2}{2y' z'}.$$

Vidare har man

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Annan lösning af satserna 19 och 20, lemnad af F. W. HULTMAN.

19. Kalla B_1 ytan af det sidoplan, hvars bas är b_1,
B_2 „ „ „ „ b_2,
B_3 „ „ „ „ b_3,
B_4 „ af bottenplanet,
r radien i det inskrifna klotet,
h pyramidens höjd mot bottenplanet B_4.

Tänker man sig klotets medelpunkt såsom spets för fyra pyramider, hvilka hafva pyramidens bottenplan och 3 sidoplan till baser, och iakttager man, att summan af dessa fyra pyramider är lika med hela pyramiden, så finner man sambandet:

$$\frac{B_1 r}{3} + \frac{B_2 r}{3} + \frac{B_3 r}{3} + \frac{B_4 r}{3} = \frac{B_4 h}{3},$$

således

$$r = \frac{B_4 h}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Värdena på B_1, B_2, B_3, B_4 känna vi ur planimetrien. Så är t. ex.

$$B_4 = \sqrt{p(p-b_1)(p-b_2)(p-b_3)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + 2b_2 b_3 - b_1^4 - b_2^4 - b_2^4},$$

hvarest

$$2p = b_1 + b_2 + b_3 .$$

Återstår att finna uttrycket på h.

För detta ändamål sammanbinda vi fotpunkten af h med basens 3 spetsar genom linierna S_1, S_2 och S_3. Vi erhålla då följande samband:

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= h^2 - a_1^2 ,\\ S_2^2 &= h^2 - a_2^2 ,\\ S_3^2 &= h^2 - a_3^2 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Allt inskränker sig till att finna ett samband mellan S_1, S_2, S_3 och kända storheter.

Sätta vi α = vinkeln mellan S_2 och S_3,
β = „ „ S_1 och S_3,
γ = „ „ S_2 och S_2,

så är

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{S_2^2 + S_3^2 - b_1^2}{2S_2 S_3},$$

$$\operatorname{Cos} \beta = \frac{S_1^2 + S_3^2 - b_2^2}{2S_1 S_3},$$

$$\operatorname{Cos} \gamma = \frac{S_1^2 + S_2^2 - b_3^2}{2S_1 S_2}.$$

Som nu tillika

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

och således

$$\operatorname{Cos} \gamma = \operatorname{Cos} (\alpha + \beta) = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta ,$$

erhålles, genom att i denna sista eqvation införa de nyss funna värdena på $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Cos}\beta$, $\operatorname{Cos}\gamma$ och de deraf härledda värdena på $\operatorname{Sin}\alpha$ och $\operatorname{Sin}\beta$, efter verkställda förenklingar:

$$\left.\begin{aligned} &b_1^2 b_2^2(S_1^2+S_2^2) + b_1^2 b_3^2(S_1^2+S_3^2) + b_2^2 b_3^2(S_2^2+S_3^2) - b_1^4 S_1^2 - b_2^4 S_2^2 - b_3^4 S_3^2 - b_1^2 b_2^2 b_3^2 \\ &- b_1^2(S_1^2 - S_2^2)(S_1^2 - S_3^2) - b_2^2(S_2^2 - S_1^2)(S_2^2 - S_3^2) - b_3^2(S_3^2 - S_1^2)(S_3^2 - S_2^2) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Denna eqvation innehåller sambandet mellan en triangels tre sidor b_1, b_2, b_3 och afstånden S_1, S_2, S_3 från en punkt hvilken som helst i triangelns plan till dess 3 spetsar.

Insätter man här värdena på S_1^2, S_2^2, S_3^2 ur (2) och derefter löser eqvationen i afseende på h, erhåller man;

$$h = \frac{\sqrt{b_1^2 b_2^2(a_1^2+a_2^2)+b_1^2 b_3^2(a_1^2+a_3^2)+b_2^2 b_3^2(a_2^2+a_3^2)-b_1^4 a_1^2-b_2^4 a_2^2-b_3^4 a_3^2-b_1^2 b_2^2 b_3^2-b_1^2(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)-b_2^2(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)-b_3^2(a_3^2-a_1^2)(a_3^2-a_2^2)}}{4B_4} \quad ..(4$$

Som vi se, är expressionen under rotmärket i täljaren alldeles densamma som högra ledet af eqvationen (3), om man der utbyter S_1^2, S_2^2, S_3^2 mot a_1^2, a_2^2, a_3^2. Emedan för klotets volym V gäller likheten

$$V = \frac{hB_4}{3} = \frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4^1),$$

följer att ofvanstående långa rotuttryck är lika med 12 gånger pyramidens volym. För korthetens skull sätta vi derföre i det följande $12V$ i st. f. det långa rotuttrycket.

Införes i (1) värdet på h ur (4), finna vi slutligen:

$$r = \frac{3V}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

hvarest, såsom nyss är nämndt, värdet på V finnes ur (4^1).

20. Antag, att man vill bestämma radien r_4 till det klot, som tangerar pyramidens bas B_4 utantill. Den egenskapen — att den gifna pyramiden är lika med summan af de 3 pyramider, hvilka hafva sina spetsar i klotets medelpunkt och till baser pyramidens sidoytor, om man från denna summa borttager en pyramid, som till bas har den gifna pyramidens bas och till spets klotets medelpunkt, — gifver eqvationen:

$$\frac{B_1 r_4}{3} + \frac{B_2 r_4}{3} + \frac{B_3 r_4}{3} - \frac{B_4 r_4}{3} = \frac{B_4 h}{3}$$

och således, på grund af (4[1]) föregående sats,

$$r_4 = \frac{3V}{B_1 + B_2 + B_3 - B_4}$$

På samma sätt finnas värdena på de tre öfriga radierna r_1, r_2, r_3.

Genom jemförelse mellan värdena på dessa fyra radier och det i föregående sats funna värdet på radien (r) af det i pyramiden inskrifna klotet finner man:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{r}.$$

Sats 53 (C. F. Lindman), löst af Knut Wicksell.

Att geometriskt och trigonometriskt bestämma en triangel, då man känner två af hans sidor samt att den enas motstående vinkel är dubbelt så stor som deras mellanliggande vinkel.

Låt triangeln vara ABC der sidan $AC = b$ och sidan $BC = a$ äro bekanta och der $\wedge B$ är $= 2\wedge C$. Vi förlänga CB till D, så att BD blir $= BA$ och sammanbinda D med A.

Nu är $BA = BD \therefore \wedge D = \frac{1}{2}\wedge ABC = \wedge C \therefore AD = a.$

Vidare emedan $\wedge D$ är gemensam och $\wedge DAB = \wedge C$ så är

$$CD : AD = AD : DB \quad \therefore \overline{AC}^2 = CD \,.\, DB\,.$$

För att upplösa problemet är det tydligen tillräckligt att finna D, hvilket nu lätt sker sålunda:

Sätt CA i rät vinkel mot CB, skär CB midt i tu i M och drag, med M som medelpunkt, genom A en cirkel, som skär CB utdragen i D. Nu är $\overline{AC}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{MC}^2 = CD.DB$ (II: 6), hvilket tydligen visar, att den erhållna punkten D är den rätta.

För att erhålla formeln för $AB = c$, kunna vi begagna oss af eqv. $\overline{AC}^2 = CD \,.\, DB$, som omedelbart ger

$$DB = AB = c = \tfrac{1}{2}(\sqrt{4b^2 + a^2} - b),$$

hvarefter ytan, då alla tre sidorna äro kända, på vanligt sätt kan beräknas.

Om vi göra $a = b$, så fås $c = \frac{a}{2}\sqrt{5} - 1)$, hvilket tydligen är uttrycket på basen i en likbent triangel, der hvardera vinkeln vid basen är dubbelt så stor, som den vid spetsen; eller uttrycket på sidan i en regulier 10-hörning hänfördt till den omskrifna cirkelns radie.

Sats 58 (E. Lundberg), löst af Knut Wicksell.

De räta linier, som sammanbinda en triangels vinkelspetsar med de punkter, der en triangels sidor tangeras af den inskrifna cirkeln, råkas i en punkt.

Om D, E, F äro tangeringspunkterna för den i $\triangle ABC$ inskrifna cirkeln så måste, emedan två tangenter dragna från samma punkt till en cirkel äro lika stora, AD vara $= AF$, $BD = BE$ och $CE = CF$. Vi draga AE och CD hvilka skära hvarandra i O, nedfälla från A och C, AP och CQ vinkelrätt mot BC och BA och från O OM ock ON vinkelrätt mot AP och CQ samt draga BO. Det bör nu bevisas att BO träffar AC i F.

$\triangle CDB = \frac{1}{2} CQ \,.\, DB$, $\triangle BOD = \frac{1}{2} NQ \,.\, BD \therefore \triangle COB = \frac{1}{2} NC \,.\, BD$.

På samma sätt är

$$\triangle AOB = \tfrac{1}{2} MA \,.\, BE.$$

Nu är

$$BD = BE \text{(Hyp.)} \quad \therefore \quad \triangle AOB : \triangle COB = MA : NC.$$

$$\triangle CDA = \tfrac{1}{2} CQ \,.\, QA$$

och

$$\triangle ODA = \tfrac{1}{2} NQ \,.\, DA \quad \therefore \quad \triangle COA = \tfrac{1}{2} CN \,.\, DA.$$

På samma sätt är

$$\triangle COA = \tfrac{1}{2} AM \,.\, EC.$$

Således är

$$CN \,.\, DA = AM \,.\, EC \quad \therefore \quad AM : CN = DA : EC.$$

Följaktligen är

$$\triangle BOA : \triangle BOC = DA : EC.$$

Om vi utdraga BO och låta den skära AC i S, så är det naturligt (då $\triangle COB : \triangle COF = BO : OF = \triangle BOA : \triangle OAF$) att

$$\triangle BOC : \triangle BOA = \triangle BSC : \triangle BSA = CS : SA.$$

$SC : AS$ är följaktligen $= CE : AD = CF : FA$ (Hyp.)

$$\therefore \quad CS : CA = CF : CA \quad \therefore \quad CS = CF.$$

F och S sammanfalla då och linien BO går följaktligen genom F. H. s. b.

Satserna 211, 213 (C. B. S. Cavallin), lösta af student C. F. Lemke.

211. Enligt sats 150 af Todhunters Geom. Öfningss. (F. W. Hultman, 2:dra uppl.) följer att:

$$a^2 + b^2 = 2\left[m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] \quad \text{eller} \quad \frac{a^2 + b^2}{2} = m_c^2 + \frac{c^2}{4},$$

$$a^2 + c^2 = 2\left[m_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \quad \text{eller} \quad \frac{a^2 + c^2}{2} = m_b^2 + \frac{b^2}{4},$$

$$b^2 + c^2 = 2\left[m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{eller} \quad \frac{b^2 + c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Adderas eqvationerna, så blir:

$$a^2 + b^2 + c^2 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Multiplicera med 4 och man får:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

213. Låt ABC vara en liksidig $\triangle$, h = höjden och a = sidan i densamma.

Punkten D ligger antingen mellan $\triangle$:s två sidor förlängda bortom den tredje sidan, eller mellan dem förlängda åt deras skärningspunkt till, eller på sjelfva förlängningen af någon sida. Kalla perpendiklarne mot de båda sidorna $n_{,}$ och $n_{,,}$ samt perpendikeln mot den tredje sidan $n_{,,,}$, och man finner att i 1:sta händelsen $h = n_{,} + n_{,,} - n_{,,,}$,

2:dra „ $h = n_{,,,} - (n_{,} + n_{,,})$,

3:dje „ h = skilnaden mellan de *båda* perpendiklarne, som då uppkomma.

Första händelsen.

Sammanbind D med $\triangle$:s tre spetsar.

Nu är ytan af figuren $ABCD$ = summan af $\triangle\triangle$:s, ABD och CBD, ytor. Tages $\triangle ACD$ bort på båda ställen, så blir

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle CBD - \triangle ACD$$

eller på annat sätt uttryckt:

$$\frac{ha}{2} = \frac{n_{,}a}{2} + \frac{n_{,,}a}{2} - \frac{n_{,,,}a}{2} \quad \because \quad h = n_{,} + n_{,,} - n_{,,,},$$

hvilket skulle bevisas.

Samma konstruktion och bevis användas ock vid de andra händelserna.

Satser af student C. F. Lemke.

För 7:de klassens latinlinie eller 6:te klassens reallinie.

241. Två cirklar tangera hvarandra innantill, och deras diametrar, dragne från tangeringspunkten, hafva sina ändpunkter, den mindre i A, den större i B. Dragas tangenter till den mindre cirkeln genom A och B, så att den förra tangenten skär den större cirkeln i C, och den senare råkar den mindre cirkeln i D och B sammanbindes med C, så är $BC = BD$.

242. Om man kring en triangel omskrifver en annan genom att draga räta linier parallela med hvar sin midtellinie åt samma håll som dessa genom triangelns vinkelspetsar, så är den nybildade triangelns

a) sidor skurne i 3 lika stora delar af den andres spetsar och midtellinier, om dessa utdragas,

b) omkrets = 2 gånger summan af midttellinierna,

c) ytan = 3 gånger den ursprungliga triangelns.

423. Om man från en godtycklig punkt i en regulier mångkörning nedfäller perpendiklar mot alla sidorna, så är aritmetiska mediet af alla dessa perpendiklars längder = radien till den inskrifna cirkeln.

244. Visa att höjden i en liksidig triangel är = 3 gånger radien till den inskrifna cirkeln och = $1\frac{1}{2}$ gång radien till den omskrifne.

245. Att konstruera en triangel, då dess 3 midtellinier äro gifne.

Satser af student C. B. S. Cavallin.

246. Bland alla trianglar, som stödja sina spetsar på tre gifna cirklar är summan af qvadraterna på alla sidorna störst eller minst i de trianglar för hvilka de genom stödjespetsarne förlängda radierna skära hvarandra i triangelns tyngdpunkt.

247. Om tre cirklar äro så belägna, att en rät linie hvilken som helst, som skär två af dem, icke råkar den tredje, så är bland de trianglar, som stödja sina vinkelspetsar på hvar och en af dessa cirklar den triangelns

a) yta ett minimum eller maximum för hvilken de genom stödjepunkterna gående radierna eller deras förlängningar blifva höjder i triangeln;

b) perimeter ett minimum eller maximum för hvilken de genom stödjepunkterna gående radierna eller deras förlängningar blifva bissectricer till triangelns vinklar.

248. Om i en tetraeder summan af qvadraterna på de kanter, som mötas i en spets, betecknas med S^2, afståndet mellan denna spets och motstående gränsytas tyngdpunkt med R, samt summan af qvadraterna på denna gränsytas kanter med S_1^2, så är

$$S^2 = 3R^2 + \tfrac{1}{3}S_1^2 .$$

249. Visa äfven att, om L^2 är summan af qvadraterna på de linier, som från tyngdpunkten dragas till pyramidens hörn, så är

$$S = 2L .$$

250. Visa att summan af qvadraterna på de linier, som från någon punkt dragas till hörnen af en tetraeder är minst då punkten är tetraederns tyngdpunkt.

---

251. **Att finna en sådan punkt, att summan af dess afstånd från tre gifna punkter är ett minimum.*

För det första är tydligt, att den sökta punkten måste ligga i samma plan som de gifna och för det andra, att den icke kan vara belägen utom den triangel, som bestämmes af de gifna punkterna.

Låt A, B och C utmärka de gifna punkterna samt P den, som sökes.

Vi skola först bevisa, att om P kan ligga inom $\triangle ABC$, så kunna icke de cirklar, som hafva respektive A, B och C till medelpunkter samt AP, BP och CP till radier, skära sidorna BC, AC och AB.

Ty antag t. ex. det vore möjligt, att cirkeln med A till medelpunkt och AP till radie skure sidan BC i punkten P'.

Enligt antagandet måste då

$$AP + BP + CP < BC + AP'$$

eller, emedan $AP = AP'$,

---

* Denna uppgift finnes löst i Matematisk Tidskrift af Tychsen för år 1859 sid. 75 (af F. B.), sid. 170 af Thiele, samt för 1862 sid. 41 af Tychsen, samt i Todhunters Differential Calculus sid. 236.

$$PB + CP < BC,$$

hvilket är omöjligt.

Vi stödja vår lösning på följande kända teorem:

Om AB är en determinerad rät linie, helt och hållet belägen utom en gifven cirkel, hvars medelpunkt är O, och C en punkt på dess periferi, så är $AC + BC$ minimum, när OC delar $\wedge ACB$ midt i tu, och C ligger alltid på den båge, som afskäres af AO och BO, tagna determinerade.

Vi öfvergå då till lösningen af det framstälda problemet och antaga först, att P, om det är möjligt, ligger inom $\triangle ABC$.

Om AP antages känd till sin storlek, så måste enligt det föregående den cirkel, som har A till medelpunkt och AP till radie, ligga utom BC och, enligt hjelpsatsen, på den båge, som AC och AB afskära deraf, och tillika i den punkt, för hvilken förlängningen af AP skär $\wedge BPC$ midt i tu. Af likadana skäl måste förlängningarne af BP och PC skära midt i tu $\wedge APC$ och $\wedge APB$.

Betecknas de punkter, der AP, BP och CP skära sidorna BC, AC och AB, med α, β och γ, har man sålunda:

$$\wedge BP\alpha = \wedge CP\alpha = \wedge AP\gamma = \wedge BP\gamma = \wedge CP\beta = \wedge AP\beta$$

eller

$$\wedge BPC = \wedge APC = \wedge APB = 120^\circ.$$

Vi hafva således funnit, att P ligger inom $\triangle ABC$ så ofta det finnes någon punkt, som uppfyller det sista vilkoret.

Att detta vilkor alltid är uppfyllt så länge triangeln är spetsvinklig, blir tydligt deraf, att cirkelbågar uppritade inåt på två sidor, t. ex. AB och AC, skära hvarandra. Ökas $\wedge BAC$, så närmar sig skärningspunkten mer och mer till A och sammanfaller dermed, när $\wedge BAC = 120^\circ$. Förstoras $\wedge BAC$ utöfver 120°, förlorar ofvanstående lösning sin giltighet.

Vi sätta i detta fall $\wedge BAC = 120^\circ + v$, höjden mot $BC = h_a$ och sidorna $= a$, b och c.

Är $\wedge BAC > 120^0$, måste P ligga på triangelns perimeter, emedan uppgiften är af den natur, att den alltid måste ega en lösning. Vi antaga att, om möjligt, P ligger på sidan BC. Det är då tydligt, att, om detta vore fallet, P ligger i fotpunkten af h_a.

Enligt antagandet är då

$$a + h_a < b + c$$

eller

$$\sqrt{b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}(120^0+v)} + \frac{bc\operatorname{Sin}(120^0+v)}{\sqrt{b^2+c^2-2ab\operatorname{Cos}(120^0+v)}} < b+c.$$

Qvadreras detta uttryck, så blir

$$b^2 + c^2 - 2bc\operatorname{Cos}(120^0+v) + 2bc\operatorname{Sin}(120^0+v)$$
$$+ \frac{b^2c^2\operatorname{Sin}^2(120^0+v)}{b^2+c^2-2ab\operatorname{Cos}(120^0+v)} < b^2 + c^2 + 2bc$$

eller

$$-\operatorname{Cos}(120^0+v)+\operatorname{Sin}(120^0+v)+\frac{1}{2}\frac{bc\operatorname{Sin}^2(120^0+v)}{b^2+c^2-2ab\operatorname{Cos}(120^0+v)} < 1,$$

hvilket är omöjligt, enär ensamt

$$-\operatorname{Cos}(120^0+v)+\operatorname{Sin}(120^0+v) > 1;$$

och således måste

$$a + h_a > b + c.$$

Då det nu härmed är bevisadt, att P icke kan ligga på BC, så återstår att se till, om den ligger på AB eller AC. Hvilketdera antagande man än gör, så följer, att P sammanfaller med A.

För att beräkna summan $AP + BP + CP$, så sätta vi

$$PA = l_a,\quad PB = l_b \quad \text{och} \quad PC = l_c.$$

Man får lätt likheterna

$$\left.\begin{aligned} l_a^2 + l_b^2 + l_a l_b &= a^2 \\ l_a^2 + l_c^2 + l_a l_c &= b^2 \\ l_b^2 + l_c^2 + l_b l_c &= c^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

och

$$l_a l_b + l_a l_c + l_b l_c = \frac{4\Delta}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

hvarest Δ = ytan af ΔABC.

Genom addition af likheterna (1) och en enkel reduktion under begagnande af (2), erhålles

$$l_a + l_b + l_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\,\Delta} \quad \ldots \quad (3).$$

Vi skola nu göra några speciella antaganden.

Är någon af vinklarne t. ex. $A = 120^0$, så blir

$$\Delta = \frac{bc\sqrt{3}}{4} \qquad \text{och} \qquad a^2 = b^2 + c^2 + bc;$$

följaktligen såsom sig bör:

$$L = a + b,$$

hvarest

$$L = l_a + l_b + l_c.$$

För $A = 60^0$ blir

$$L = \sqrt{b^2 + c^2 + bc}.$$

* Sättes $A = 90^0$, så fås

$$L = \sqrt{b^2 + c^2 + bc\sqrt{3}}.$$

---

252. *Bland alla tetraedrar, som stödja sina hörn på hvart och ett af fyra gifna klot, ha de summan af qvadraterna på alla kanterna störst eller minst för hvilka de genom stödjehörnen förlängda radierna skära hvarandra i tetraederns tyngdpunkt.*

Vi skola först bevisa ett par satser på hvilka vi stödja lösningen af denna sats.

Om en triangels spetsar utgöres af midtpunkterna på en gifven triangels sidor, om vidare uppritas en ny triangel, hvars spetsar äro midtpunkterna på den nyssnämnda triangeln och derpå, fortsatt i oändlighet, nya trianglar bildas efter samma lag, så är limes för n^{te} triangeln när n växer obegränsadt, en punkt, som sammanfaller med den ursprungliga triangelns tyngdpunkt.

Det inses att den gifna triangeln har samma tyngdpunkt som den första härledda, emedan sidornas bissektricer i båda sammanfalla; följaktligen har ock den ursprungliga triangeln samma tyngdpunkt som hvar och en af de öfriga härledda. Emedan nu en triangel alltid måste innesluta sin tyngdpunkt och för obegränsadt växande n hvar och en af triangelns sidor närma sig obegränsadt nära en punkt, så måste följaktligen i limes, $n = \infty$, triangeln obegränsadt nära sammanfalla med den ursprungliga triangelns tyngdpunkt.

I en tetraeder är summan af qvadraterna på tre från ett af hörnen utgående kanter lika med tre gånger qvadraten på den linie, som förenar detta hörn med motstående sidans tyngdpunkt tillsammans med en tredjedel af summan af qvadraterna på samma gränsytas kanter.

Låt $ABCD$ vara den gifna tetraedern, A_1, B_1 och C_1 midtpunkterna på AB, AC och BC, samt T tyngdpunkterna till $\triangle ABC$.

Enligt en känd sats är då

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,\overline{A_1D}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2},$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{B_1D}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{2},$$

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{C_1D}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2},$$

alltså

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{A_1D}^2 + \overline{B_1D}^2 + \overline{C_1D}^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{4}$$

eller, med användande af ett kortare beteckningssätt

$$S^2 = S_1^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{4}.$$

Behandla vi nu den nya pyramiden $DA_1B_1C_1$ på samma sätt som den ursprungliga och iakttaga analoga beteckningar, så följer att

$$S_1^2 = S_2^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{16}$$

eller i allmänhet

$$S_{n-1}^2 = S_n^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{4^n},$$

hvadan slutligen

$$S^2 = S_n^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

För obegränsadt växande n sammanfalla, enligt ofvan bevisade hjelpsats, A_n, B_n och C_n med T, och följaktigen är för denna gräns $A_nD = B_nD = C_nD = TD$, och alltså

$$S^2 = 3\,\overline{TD}^2 + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}{3}.$$

Vi öfvergå då till lösningen af den först framstälda satsen.

Låt de gifna klotens medelpunkter betecknas med M_1, M_2, M_3 och M_4, tetraederns hörn med H_1, H_2, H_3 och H_4, tyngdpunkterna till de mot hörnen stående gränsytorna med T_1, T_2, T_3 och T_4, summan af qvadraterna på alla kanterna med S^2 samt summan af qvadraterna på de kanter, som mötas i H_4 med S_4^2.

Vi antaga att $H_1H_2H_3$ har det läge, som denna gränsyta intar då S^2 är störst eller minst. S^2 har sålunda något af sina gränsvärden när S_4^2 har sina eller på samma gång som $3\overline{H_4T_4}^2 + \frac{\overline{H_1H_2}^2 + \overline{H_1H_3}^2 + \overline{H_2H_3}^2}{3}$, enligt den andra af stödjesatserna, d. ä. på samma gång som T_4H_4, efter senare termen är konstant. Men T_4H_4 har tydligen sina gränsvärden då T_4H_4 går genom M_4, således äfven på samma gång S_4^2.* Nu äro T_1H_1, T_2H_2, T_3H_3 och T_4H_4 de linier, som förena tetraederns hörn med motstående gränsytors tyngdpunkter och gå derföre, såsom bekant är, genom tetraederns tyngdpunkt.

---

253. *Om i en pyramid, med fyrsidig plan bas, basens diagonaler betecknas med D_1 och D_2, den linie, som förenar midtpunkterna af dessa diagonaler, med L, afståndet från midtpunkten på denna föreningslinie och spetsen med R, samt summan af qvadraterna på de kanter, som mötas i spetsen med S^2, så är*

* På samma sätt bevisas, att T_3H_3, T_2H_2 och T_1H_1 gå genom M_3, M_2 och M_1.

$$S^2 = 4R^2 + \tfrac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2) + L^2.$$

Vi förutskicka följande hjelpsats.

Om en fyrhörning bildas genom förening af sidornas midtpunkter i en gifven fyrhörning och en ny fyrhörning bildas på samma sätt i den första härledda, samt sedan fyrhörningar danas efter samma lag, så sammanfaller i limes den n^{te} fyrhörningen för obegränsadt växande n obegränsadt nära med midtpunkten på den linie, som förenar diagonalernas midtpunkter i den ursprungliga fyrhörningen.

Den första härledda fyrhörningen är såsom bekant en parallelogram, hvars sidor äro parallela med den ursprungliga fyrhörningens diagonaler. Enligt sats 52 (I), bevisad årgången 1868 sidan 167, skära hvarandra parallelogrammens diagonaler på midtpunkten af den linie, som är föreningslinien mellan den ursprungliga fyrhörningens diagonalers midtpunkter. Hvarje följande fyrhörning är naturligtvis en parallelogram, hvars diagonaler hafva samma skärningspunkt, som diagonalerna i den första härledda. Deraf följer omedelbart sanningen af den framstälda satsen.

Vi öfvergå då till beviset för det först framstälda teoremet.

Låt basens sidor betecknas med a, b, c och d, de från midtpunkterna af dessa sidor till spetsen dragna linier med e_1, f_1, g_1 och h_1, de kanter, som mötas i spetsen, med e, f, g och h, midtpunkten på den linie, som är föreningslinien till midtpunkterna af basens diagonaler med Q, pyramidens spets med P, midtpunkterna af basens sidor med E, F, G och H, midtpunkterna af EF, FG, GH och HE med E_1, F_1, G_1 och H_1, midtpunkterna af E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1 och H_1E_1 med E_2, F_2, G_2 och H_2 samt i allmänhet midtpunkterna af $E_{n-1}F_{n-1}$, $F_{n-1}G_{n-1}$, $G_{n-1}H_{n-1}$ och $H_{n-1}E_{n-1}$ med E_n, F_n, G_n och H_n. Låt dessutom M beteckna basen, M_1 dess första härledda fyrhörning och i allmänhet M_n dess n^{te}.

Man har enligt en känd sats

$$e^2 + f^2 = 2e_1^2 + \frac{a^2}{2}, \quad f^2 + g^2 = 2f_1^2 + \frac{b^2}{2},$$

$$g^2 + h^2 = 2g_1^2 + \frac{c^2}{2}, \quad h^2 + e^2 = 2h_1^2 + \frac{d^2}{2}.$$

Genom addition af dessa likheter erhålles

(1) $$S^2 = S_1^2 + \tfrac{1}{4}K^2,$$

hvarest $S_1^2 = e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 + h_1^2$ och $K^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Med användande af analoga beteckningar erhålles på samma sätt:

$$S_1^2 = S_2^2 + \tfrac{1}{4}K_1^2$$

och i allmänhet

(2) $$S_{n-1}^2 = S_n^2 + \tfrac{1}{4}K_{n-1}^2.$$

Med stöd af (2) kan således (1) skrifvas

(3) $$S^2 = S_n^2 + \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{4}(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + \ldots + K_{n-1}^2).$$

Nu är i M_2 sidorna halfparten af diagonalerna i M_1 och således är, med iakttagande deraf att i en parallelogram summan af qvadraterna på diagonalerna är lika med summan af qvadraterna på sidorna, för $n > 1$.

(4) $$K_r^2 = \tfrac{1}{2}K_{r-1}^2.$$

Med användande af (4) öfvergår således (3) till

(5) $$S^2 = S_n^2 + \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{4}K_1^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$= S_n^2 + \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{4}K_1^2\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = S_n^2 + \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{2}K_1^2[1-(\tfrac{1}{2})^{n-1}].$$

Nu är för oändligt växande n i limes, enligt ofvan bevisade hjelpsats, $PE_n = PF_n = PG_n = PH_n = R$ och således $S_n^2 = 4R^2$, samt $(\frac{1}{2})^{n-1}$, för $n = \infty$, i limes $= 0$.

(5) kan derföre skrifvas

$$S^2 = 4R^2 + \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{2}K_1^2.$$

Enligt en känd sats är $K^2 = D_1^2 + D_2^2 + 4L^2$, samt, såsom lätt inses, $K_1^2 = \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2)$.

Med införandet af dessa värden öfvergår (5) till

$$S^2 = 4R^2 + \tfrac{1}{4}(D_1^2 + D_2^2 + 4L^2) + \tfrac{1}{4}(D_1^2 + D_2^2) + 4R^2 + \tfrac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2) + L^2.$$

Detta teorem gäller äfven om pyramidens bas är konkav. För att visa dess användbarhet skola vi med stöd deraf lösa några satser.

Vi begagna i det följande samma beteckningar som förut.

Fyra punkter äro gifna i samma plan. Att finna orten för de punkter, som äro sådane att summan af qvadraterne *på deras afstånd från de gifna punkterna är en gifven qvadrat* N^2.

Enligt uppgiften har man omedelbart likheten

$$N^2 = 4R^2 + \tfrac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2) + L^2,$$

hvaraf

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{N^2 - L^2 - \tfrac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2)}.$$

Orten är följaktligen ett klot, som har Q till medelpunkt. För uppgiftens möjlighet måste $N^2 \geqq L^2 + \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2)$.

Ett klot och fyra punkter, som ligga i samma plan äro gifna; att finna de punkter på klotet, hvilka äro så beskaffade att summan af qvadraterna på deras afstånd från de gifna punkterna är maximum eller minimum.

Emedan S^2 endast varierar med PQ, så inses att PQ bör hafva ett maximi- eller minimi-värde; således äro de sökta punkterna de uti hvilka klotet skäres då PQ går genom dess medelpunkt.

En pyramid med fyrsidig plan bas är gifven. Det begäres att finna den punkt för hvilken summan af qvadraterna på dess afstånd från pyramidens hörn är minimum.

Låt P_1 utmärka en punkt i rymden och V^2 summan af qvadraterna på afstånden derifrån till basens hörn.

Då skall

$$V^2 + \overline{PP_1}^2 = \text{minimum},$$

eller då måste

$$4\overline{P_1Q}^2 + \overline{PP_1}^2 = \text{mininum},$$

efter endast P_1Q och PP_1 variera.

Man inser derföre lätt att P_1 bör ligga någorstädes på PQ. Sättes $P_1Q = \dfrac{R}{5} + \delta$, $\therefore$ $PP_1 = \dfrac{4}{5}R - \delta$, så fås eqvationen

$$4\left(\frac{R}{5} + \delta\right)^2 + \left(\frac{4}{5}R - \delta\right)^2 = \text{min.} \quad \text{eller} \quad \frac{4}{5}R^2 + 5\delta^2 = \text{min.},$$

hvaraf ses att δ bör vara $= 0$, $\therefore$ $P_1Q = \dfrac{R}{5}$ och $PP_1 = \dfrac{4}{5}R$.

Den sökta punkten ligger således på $\frac{1}{5}$ af QP från Q räknadt.

Den sökta minimisumman blir alltså

$$\frac{4}{5}R^2 + \tfrac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2) + L^2.$$

AFDELNING II.

Definita integraler af synektiska funktioner.

Af G. DILLNER.

(Forts. fr. sid. 70).

40. Vi gå nu att göra en tillämpning af formeln (54), hvarigenom vi bli i tillfälle att lösa den vigtiga frågan *om synektiska funktioners uppdelning i faktorer.*

De punkter, för hvilka en funktion $f(z)$ blir 0 eller ∞ eller, som är detsamma, hvilka fixeras af rötterna till $f(z)=0$ eller $\frac{1}{f(z)}=0$, kallas resp. funktionens *nollpunkter* och *oändlighetspunkter* eller med ett gemensamt namn funktionens *märkespunkter.*

Om en funktion $f(z)$ eger inom en gifven cirkel P (fig. 10) märkespunkterna $a_1, a_2 \dots a_p$ men är för öfrigt synektisk för hvarje punkt på cirkelytan, och om vidare hvar och en af dessa märkespunkter är såsom medelpunkt omgifven af en cirkel nog liten att icke innesluta eller beröra någon af de öfriges cirklar, så låter funktionen eller dess inversa värde för hvar och en af dessa små cirklar utveckla sig efter den Taylorska serien (jfr § 20), då alltså:

1:o. Om a_r är en m-faldig rot till $f(z)=0$, så fås enligt § 25

$$f(z)=(z-a_r)^m \chi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

der $\chi(z)$ är en synektisk funktion, som hvarken blir 0 eller ∞ för någon punkt på den lilla cirkel, som omger a_r;

2:o. Om a_r är en m-faldig rot till $\frac{1}{f(z)} = 0$, så fås på samma sätt

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a_r)^m \psi(z),$$

der $\psi(z)$ är synektisk och hvarken blir 0 eller ∞ för någon punkt på den lilla cirkel, som omger a_r, eller annorlunda uttryckt:

$$f(z) = (z - a_r)^{-m} \chi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67),$$

der $\chi(z)$ såsom varande $= \frac{1}{\psi(z)}$ likaledes är synektisk och hvarken blir 0 eller oändlig för den a_r omgifvande lilla cirkeln.

Om vi sammanfatta (66) och (67), så kunna vi sätta, om vi med μ_r utmärka ett positivt eller negativt helt tal:

$$f(z) = (z - a_r)^{\mu_r} \chi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68),$$

der således μ_r med sitt numeriska värde anger mångfaldigheten af roten a_r och för öfrigt är pos. eller neg., allt efter som a_r är en nollpunkt eller oändlighetspunkt hos funktionen $f(z)$.

Talet μ_r kallas märkespunktens a_r *index.* En nollpunkt är således en märkespunkt med *positiv index* och en oändlighetspunkt en märkespunkt med *negativ index.*

41. Genom att derivera likheten (68) erhålles

$$f'(z) = \mu_r (z - a_r)^{\mu_r - 1} \chi(z) + (z - a_r)^{\mu_r} \chi'(z),$$

då följaktligen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu_r}{z - a_r} + \frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69),$$

hvilken likhet således visar, *att oändlighetspunkterna hos qvoten $\frac{f'(z)}{f(z)}$ äro helt och hållet sammanfallande med märkespunkterna hos funktionen $f(z)$.*

42. Om vi enligt (54) utveckla $\frac{f'(z)}{f(z)}$ för en konvergens cirkel P, inom hvilken $f(z)$ har märkespunkterna $a_1, a_2 \ldots a_p$, så erhålles, då a_0 sättes $= 0$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{zf(z)} + x\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{z^2f(z)} + x^2\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{z^3f(z)} + \dots\right\} \\ + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{(x-z)f(z)} \end{aligned}\right\} (70).$$

Fyllnadstermen i denna serie kan med stöd (69) transformeras på följande sätt. Enär $\chi(z)$ för hvarje punkt på den a_r omgifvande lilla cirkeln är synektisk utan att bli 0 och då dess derivata följaktligen äfven är synektisk (jfr § 18), så måste hvarje punktintegral af formen $\int^{a_r}\frac{\chi'(z)dz}{(x-z)\chi(z)}$ vara 0 (jfr § 7), då alltså:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{(x-z)f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=p}\int^{a_r}\frac{\mu_r dz}{(x-z)(z-a_r)} = \sum_{r=1}^{r=p}\frac{\mu_r}{x-a_r} \dots (71).$$

Likaledes fås för $\bar{a}_r > 0$ hvarje punktintegral af formen

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{z^s f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int^{a_r}\frac{\mu_r dz}{z^s(z-a_r)} = \frac{\mu_r}{(a_r)^s} \dots (72).$$

Med begagnande af (71) och (72) kan serien (70) sättas under följande form, då nämligen σ utmärker talet 2 eller 1, allt efter som 0 är en rot till $f(z) = 0$ eller icke (jfr § 39, ex. 2 och 3):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = S + \sum_{r=1}^{r=p}\frac{\mu_r}{x-a_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73),$$

der

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{zf(z)} + x\sum_{r=0}^{r=p}\int^{a_r}\frac{f'(z)dz}{z^2f(z)} + x^2\sum_{r=0}^{r=p}\frac{f'(z)dz}{z^3f(z)} + \dots\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{f'(z)dz}{zf(z)} + \sum_{r=\sigma}^{r=p}\frac{\mu_r}{a_r}\right\} + x\left\{\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{f'(z)dz}{z^2f(z)} + \sum_{r=\sigma}^{r=p}\frac{\mu_r}{(a_r)^2}\right\} \\ &\quad + x^2\left\{\frac{1}{2\pi i}\int^{0}\frac{f'(z)dz}{z^3f(z)} + \sum_{r=\sigma}^{r=p}\frac{\mu_r}{(a_r)^3}\right\} + \dots \end{aligned}\right\} \dots (74).$$

43. Genom att integrera likheten (73) från x_0 till x fås:

$$\log \frac{f(x)}{f(x_0)} = \int_{x_0}^{x} S dx + \sum_{r=1}^{r=p} \mu_r \log \frac{x - a_r}{x_0 - a_r} + 2 k \pi i \ldots (75),$$

der sista termen utmärker den vid integrationen inträdande perioden, beroende af den väg man följer vid gåendet från x_0 till x (jfr § 28).

Likheten (75) kan sättas under formen:

$$f(x) = f(x_0) \prod_{r=1}^{r=p} \left\{ \frac{x - a_r}{x_0 - a_r} \right\}^{\mu_r} e^{\int_{x_0}^{x} S dx} \quad . \quad . \quad . \quad (76),$$

der sista faktorn $e^{2k\pi i}$ är försummad såsom varande $= 1$.

Denna formel, hvars stora vigt och betydelse vi framdeles bli i tillfälle att närmare belysa, visar det allmänna sätt, hvarpå en synektisk funktion $f(z)$ kan uppdelas i faktorer, så snart vi känna dess inom en gifven konvergenscirkel P befintliga märkespunkter äfvensom deras indices samt den i (75) gifna konvergenta serien.

Formeln (76) användes vanligen under följande enklare form, då x_0 sättes $= 0$:

$$f(x) = f(0) \prod_{r=1}^{r=p} \left\{ 1 - \frac{x}{a_r} \right\}^{\mu_r} e^{\int_{0}^{x} S dx} \quad . \quad . \quad . \quad (77).$$

Anm. 1. Att den i (76) eller (77) gifna produktserien alltid eger ett finit värde eller är konvergent utom för de inom P befintliga oändlighetspunkterna framgår omedelbart deraf, att hon utgör en omedelbar utveckling af den enligt (54) konvergenta serien (70).

Anm. 2. Att den definita integralen $\int_{x_0}^{x} S dx$ är en synektisk funktion af x för alla punkter inom konvergenscirkeln P, följer af § 13, enär serien S är en synektisk funktion af x för alla punkter inom P.

44. I följande exempel betjena vi oss af de i § 39 gifna beteckningar, der ϱ utmärker *konvergens cirkelns radie*, ε *ett litet positivt talvärde* samt a) och b) de särskilda moment, hvari konvergens cirkelns radie antages resp. *ändlig* eller gränsande till *oändligheten.*

Ex. 1. $f(x) = \operatorname{Sin} x$, då märkespunkterna representeras af $\pm k\pi$ $[k = 0, 1, 2$ etc.$]$ samt hafva samtliga index 1.

a) $\varrho = 2\pi - \varepsilon$. I detta fall har $f(x)$ inom konvergens cirkeln tre märkespunkter, näml. $a_1 = 0$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm\pi$, då alltså enligt (76):

$$\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} x_0 \prod_{r=1}^{r=3} \left\{\frac{x - a_r}{x_0 - a_r}\right\} e^{\int_{x_0}^{x} S\,dx} = \frac{\operatorname{Sin} x_0}{x_0} \cdot x \cdot \frac{x - \pi}{x_0 - \pi} \cdot \frac{x + \pi}{x_0 + \pi} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} S\,dx} .$$

För $x_0 = 0$, då $\lim \dfrac{\operatorname{Sin} x_0}{x_0} = 1$, fås följande enklare uttryck

$$\operatorname{Sin} x = x\left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] e^{\int_0^x S\,dx} .$$

Serien S antager enligt (74) följande form (jfr § 39, ex. 7):

$$S = x\left\{\frac{2}{\pi^2} - \frac{F_1}{\lfloor 2}\right\} + x^3\left\{\frac{2}{\pi^4} - \frac{F_2}{\lfloor 4}\right\} + x^5\left\{\frac{2}{\pi^6} - \frac{F_3}{\lfloor 6}\right\} + \ldots$$

då följaktligen

$$\int_0^x S\,dz = \frac{x^2}{2}\left\{\frac{2}{\pi^2} - \frac{F_1}{\lfloor 2}\right\} + \frac{x^4}{4}\left\{\frac{2}{\pi^4} - \frac{F_2}{\lfloor 4}\right\} + \frac{x^6}{6}\left\{\frac{2}{\pi^6} - \frac{F_3}{\lfloor 6}\right\} + \ldots,$$

hvilken serie vi således ha att foga såsom exponent till talet e.

b) $\varrho = (k + \frac{1}{2})\pi$, der k är mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu märkespunkterna $a_1 = 0$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm\pi$,

$\left.\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right\} = \pm 2\pi, \ldots \left.\begin{matrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{matrix}\right\} = \pm k\pi$. För en oändligt stor konvergens cirkel blir serien $S = 0$ [jfr § 39 ex. 7 b)], då alltså:

$$\operatorname{Sin} x = x\left\{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right\}\ldots\left\{1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right\},$$

hvilken är den kända formeln för utveckling af $\operatorname{Sin} x$ i en oändlig produktserie.

Anm. 1. Den för sin. hyp. gällande produktutveckling fås omedelbart genom att i föregående formel införa $i\xi$ i stället för x.

Anm. 2. Genom att i föreg. formler införa $x = \alpha + i\beta$ finna vi utvecklingen af $\operatorname{Sin}(\alpha + i\beta) = \frac{i}{2}\left\{e^{\beta}_{-\alpha} - e^{-\beta}_{\alpha}\right\} = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos} i\beta + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin} i\beta$ äfvensom af $\operatorname{Mod}^2 \operatorname{Sin}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{4}(e^{2\beta} - 2\operatorname{Cos} 2\alpha + e^{-2\beta})$ genom att taga modylerna å ömse sidor. Vi kunna äfven utföra en speciel utveckling med afseende på antingen α eller β som variabel, hvilket vi gå att visa i följande exempel.

Ex. 2. $f(\beta) = \operatorname{Sin}(\alpha + i\beta)$, då märkespunkterna med afseende på β som variabel representeras af $i(k\pi + \alpha)$, då $k = 0, \pm 1, \pm 2$ etc., och hafva samtliga index 1.

$\varrho = \frac{3}{2}\pi$, då $f(\beta)$ för $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ har inom konvergenscirkeln märkespunkterna $a_1 = i\alpha$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = i(\alpha \pm \pi)$ [jfr fig. 11, der märkespunkterna äro tecknade med små kors], hvadan alltså enligt (77):

$$\operatorname{Sin}(\alpha + i\beta) = \operatorname{Sin}\alpha\left\{1 - \frac{\beta}{i\alpha}\right\}\left\{1 - \frac{\beta}{i(\alpha + \pi)}\right\}\left\{1 - \frac{\beta}{i(\alpha - \pi)}\right\} e^{\int_0^x S\,dx},$$

der S enligt (74) låter beräkna sig. Om vi sätta

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = i \operatorname{Cotg}(\alpha + i\beta) = u,$$

så blir enligt (56)

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{0} \frac{f'\,dz}{z^s f} = \frac{1}{\lfloor s-1 \rfloor}\left|\left\{\frac{f'}{f}\right\}^{(s-1)}\right.^{0} = \frac{1}{\lfloor s-1 \rfloor}\left| u^{(s-1)}\right.^{0}.$$

Enär $\overset{0}{/}u = i\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$ och $\overset{0}{/}f^{(r)} = i^r\,\mathrm{Sin}\left(\alpha + \frac{r\pi}{2}\right)$, hvaraf
$\overset{0}{/}f = \overset{0}{/}f'' = \overset{0}{/}f^{\text{iv}} = \ldots = \mathrm{Sin}\,\alpha$ och $\overset{0}{/}f' = \overset{0}{/}f''' = \overset{0}{/}f^{\text{v}} = \ldots i\,\mathrm{Cos}\,\alpha$,
så fås enligt (58)

$$i^{r+1}\,\mathrm{Sin}\left(\alpha + \frac{r+1}{2}\pi\right)$$

$$= \left\{u^{(r)} + \frac{r(r-1)}{\lfloor 2}u^{(r-2)} + \ldots\right\}\mathrm{Sin}\,\alpha + \left\{\frac{r}{1}u^{(r-1)} + \frac{r(r-1)(r-2)}{\lfloor 3}u^{(r-3)} + \ldots\right\} i\,\mathrm{Cos}\,\alpha,$$

hvarur framgå följande bestämningar:

$$\overset{0}{/}u' = \frac{1}{\mathrm{Sin}^2\alpha}, \quad \overset{0}{/}u'' = -\frac{2i\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}^3\alpha}, \quad \overset{0}{/}u''' = -\frac{2(1 + 2\,\mathrm{Cos}^2\alpha)}{\mathrm{Sin}^4\alpha}, \text{ o. s. v.}$$

Vidare är

$$\sum_{r=1}^{r=3}\frac{1}{(a_r)^s} = \frac{1}{(i\alpha)^s} + \frac{1}{\{i(\alpha+\pi)\}^s} + \frac{1}{\{i(\alpha-\pi)\}^s},$$

då alltså serien S får följande form:

$$S = iA_0 + A_1\beta + iA_2\beta^2 + A_3\beta^3 + \ldots,$$

der

$$A_0 = \mathrm{Cotg}\,\alpha - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+\pi} - \frac{1}{\alpha-\pi};$$

$$A_1 = \frac{1}{\mathrm{Sin}^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha+\pi)^2} - \frac{1}{(\alpha-\pi)^2};$$

$$A_2 = -\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}^3\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(\alpha+\pi)^3} + \frac{1}{(\alpha-\pi)^3};$$

$$A_3 = -\frac{1 + 2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}{3\,\mathrm{Sin}^4\alpha} + \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{(\alpha+\pi)^4} + \frac{1}{(\alpha-\pi)^4};$$

. . . .

Vår integral blir alltså:

$$\int_0^\beta S\,dx = iA_0\beta + \frac{A_1\beta^2}{2} + \frac{iA_2\beta^3}{3} + \frac{A_3\beta^4}{4} + \ldots$$

b) $\varrho = (k + \frac{1}{2})\pi$, der k är ett särdeles stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu märkespunkterna

$a_1 = i\alpha\,,\quad \left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = i(\alpha \pm \pi)\,,\quad \left.\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right\} = i(\alpha \pm 2\pi)\,,\quad \ldots\quad \left.\begin{matrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{matrix}\right\}$ $= i(\alpha \pm k\pi)$. För en oändligt stor konvergens cirkel blir på grund af § 37 $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$ samt med stöd af § 39, ex. 7 b) äfven $A_0 = 0$, då följaktigen vår oändliga produktserie blir:

$$S(\alpha+i\beta) = \operatorname{Sin}\alpha\left(1-\frac{\beta}{i\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta}{i(\alpha+\pi)}\right)\left(1-\frac{\beta}{i(\alpha-\pi)}\right)\left(1-\frac{\beta}{i(\alpha+2\pi)}\right)\left(1-\frac{\beta}{i(\alpha-2\pi)}\right)\ldots$$

Anm. 1. Genom att i utvecklingen a) taga modylerna och argumenten å ömse sidor erhålles

$$\tfrac{1}{4}\left\{e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2\operatorname{Cos} 2\alpha\right\}$$
$$= \operatorname{Sin}^2\alpha\left\{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha+\pi)^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha-\pi)^2}\right\} e^{2[\frac{1}{2}A_1\beta^2 + \frac{1}{4}A_3\beta^4 + \ldots]}$$

samt

$$\operatorname{Arctg}\left\{\operatorname{Cotg}\alpha\,.\,\operatorname{Th}\beta\right\}$$
$$= k\pi + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha+\pi} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha-\pi} + A_0\beta + \tfrac{1}{3}A_2\beta^3 + \ldots$$

Genom att åter i utvecklingen b) taga modylerna och argumenten å ömse sidor fås:

$$\tfrac{1}{4}\left\{e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2\operatorname{Cos} 2\alpha\right\}$$
$$= \operatorname{Sin}^2\alpha\left\{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha+\pi)^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha-\pi)^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha+2\pi)^2}\right\}\left\{1+\frac{\beta^2}{(\alpha-2\pi)^2}\right\}^{*}\ldots$$

samt

---

* Vi äro i tillfälle att med detta resultat rätta en i åtskilliga arbeten förekommande felaktig formel, näml.

$$e^z - 2\operatorname{Cos}\theta + e^{-z} = 4\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}\left\{1+\frac{z^2}{\theta^2}\right\}\left\{1+\frac{z^2}{(2\pi\pm\theta)^2}\right\}\left\{1+\frac{z^2}{(4\pi\pm\theta)^2}\right\}\ldots$$

(jfr Plane Trigonometry by I. Todhunter, pag 260).

Ty genom att sätta $2\beta = z$ och $2\alpha = \theta$ fås

$$e^z - 2\operatorname{Cos}\theta + e^{-z} = 4\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}\left\{1+\frac{z^2}{\theta^2}\right\}\left\{1+\frac{z^2}{(2\pi+\theta)^2}\right\}\left\{1+\frac{z^2}{(2\pi-\theta)^2}\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{z^2}{(4\pi+\theta)^2}\right\}\left\{1+\frac{z^2}{(4\pi-\theta)^2}\right\}\ldots$$

Den anmärkta formeln bär ock ett inre kriterium på sin felaktighet, ity att den för ett gifvet siffervärde på θ icke kan satisfieras af såväl $+\theta$ som $-\theta$.

$$\operatorname{Arctg}\{\operatorname{Cotg}\alpha\,.\,\operatorname{Th}\beta\}$$

$$= k\pi + \operatorname{Arctg}\left\{\frac{\beta}{\alpha} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha+\pi} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha-\pi} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha+2\pi} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha-2\pi} + \ldots\right.$$

Detta sista resultat ger vid handen ett högst enkelt sätt att konstruera principalvärdet af $\arg \operatorname{Sin}(\alpha + i\beta)$. Ty för $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ är den venstra sidan i likheten ett bågvärde i 1:sta qvadranten, hvarföre bågsumman till höger äfven måste utgöra ett värde i 1:sta qvadranten, då således, om vi sätta:

$$v_0 = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$$

$$v_1 = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\pi-\alpha} - \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\pi+\alpha}$$

$$v_2 = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{2\pi-\alpha} - \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{2\pi+\alpha}$$

. . . .

så måste följande likhet ega rum:

$$\operatorname{Arctg}\{\operatorname{Cotg}\alpha\,.\,\operatorname{Th}\beta\} = v_0 - v_1 - v_2 - \ldots,$$

hvilken visar, att vi för finnandet af det i fråga varande argumentet ega att från v_0 subtrahera de raskt minskande vinkeldifferenserna v_1, v_2 etc. [jfr fig. 12].

Anm. 2. Om vi i första modylutvecklingen i föreg. *anm.* införa $2\beta = \log\frac{M}{N}$ $\left[\frac{M}{N} > 1\right]$ och $2\alpha = \varphi$, så erhålles för $\left\{\begin{matrix}\beta < \frac{3}{2}\pi \\ \alpha < \frac{1}{2}\pi\end{matrix}\right\}$ eller, som är detsamma, för $\left\{\begin{matrix}\log\frac{M}{N} < 3\pi \\ \varphi < \pi\end{matrix}\right\}$ följande produktutveckling:

$$M^2 + N^2 - 2MN\operatorname{Cos}\varphi = 4\,MN\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varphi\left\{1 + \frac{\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}{\varphi^2}\right\}$$

$$\times\left\{1 + \frac{\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}{(2\pi+\varphi)^2}\right\}\left\{1 + \frac{\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}{(2\pi-\varphi)^2}\right\} e^{2\left[\frac{1}{2}A_1\left(\frac{1}{2}\log\frac{M}{N}\right)^2 + \frac{1}{4}A_3\left(\frac{1}{2}\log\frac{M}{N}\right)^4 + \ldots\right]}$$

der vi i koefficienterna A_1, A_3 etc. ha att införa $\frac{1}{2}\varphi$ i stället för α.

För en oändligt stor konvergens cirkel åter fås följande produktserie:

$$M^2 + N^2 - 2MN \operatorname{Cos} \varphi = 4MN \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \left\{1 + \frac{\left(\log \frac{M}{N}\right)^2}{\varphi^2}\right\}$$

$$\times \left\{1 + \frac{\left(\log \frac{M}{N}\right)^2}{(2\pi + \varphi)^2}\right\}\left\{1 + \frac{\left(\log \frac{M}{N}\right)^2}{(2\pi - \varphi)^2}\right\}\left\{1 + \frac{\left(\log \frac{M}{N}\right)^2}{(2.2\pi + \varphi)^2}\right\}\left\{1 + \frac{\left(\log \frac{M}{N}\right)^2}{(2.2\pi - \varphi)^2}\right\}\cdots$$

Dessa produktserier egna sig på ett enkelt och naturligt sätt för utvecklingen af störelsefunktionen $\{M^2 + N^2 - 2MN \operatorname{Cos}\varphi\}^{-\frac{n}{2}}$ med afseende på $\log \frac{M}{N}$ som variabel.

Anm. 3. Om vi taga i betraktande de för en oändligt stor konvergens cirkel försvinnande koefficienterna A_0, A_1, A_2, A_3 etc., så framgå derur formler för summering af oändliga serier enligt följande allmänna chema:

$$\frac{1}{\underline{|s-1}} \int^{0} u^{(s-1)} = -\sum_{r=1}^{r=2k+1} \frac{1}{(a_r)^s}.$$

Dessa serier hafva vi redan funnit för $s = 1$ [jfr § 39, ex. 7, *b*)] och för $s = 2$ [jfr § 39, ex. 8, *b*)]. För $s = 3$ och $s = 4$ finna vi resp.:

$$\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}^3\alpha} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(\alpha+\pi)^3} + \frac{1}{(\alpha-\pi)^3} + \frac{1}{(\alpha+2\pi)^3} + \frac{1}{(\alpha-2\pi)^3} + \ \cdots$$

$$\frac{1+2\operatorname{Cos}^2\alpha}{3\operatorname{Sin}^4\alpha} = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{(\alpha+\pi)^4} + \frac{1}{(\alpha-\pi)^4} + \frac{1}{(\alpha+2\pi)^4} + \frac{1}{(\alpha-2\pi)^4} + \cdots$$

Ex. 3. $f(\alpha) = \operatorname{Sin}(\alpha + i\beta)$, då märkespunkterna med afseende på α som variabel representeras af $k\pi - i\beta$ [$k = 0, \pm 1, \pm 2$ etc.] och hafva samtliga index 1.

a) $\varrho = \sqrt{(2\pi)^2 + \beta^2} - \varepsilon$, då $f(\alpha)$ inom konvergens cirkeln har märkespunkterna $a_1 = -i\beta$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm\pi - i\beta$ [jfr fig. 13], då således enligt (77):

$$\text{Sin}\,(\alpha+i\beta) = \text{Sin}\,i\beta\left\{1+\frac{\alpha}{i\beta}\right\}\left\{1+\frac{\alpha}{\pi+i\beta}\right\}\left\{1-\frac{\alpha}{\pi-i\beta}\right\}e^{\int_0^x S\,dx},$$

der vi ha att enligt (74) beräkna S. Om vi derför sätta:

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \text{Cotg}\,(\alpha+i\beta) = u,$$

så är enligt (56):

$$\frac{1}{2\pi i}\int^0 \frac{f'\,dz}{z^s f} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Big/^0 \left\{\frac{f'}{f}\right\}^{(s-1)} = \frac{1}{\lfloor s-1}\Big/^0 u^{(s-1)}.$$

Enär $\Big/^0 u = \text{Cotg}\,i\beta$ och $\Big/^0 f^{(r)} = \text{Sin}\left(\frac{r\pi}{2}+i\beta\right)$, hvaraf

$\Big/^0 f' = \text{Cos}\,i\beta$, $\Big/^0 f'' = -\text{Sin}\,i\beta$, $\Big/^0 f''' = -\text{Cos}\,i\beta$, $\Big/^0 f^{\text{IV}} = \text{Sin}\,i\beta$

o. s. v., så erhålles enligt (58):

$$\text{Sin}\left(\frac{r+1}{2}\pi+i\beta\right) = \left\{u^{(r)} - \frac{r(r-1)}{\lfloor 2}u^{(r-2)} + \ldots\right\}\text{Sin}\,i\beta$$
$$+\left\{\frac{r}{1}u^{(r-1)} - \frac{r(r-1)(r-2)}{\lfloor 3}u^{(r-3)} + \ldots\right\}\text{Cos}\,i\beta,$$

hvaraf framgå följande bestämningar:

$$\Big/^0 u' = -\frac{1}{\text{Sin}^2 i\beta},\quad \Big/^0 u'' = \frac{2\,\text{Cos}\,i\beta}{\text{Sin}^3 i\beta},\quad \Big/^0 u''' = -2\frac{(1+2\,\text{Cos}^2 i\beta)}{\text{Sin}^4 i\beta}$$

o. s. v.

Vidare är, då $l_{-\lambda}$ sättes $= \pi - i\beta$, hvaraf $l = \sqrt{\pi^2+\beta^2}$ och $\lambda = \text{Arctg}\,\frac{\beta}{\pi}$:

$$\sum_{r=1}^{r=3}\frac{1}{(a_r)^s} = \frac{1}{(-i\beta)^s} + \frac{1}{(-i\beta+\pi)^s} + \frac{1}{(-i\beta-\pi)^s} = \frac{1}{(-i\beta)^s} + \frac{1_{s\lambda}}{l^s} + \frac{1_{s\pi}\,.\,1_{-s\lambda}}{l^s},$$

då alltså serien får följande form:

$$S = iA_0 + A_1\alpha + iA_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + \ldots$$

der

$$A_0 = -\text{Coth}\,\beta + \frac{1}{\beta} + \frac{2\,\text{Sin}\,\lambda}{l},$$

$$A_1 = \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\beta} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\,2\lambda}{l^2};$$

$$A_2 = \frac{\mathrm{Ch}\,\beta}{\mathrm{Sh}^3\beta} - \frac{1}{\beta^3} + \frac{2\,\mathrm{Sin}\,3\lambda}{l^3};$$

$$A_3 = -\frac{1+2\,\mathrm{Ch}^2\beta}{3\,\mathrm{Sh}^4\beta} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\,4\lambda}{l^4};$$

. . . .

Vår integral blir följaktligen:

$$\int_0^x S\,dx = iA_0\alpha + \tfrac{1}{2}A_1\alpha^2 + \tfrac{1}{3}iA_2\alpha^3 + \tfrac{1}{4}A_3\alpha^4 + \dots$$

Anm. Genom att taga modylerna å ömse sidor i vår funna produktutveckling erhålles, då vi iakttaga, att $l\,\mathrm{Cos}\,\lambda = \pi$:

$$e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2\,\mathrm{Cos}\,2\alpha = (e^\beta - e^{-\beta})^2 \left\{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\} \left\{1 + \frac{2\alpha\pi}{l^2} + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right\}$$
$$\times \left\{1 - \frac{2\alpha\pi}{l^2} + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right\} e^{2[\frac{1}{2}A_1\alpha^2 + \frac{1}{4}A_3\alpha^4 + \dots]}$$

Om vi i detta resultat införa $2\beta = \log\frac{M}{N}$ $\left[\frac{M}{N} > 1\right]$

och $2\alpha = \varphi$, hvaraf $l^2 = \frac{1}{4}\left\{(2\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2\right\}$

och $\lambda = \mathrm{Arctg}\,\dfrac{\log\frac{M}{N}}{2\pi}$, så fås följande egendomliga utveckling:

$$M^2 + N^2 - 2MN\,\mathrm{Cos}\,\varphi = (M-N)^2\left\{1 + \left(\frac{\varphi}{\log\frac{M}{N}}\right)^2\right\}$$
$$\times \left\{1 + \frac{\varphi(\varphi + 4\pi)}{(2\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\left\{1 + \frac{\varphi(\varphi - 4\pi)}{(2\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\} e^{2[\frac{1}{2}A_1(\frac{1}{2}\varphi)^2 + \frac{1}{4}A_3(\frac{1}{2}\varphi)^4 + \dots]},$$

hvilken utveckling gäller för $\mathrm{Mod}\,(\tfrac{1}{2}\varphi) < \bar{\beta}$ eller, som är detsamma, för $\bar{\varphi} < \sqrt{(4\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2}$. Denna formel lämpar sig på ett enkelt och naturligt sätt för utvecklingen af störelsefunktionen $\{M^2 + N^2 - 2\,MN \operatorname{Cos}\varphi\}^{-\frac{n}{2}}$ med afseende på φ som variabel.

b) $\varrho = \sqrt{(2k\pi)^2 + \beta^2} - \varepsilon$, der k är ett mycket stort helt pos. tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu märkespunkterna $a_1 = i\beta$, $\left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = \pm\pi - i\beta$, $\left.\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix}\right\} = \pm 2\pi - i\beta, \ldots \left.\begin{matrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{matrix}\right\}$ $= \pm k\pi - i\beta$. För en oändligt stor konvergens cirkel är på grund af § 37 $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$; likaså finna vi $A_0 = 0$, då vi i § 39, ex. 7 *b*) införa $i\beta$ i stället för x. Vår oändliga produktserie blir alltså:

$$\operatorname{Sin}(\alpha + i\beta) = \operatorname{Sin} i\beta\left\{1 + \frac{\alpha}{i\beta}\right\}\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi + i\beta}\right\}\left\{1 - \frac{\alpha}{\pi - i\beta}\right\}$$
$$\times\left\{1 + \frac{\alpha}{2\pi + i\beta}\right\}\left\{1 - \frac{\alpha}{2\pi - i\beta}\right\}\cdots$$

Anm. 1. Genom att taga modylerna å ömse sidor erhålles, då vi sätta $l'_{\lambda_1} = 2\pi + i\beta$, $l''_{\lambda_{\prime\prime}} = 3\pi + i\beta$ o. s. v.:

$$e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2\operatorname{Cos}2\alpha = (e^{\beta} - e^{-\beta})^2\left\{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}\left\{1 + \frac{2\alpha\pi}{l^2} + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{1 - \frac{2\alpha\pi}{l^2} + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right\}\left\{1 + \frac{4\alpha\pi}{l'^2} + \left(\frac{\alpha}{l'}\right)^2\right\}\left\{1 - \frac{4\alpha\pi}{l'^2} + \left(\frac{\alpha}{l'}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{1 + \frac{6\alpha\pi}{l''^2} + \left(\frac{\alpha}{l''}\right)^2\right\}\left\{1 - \frac{6\alpha\pi}{l''^2} + \left(\frac{\alpha}{l''}\right)^2\right\}\cdots$$

Om vi här såsom i föreg. anm. införa $2\beta = \log\frac{M}{N}$, $2\alpha = \varphi$, $l^2 = \frac{1}{4}\left\{(2\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2\right\}$, $l'^2 = \frac{1}{4}\left\{(2.2\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2\right\}$ och $l''^2 = \frac{1}{4}\left\{(2\,.\,3\pi)^2 + \left(\log\frac{M}{N}\right)^2\right\}$ o. s. v., så erhålles följande oändliga produktserie:

$$M^2+N^2-2MN\operatorname{Cos}\varphi=(M-N)^2\left\{1+\frac{\varphi}{\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\left\{1+\frac{\varphi(\varphi+4\pi)}{(2\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{\varphi(\varphi-4\pi)}{(2\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\left\{1+\frac{\varphi(\varphi+4.2\pi)}{(2.2\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\left\{1+\frac{\varphi(\varphi-4.2\pi)}{(2.2\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{\varphi(\varphi+4.3\pi)}{(2.3\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\left\{1+\frac{\varphi(\varphi-4.3\pi)}{(2.3\pi)^2+\left(\log\frac{M}{N}\right)^2}\right\}\ldots,$$

hvilken utveckling gäller för hvilka ändliga värden som helst på φ.

Genom att sätta exponenten $-\frac{n}{2}$ till hvar och en af faktorerna till höger ha vi således den oändliga produktserie, som är = störelsefunktionen $\{M^2+N^2-2MN\operatorname{Cos}\varphi)^{-\frac{n}{2}}$.

Anm. 2. De serier, som härflyta från de för en oändligt stor konvergens cirkel försvinnande koefficienterna A_0, A_1, A_2, A_3 etc., fås omedelbart genom att i de serier, som förekomma eller äro antydda i ex. 2 anm. 3, införa $i\beta$ i stället för α.

Af den nu genomgångna exempelgruppen, som i sjelfva verket icke är annat än tre skilda synpunkter af ett och samma exempel, näml. $\operatorname{Sin} x$, kunna vi sluta till vigten och värdet af den allmänna produktformeln (76) såsom gifvande uppslag till en outtömlig rikedom på nya och intressanta utvecklingar. Vi hafva med den fullständiga lösningen af detta exempel velat antyda de skilda utvecklingar en och samma funktion kan erhålla, då hon ses ur olika synpunkter.

Ex. 4. $f(x)=\operatorname{Cos} x$, då märkespunkterna representeras af $\pm(k+\frac{1}{2})\pi$ $[k=0, 1, 2$ etc.$]$ och hafva samtliga index 1.

a) $\varrho=\frac{3}{2}\pi-\varepsilon$, då $f(x)$ inom konvergens cirkeln har de två märkespunkterna $\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\}=\pm\frac{1}{2}\pi$, hvadan alltså enligt (77):

$$\operatorname{Cos} x = \left\{1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2\right\} e^{\int_0^x S dx},$$

der S enligt (74) har formen (jfr § 39, ex. 6):

$$S = x\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^2} - \frac{2E_1}{\lfloor 2}\right\} + x^3\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^4} - \frac{4E_2}{\lfloor 4}\right\} + x^5\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^6} - \frac{6E_3}{\lfloor 6}\right\} + \ldots$$

och följaktligen

$$\int_0^x S dx = \frac{x^2}{2}\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^2} - \frac{2E_1}{\lfloor 2}\right\} + \frac{x^4}{4}\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^4} - \frac{4E_2}{\lfloor 4}\right\}$$
$$+ \frac{x^6}{6}\left\{\frac{2}{(\frac{1}{2}\pi)^6} - \frac{6E_3}{\lfloor 6}\right\} + \ldots$$

b) $\varrho = k\pi$, der k är ett särdeles stort pos. helt tal. Inom konvergens cirkeln ha vi nu märkespunkterna $\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2}\pi$, $\left.\begin{matrix} a_3 \\ a_4 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{3}{2}\pi$, ... $\left.\begin{matrix} a_{2k-1} \\ a_{2k} \end{matrix}\right\} = \pm \frac{2k-1}{2}\pi$. För en oändligt stor konvergens cirkel är serien $S = 0$ [jfr § 39, ex. 6 *b*)], då alltså:

$$\operatorname{Cos} x = \left\{1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)^2\right\} \ldots \left\{1 - \left(\frac{x}{\frac{2k-1}{2}\pi}\right)^2\right\},$$

hvilken är den kända produktserien för Cos x.

Anm. 1. Genom att i föregående formler införa $i\xi$ i stället för x fås omedelbart den för Cos. hyp. gällande produktutvecklingen.

Anm. 2. För det allmänna fallet, då $x = \alpha + i\beta$, kunna vi enligt föregående formler utveckla $\operatorname{Cos}(\alpha + i\beta)$ $= \frac{1}{2}\left(e^{\beta}_{-\alpha} + e^{-\beta}_{\alpha}\right) = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos} i\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} i\beta$ äfvensom $\operatorname{Mod}^2 \operatorname{Cos}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{4}\{e^{2\beta} + 2\operatorname{Cos} 2\alpha + e^{-2\beta}\}$ i produktserier. En speciel utveckling låter utföra sig i enlighet med ex. 2 & 3 med afseende på vare sig α eller β såsom variabel, då vi ha att finna märkespunkterna af likheten $\alpha + i\beta = (k + \frac{1}{2}\pi)$ för $k = 0$, $k = \pm 1$, $k = \pm 2$ etc., hvilka samtliga ha index 1.

Såsom lämpliga öfningsexempel torde följande förtjena uppmärksamhet:

Ex. 5. $f(x) = M^2 + N^2 - 2MN \operatorname{Cos} x$, direkt utveckling med afseende på $\log \dfrac{M}{N}$ som variabel, med kontroll af ex. 2, anm. 2.

Ex. 6. $f(x) = M^2 + N^2 - 2MN \operatorname{Cos} x$, direkt utveckling med afseende på x som variabel, med kontroll af ex. 3.

Ex. 7. $f(x) = \operatorname{tg} x$, direkt utveckling, med kontroll af $\dfrac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$.

Ex. 8. $f(x) = \operatorname{Cotg} x$, direkt utveckling, med kontroll af $\dfrac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}$.

45. Vi gå nu att ur en annan synpunkt skärskåda den allmänna produktformeln (76) eller

$$f(x) = f(x_0) \prod_{r=1}^{r=p} \left\{ \frac{x - a_r}{x_0 - a_r} \right\}^{\mu_r} . \, e^{\int_{x_0}^{x} S\,dx} .$$

Om vi sätta

$$\varrho_\omega = \xi + i\eta = \int_{x_0}^{x} S\,dx \qquad \text{samt} \qquad R_\Omega = e^{\int_{x_0}^{x} S\,dx} = e^{\xi}_{\eta} ,$$

så är

$$R = e^{\xi} \qquad \text{och} \qquad \Omega = \eta ,$$

hvaraf framgår, att argumentet Ω såsom varande $= \eta$ måste beskrifva vinkelbanan 0 för hvarje af ϱ_ω beskrifven sluten kontur. Men ϱ_ω är synektisk för hvarje punkt inom den af x beskrifna konvergens cirkeln och måste följaktligen beskrifva en sluten kontur på samma gång som x beskrifver en sådan inom sin konvergens cirkel, då således $f(x)$ för denna x^{ξ}_{-} kontur måste ha samma vinkelbana som produkten $\prod_{r=1}^{r=p} \left\{ \dfrac{x - a_r}{x_0 - a_r} \right\}^{\mu_r}$. Men en faktor $\left\{ \dfrac{x - a_r}{x_0 - a_r} \right\}^{\mu_r}$ har vinkelbanan 0 eller $2\pi\mu_r$, allt efter som märkespunkten a_r ligger inom den af x beskrifna konturen eller icke (jfr årg. III, sid. 119). Om derför märkespunkterna a_1, $a_2 \ldots a_s$ ligga inom x:s kontur, så är funktionens $f(x)$ vinkelbana $= 2\pi \sum_{r=1}^{r=s} \mu_r$.

Vi kunna alltså uttala följande särdeles vigtiga sats:

Om inom den konvergens cirkel, som gäller för en synektisk funktions $f(x)$ utveckling i produktserie, x beskrifver en sluten kontur, hvilken innesluter ett visst antal märkespunkter, så är $f(x)$:s vinkelbana för denna kontur $= 2\pi \times$ summan af de inneslutna märkespunkternas indices.

Om vi åter äro på förhand försäkrade om att $f(x)$ inom den af x beskrifna konturen icke har någon oändlighetspunkt, d. v. s. märkespunkt med negativ index, så kunna vi ock omvändt sluta, *att, om för en af x beskrifven sluten kontur $f(x)$:s vinkelbana är $2\pi m$, så eger $f(x)$ m stycken rotpunkter inom denna kontur.*

Anm. I fall vi egde en allmän metod att finna en synektisk funktions $f(x)$ vinkelbana för en gifven kontur x, så vore dermed ock frågan löst att närmelsevis finna läget af funktionens rotpunkter genom att innesluta dem inom allt trängre och trängre konturer (jfr den i årg. III, sid. 177 etc. framstälda metoden, hvilken blott gäller för hela rationela polynom).

46. Enär enligt § 18 en derivata $f'(x)$ är synektisk för hvarje punkt på en yta, för hvilken funktionen $f(x)$ sjelf är synektisk, så kunna vi på grund af det i § 2 med tillhörande figur antydda sambandet mellan primitivans och derivatans konturer uttala följande satser, då vi nämligen antaga den oberoende variabelns kontur *bugtig*, d. v. s. limes för kontingensvinkeln i hvarje punkt $= 0$. (Jfr årg. III, sid. 187).

1:o. *Om $f(x)$ är synektisk för hvarje punkt på en kontur P, så varierar derivatans $f'(x)$ argument $\widehat{OM} - \widehat{PL}$ kon-*

tinuerligt, med undantag möjligen af det fall, då $f'(x) = 0$, *då alltså* $f(x)$ *i allmänhet måste beskrifva en* ***bugtig*** *kontur på samma gång som* x.

2:o. *Om* $f'(x) = 0$ *på samma gång som* $f''(x)$ *icke är* 0, *så beskrifver* $f'(x)$ *en bugtig kontur genom sitt origo (noll-punkten), då alltså* $f'(x)$ *i denna punkt ändrar sitt argument med* π, *hvilket hos primitivans kontur motsvaras af en spets* [= *den punkt, der limes för kontingens vinkeln är* π]. *Och omvändt, om* $f(x)$ *beskrifver en spets, så måste* $f'(x)$, *såsom ändrande sitt argument i den motsvarande punkten med* π, *vara* $= 0$.

3:o. *Om* $f'(x) = f''(x) = 0$ *men deremot* $f'''(x)$ *icke* 0, *så måste enligt föreg. sats* $f'(x)$ *förete en spets i sitt origo, för hvilket fall* $f(x)$:s *kontur är bugtig eller saknar spets. Är åter* $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ *men deremot* $f^{\text{iv}}(x)$ *icke* 0, *så företer* $f''(x)$ *af enahanda skäl en spets i sitt origo, för hvilket fall* $f'(x)$ *saknar spets, hvilket åter motsvaras af en spets hos* $f(x)$, *o. s. v., hvaraf i allmänhet framgår, att, om* $f'(x) = f''(x) = \ldots f^{(r-1)}(x) = 0$ *men* $f^{(r)}(x)$ *icke* 0, *så företer* $f^{(r-2)}(x)$, $f^{(r-4)}(x)$ *o. s. v. eller hvarannan derivata från den* r:te *en spets i sitt origo, då alltså primitivan* $f(x)$ *företer spets eller icke, allt efter som* r *är ett jämnt eller udda tal.*

Anm: Den vanliga teorien för maxima och minima hos *reela* funktioner framgår som ett specielt fall af dessa satser, åtminstone så vidt hon behandlar synektiska funktioner. Ty om x, i stället för att röra sig på en bugtig kontur, rör sig på grundriktningslinien (x-axeln), så måste $f(x)$ såsom *reel* röra sig på samma linie antingen såsom växande eller aftagande: spetsarne bli då öfvergångspunkter från växande till aftagande (maxima) eller från aftagande till växande (minima). Om åter för det värde på x, som gör $f(x) = \ldots f^{(r-1)}(x) = 0$ [r-jämnt tal], $f(x)$ blir *imaginär*, så företer $f(x)$ i denna punkt en spets likasom ock hvarje derivata af jämn ordningsnummer, hvilken är $= 0$.

(Forts.)

Om förvandlingen af en serie till kedjebråk.

Af student K. E. BROMAN.

Låt serien vara

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.},$$

så vilja vi söka ett kedjebråk

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

sådant, att dess n^{te} konvergent är (identiskt) lika med serien, tagen till och med n^{te} termen.

Att ett sådant kedjebråk måste finnas, är deraf lätteligen insedt, att med n^{te} leden inkomma 2:ne indeterminater a_n och b_n, hvilka måste kunna så bestämmas, att de, utom uppfyllandet af ett annat arbiträrt vilkor, göra n^{te} konvergenten = en godtycklig qvantitet, alltså i närv. fall $= u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. *

Gå vi till denna bestämning, alltid såsom det arbiträra vilkoret tagande $q_n = 1$, hvilket närmast erbjuder sig, så måste först

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} &= \frac{b_1}{a_1} = u_1 \\ q_1 &= a_1 = 1 \end{aligned}\right\},$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= u_1 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_2}{q_2} &= \frac{a_2 p_1}{a_2 q_1 + b_2} = u_1 + u_2 \\ q_2 &= a_2 q_1 + b_2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ eller } \left.\begin{aligned} a_2 u_1 &= u_1 + u_2 \\ a_2 + b_2 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

* Emedan i $\frac{p_n}{q_n}$ ingår blott förhållandet $\frac{b_n}{a_n}$, blifver naturligen detta härigenom bestämdt, och det arbiträra vilkoret får alltså ej röra detta förhållande.

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= -\frac{u_2}{u_1} \\ a_2 &= \frac{u_1 + u_2}{u_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Antag vidare a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1} b_{n-1} så bestämda, att

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &= u_1 + u_2 + .. + u_{n-2} \\ q_{n-2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

samt

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} &= u_1 + u_2 + .. + u_{n-1} \\ q_{n-1} &= 1 \end{aligned}\right\},$$

så öfvergår systemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}} = u_1 + u_2 + .. + u_n \\ q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} = 1 \end{aligned}\right\}$$

uti

$$\left.\begin{aligned} a_n(u_1 + u_2 + .. + u_{n-1}) + b_n(u_1 + u_2 + .. + u_{n-2}) &= u_1 + u_2 + .. + u_n \\ a_n + b_n &= 1 \end{aligned}\right\},$$

som ger

$$\left.\begin{aligned} b_n &= -\frac{u_n}{u_{n-1}} \\ a_n &= \frac{u_{n-1} + u_n}{u_{n-1}} \end{aligned}\right\} \text{ för } n \geqq 3 \quad \ldots. \quad (3).$$

Införas de medelst (1), (2) och (3) gifna värdena på a och b, blir det sökta kedjebråket efter en lätt transformation *

$$\cfrac{u_1}{1 - \cfrac{u_2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_3}{u_2 + u_3 - \cfrac{u_2 u_4}{u_3 + u_4 - \ldots}}}},$$

och, som detta till följe af sin natur måste samtidigt konvergera och divergera med serien $u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$, är alltid

* Härvid är naturligen ej vidare $q_n = 1$.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = \cfrac{u_1}{1 - \cfrac{u_2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_3}{u_2 + u_3 - \cfrac{u_2 u_4}{u_3 + u_4 - \dots}}}},$$

vare sig man fortgår till en viss index eller i oändlighet.

Om ellipsens och hyperbelns styrlinier och konjugatdiametrar.

Af M. FALK.

Den mest elementära framställning af läran om ellipsens och hyperbelns styrlinier* och tillika sådan, att den väl lämpar sig till komplettering af den för de aldra första grundernas af Analytiska Geometrien inhemtande synnerligen goda läroboken af Jochnick, torde vara följande.

Vid den i nämnda lärobok utförda härledningen af ellipsens eqvation finner man, om (x, y) är en punkt af kurvans periferi, r och r_1 bränpunktsradierna till densamma och c, a, b och e hafva sina i läroboken gifna betydelser,

$$r = a - \frac{cx}{a}, \quad r_1 = a + \frac{cx}{a}$$

eller

$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) = e\left(\frac{a}{e} - x\right) \quad \text{och} \quad r_1 = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} + x\right) = e\left(\frac{a}{e} + x\right).$$

Vi sätta här $\frac{a^2}{c} - x = d$ och $\frac{a^2}{c} + x = d_1$. Stycket $\frac{a^2}{c}$ finnes geometriskt såsom en 4:de proportional till c, a och a; och, enär $\frac{a}{c} > 1$, är $\frac{a^2}{c} > a$. Genom dessa insättningar får man

---

* Sedan denna uppsats blifvit inlemnad till Tidskriftens Redaktion, hafva vi i en Analytisk Geometri af Stammer återfunnit den här gifna framställningen af läran om andregrads kurvornas styrlinier; oaktadt härledningen således icke är ny, så tro vi den dock för sin stora enkelhet förtjent af att blifva allmänt bekant.

$$\frac{r}{d} = \frac{r_1}{d_1} = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Låt nu F och F_1 (fig.) vara bränpunkterna, så har man $OF = OF_1 = c$.

Låt vidare $OB = OB_1 = \frac{a^2}{c}$ och drag genom B och B_1 räta linier $||$ OY. Då har man

$$MF = r, \; MF_1 = r_1, \; PB = OB - OP = \frac{a^2}{c} - x = d$$

och

$$PB_1 = OB_1 + OP = \frac{a^2}{c} + x = d_1,$$

hvadan alltså eqvationerna (1), enär tillika $MD = PB$ och $MD_1 = PB_1$, blifva $\frac{MF}{MD} = \frac{MF_1}{MD_1} = e$, hvilka uttrycka, att linierna BD och B_1D_1 äro sådana, att förhållandet mellan en punkts på ellipsen afstånd från ena bränpunkten och från den på samma sida om y-axeln som bränpunkten belägna af de nämnda två linierna BD och B_1D_1 är konstant och $=$ ellipsens excentricitet.

Uppställer man då följande definition:

Med en andregrads-kurvas styrlinie förstås en sådan rät linie, att förhållandet mellan en punkts af kurvan afstånd från bränpunkten och från styrlinien är konstant;

så är nu bevist, att ellipsen har två styrlinier belägna utom ellipsen på lika afstånd från och parallela med ellipsens mindre axel; dessa tillhöra hvarsin af bränpunkterna samt hafva till eqvationer $x = \frac{a^2}{c}$ och $x = -\frac{a^2}{c}$, för hvilkas uppskrifvande vi tydligen hafva den enkla minnesregeln att sätta uttrycken för de båda bränpunktsradiernas längder hvart för sig $= 0$.

För hyperbeln äro härledning och slutresultat likartade med de för ellipsen gällande, endast med den skilnad att här $\frac{a^2}{c} < a$ och att således styrlinierna ligga *mellan* hyperbelns båda grenar.

Vi finna alltså, att hos ellipsen är förhållandet mellan en punkts på kurvan afstånd från bränpunkten och från styrlinien < 1, hos hyperbeln deremot > 1; som detsamma hos parabeln (se förut nämnda lärobok) är $= 1$, utgör alltså parabeln ett gränsfall mellan ellipsen och hyperbeln. Definierar man excentriciteten såsom det konstanta förhållandet mellan de nämnda afstånden, kan man derjemte säga, att parabelns excentricitet är $e = 1$.

Vi skola nu framställa en enkel härledning af ifrågavarande kurvors konjugatdiametrar och ställa i spetsen deraf den vanliga definitionen på diameter neml.

Diameter till en andregradskurva kallas den linie, som skär ett visst system af parallela kordor midt i tu.

Af beviset skall framgå, att diametern är en rät linie.

Ofvannämnda definition kan äfven framställas sålunda: Diameter till en andregradskurva är lokus för midtpunkten till en korda, som rör sig, i det den ständigt håller sig parallel med en viss riktning.

Man bör då först uppvisa, att en dylik lokus verkligen finnes. Detta sker lätteligen sålunda. Tag ett visst läge af den rörliga kordan; då blifva äfven dess ändpunkter bestämda. Tages sedan ett nytt läge af kordan nära det förra, så komma denna nya kordas ändpunkter hur nära man behagar till den förras, blott kordan sjelf indefinit närmar sig till den förra. Men då kommer ock den nya kordans midtpunkt hur nära man behagar intill den ursprungligas midtpunkt. Tänker man sig alltså kordor dragna parallela med hvarandra och tillräckligt tätt intill hvarandra, så komma ock dessa kordors midtpunkter att ligga i en rad hur nära intill hvarandra man behagar; och om kordorna blifva oändligt många och oändligt nära hvarandra, så öfvergår serien af deras midtpunkter för ögat till en sammanhängande linie. Denna lokus finnes alltså, hvadan det nu blott återstår att söka densamma.

Den härledning *, vi här nedan gifva, behöfver blott fram-

* Vi bedja läsaren observera, att denna metod delar med den på koord. förändring byggda den fördelen att icke fordra elimination af

ställas för ellipsen; ty den kan steg för steg göras på samma sätt för hyperbeln (och äfven för parabeln undantagandes frågan om *konjugat*-diametrar; ty sådana finnas ej hos parabeln utan *blott* diametrar). Härledningen afser äfven att vara så enkel och direkt som möjligt utan att derför behöfva byggas på koordinatförändring.

Vi hafva då blott att söka en eqvation, som satisfieras af alla dessa kordors midtpunkters koordinater; ty denna eqvation betyder en linie, som innehåller alla midtpunkterna och utgör följaktligen lokus för den rörliga kordans midtpunkt.

Låt de parallela kordornas gifna vinkelkoëfficient vara m och upprita en hvilken som heldst af dem $P_1 M P_2$. Kallas koordinaterna för kordans midtpunkt för ξ och η, så blir tydligen kordans eqvation, enär hon går genom sin egen midtpunkt och har vinkelkoëfficienten m, följande:

$$y - \eta = m(x - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Denna eqv. betyder således en hvilken som helst af alla kordorna och (ξ, η) är derför ett läge hvilket som helst af den rörliga punkten, hvars lokus sökes. Vi hafva således blott att söka den vilkorseqvation, som måste vara uppfylld, för att (ξ, η) skall vara midtpunkt af kordan (2). Kalla P_1:s koordinater för x_1, y_1 och P_2:s för x_2, y_2.

Dessa koordinater skola alltså erhållas som x- och y-värden ur systemet, som består af (2) och ellipsens eqvation:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Elimineras y mellan dessa, fås eqationen

$$x^2 + 2\frac{a^2 m(\eta - m\xi)}{a^2 m^2 + b^2} x = a^2 \frac{b^2 - (\eta - m\xi)^2}{a^2 m^2 + b^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

hvars rötter äro x_1 och x_2. Men skall M vara midtpunkt, måste man hafva $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$; och summan af rötterna till

---

variabla parametrar; ty här äro de variabla parametrarne just de löpande koordinaterna för den sökta lokus. Betydelsen af en sådan parameterelimination hafva vi funnit vara icke alldeles lättfattlig för nybörjaren.

(4), d. v. s. $x_1 + x_2$, är ju = koëff. för 1:sta diguiteten af x med ombytt tecken, hvadan man alltså får

$$\xi = -\frac{a^2 m(\eta - m\xi)}{a^2 m^2 + b^2}$$

eller, om nämnaren bortskaffas och eqvationen hyfsas,

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2 m}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

som är den sökta diameterns eqvation. Diametern är alltså en rät linie. Som man kan gifva kordorna hvilken riktning som heldst, kan vinkelkoëff. $m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}$ för diametern blifva hvilken som heldst, hvadan hvarje genom ellipsens medelpunkt dragen rät linie är en diameter. Men då är äfven linien $y = mx$, som är en af kordorna, hvilka (5) skär midt i tu, en diameter, och denna tillsammans med (5) kallas ett par konjugatdiametrar. Vi finna alltså, att räta linierna $y = mx$ och $y = m_1 x$ äro konjugatdiametrar, om $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$. Nu inses ock utan svårighet, att *hvardera* af två konjugatdiametrar skär midt i tu alla kordor, som äro parallela med den andra.

Satser af lektor HALLSTRÖM.

1. *Att konstruera en parabel, som går genom tre gifna punkter och hvars axel har en gifven rigtning.*

Låt de gifna punkterna vara M, N och P (fig. 14). Skär räta linien MN midtitu uti O. Drag genom O räta linien OQ i axelns rigtning. Drag PQ parallel med MN och nedfäll mot OQ perpendiklarne NS och PT. Låt U vara sidan till den qvadrat, som är lika med skilnaden mellan qvadraterna på PT och NS och låt D vara tredje proportionalen till QO och U. Då är D den sökta parabelns parameter. Låt OA vara tredje proportionalen till D och NS och $4AG$ tredje proportionalen till OA och ON. Drag genom G en rät linea vinkelrät mot axelns rigtning, så har man parabelns directrix. Drag AH parallel med MN och sätt i A mot AH en vinkel HAF lika stor med GAH samt gör AF lika stor med AG. Då är F parabelns focus; och efter sålunda directrix och focus äro funna, så är parabeln äfven funnen.

2. *Om ifrån en punkt F utom parabeln (fig. 15) en arbiträr sekant FGH drages och skäres i P så att FP är medelproportionalen till FG och FH, så är locus för P två diametrar belägna på lika afstånd ifrån F.*

Ty drag ifrån F en tangent AF och genom tangeringspunkten A en diameter $ABCD$. Drag EG och HK parallela med AD och BG och DH parallela med FA.

Då är

$$FG : FH = EG : HK = AB : AD = BG \text{ qvadr.} : DH \text{ qvadr.}$$
$$= CG \text{ qv.} : CH \text{ qv.}$$

Alltså

$$4 \times \text{rekt.} GF \times FC : 4 \times \text{rekt.} HF \times FC = CG \text{ qv.} : CH \text{ qv.}$$
$$= (CF + FG) \text{ qv.} : (CF + FH) \text{ qv.}$$

Alltså

$$CG : CH = CF + FG : CF + FH = 2CF : 2FH = CF : FH$$

och

$$CG : CH = CF + FG : CF + FH = 2FG : 2FC = FG : FC.$$

Alltså

$$FG : FC = FC : FH.$$

Emedan således FC och FP båda äro medelproportionaler till FG och FH, så måste punkten P sammanfalla med C och alltså ligga på en af de diametrar som gå genom de ifrån F dragna tangenternas tangeringspunkter.

Låt FM vara den andra ifrån F dragna tangenten, AR och MS de båda diametrarne, N focus och RS directrix. Drag TFU vinkelrät mot diametrarne. Emedan trianglarne

RAF och NAF äro kongruenta, så är $FR = NF$ och vinklarne ARF och ANF lika stora; och, efter trianglarne NMF och MSF äro kongruenta, så är $FS = NF$ och vinklarne MNF och MSF lika stora. Alltså är $RF = FS$ och vinklarne FRT och FSU lika stora, hvaraf följer att $FT = FU$. Alltså ligga de båda diametrarne på lika afstånd ifrån F.

3. *Om ifrån en punkt F utom en parabel (fig. 16) dragas två sekanter FGH och FKL hvilka skäras i M och N så, att FM är medelproportional till FG och FH och FN medelproportinal till FK och FL, och parallelogrammen $FMON$ fullbordas, så är, ifall M och N ligga på olika diametrar, diagonalen FO en diameter.*

Ty drag mot diametrarne genom M och N perpendiklarne OS och FR. Efter då trianglarne FNR och MOS äro kongruenta, så är $FR = OS$. Men FR är $=$ halfva afståndet mellan diametrarne, alltså är äfven $OS =$ halfva detta afstånd. I följd deraf måste O ligga på diametern genom F.

4. *Att konstruera en parabel, som går genom fyra gifna punkter P, Q, R och S, af hvilka icke tre ligga i rät linea.*

1:o. Fyrhörningen $PQSR$ har icke två sidor parallela.

Förläng PQ och RS tilldess de råkas i C. Sök medelproportionalen CM till CP och CQ och medelproportionalen CN till CR och CS. Fullborda parallelogrammen $CMON$ och drag diagonalerna CO och MN.

Konstruera två parabler, hvilkas axlar hafva rigtningarne CO och MN och hvilka båda gå genom tre af punkterna PQR och S. De skola då gå äfven genom den fjerde.

2:o. PR parallel med QS. I detta fall erhålles endast en parabel, hvars axelrigtning är CO.

3:o. $PQSR$ är en parallelogram. I detta fall kan ingen parabel gå genom de fyra punkterna.

Satser rörande parabeln.

Af student Boije af Gennäs.

1. *Två punkter P och Q (fig. 17) äro tagna på axeln af en parabel, hvars vertex är O. Genom dessa punkter äro de parallela kordorna RPR' och SQS' dragna. Då är rektangeln, som innehålles af RP och $R'P$ till rektangeln, som innehålles af SQ och $S'Q$ liksom OP till OQ.*

Tages O till origo samt parabelns axel till positiv abscissaxel i ett rätvinkligt koordinatsystem, samt afståndet från vertex till fokus kallas a, så är parabelns eqvation

$$y^2 = 4ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Kalla θ kordornas lutning mot pos. x-axeln, samt OP och OQ för b och c respektive, så äro begge kordernas eqvationer

$$\left.\begin{aligned} y &= (x-b)\operatorname{tg}\theta \\ y &= (x-c)\operatorname{tg}\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Koordinaterna för skärningspunkterna mellan den första kordan RPR' och parabeln fås genom elliminering mellan deras eqvationer, och äro

$$\left.\begin{matrix} x_{,} \\ x_{,,} \end{matrix}\right\} = b + 2a\,\mathrm{Cot}^2\,\theta \pm 2\,\mathrm{Cot}\,\theta\,\sqrt{ab + a^2\,\mathrm{Cot}^2\,\theta};$$

$$\left.\begin{matrix} y_{,} \\ y_{,,} \end{matrix}\right\} = 2a\,\mathrm{Cot}\,\theta \pm 2\sqrt{ab + a^2\,\mathrm{Cot}^3\,\theta}.$$

Längderna af kordan RPR':s delar äro

$$\left.\begin{aligned} RP &= \{(x_{,} - b)^2 + y_{,}^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,\theta}\left(\sqrt{ab + a^2\,\mathrm{Cot}^2\,\theta} + a\,\mathrm{Cot}\,\theta\right) \\ R'P &= \{(b - x_{,,})^2 + y_{,,}^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,\theta}\left(\sqrt{ab + a^2\,\mathrm{Cot}^2\,\theta} - a\,\mathrm{Cot}\,\theta\right) \end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Häraf fås

$$\overline{RP.R'P} = \frac{4ab}{\mathrm{Sin}^2\,\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

och på samma sätt

$$\overline{SQ\,.\,S'Q} = \frac{4ac}{\mathrm{Sin}^2\theta}$$

och således

$$\frac{\overline{RP.R'P}}{\overline{SQ\,.\,S'Q}} = \frac{b}{c} = \frac{OP}{QQ}.$$

2. *Om en korda BFB' drages genom fokus parallelt med kordan RPR', så är rektangeln, som innehålles af RP och $R'P$ lika stor med rektangeln, som innehålles af BB' och OP.*

Sättes $b = a$ uti eqv. (3), så fås fokalkordans delar

$$BF = 2a\frac{1+\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}; \quad B'F = 2a\frac{1-\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta} \quad \ldots . (5).$$

Häraf fås

$$BFB' = \frac{4a}{\mathrm{Sin}^2\theta} \quad \ldots\ldots (6)$$

och således af eqv. (4) och (6)

$$\overline{RP\,.\,R'P} = \overline{BB'\,.\,OP}.$$

3. *Drages genom vextex en korda OA parallel med kordan RPR', så är skilnaden mellan RP och $R'P$ lika stor med OA.*

Sättes $b = o$ uti eqv. (3), så fås vertexkordans längd

$$OA = \frac{4a\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta} \quad \ldots\ldots (7).$$

Af (3) fås äfven

$$RP - R'P = \frac{4a\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}$$

och således är satsen bevisad.

4. *Rektangeln, som innehålles af en fokalkordas delar, är lika stor med rektangeln, som innehålles af hela kordan och afståndet från fokus till vertex.*

Detta följer omedelbart ur sats 2, ty den godtyckligt dragna kordan RPR' kan vara just sjelfva fokalkordan, och då är ju $BF.B'F = BB'.OF$.

5. *Om en cirkel uppritas, som går genom vertex O och den godtyckligt dragna kordan RPR's ändpunkter R och R', så skall denna cirkel af parabelns axel afskära ett stycke PC, som är lika stort med längden af den fokalkorda BFB', som drages parallelt med RPR'.*

Enl. Eucl. III: 35 är

$$\overline{OP.PC} = \overline{RP.R'P}$$

och enl. sats 2

$$\overline{RP.R'P} = \overline{BB'.OP}$$

således är

$$\overline{OP.PC} = \overline{BB'.OP}$$

och

$$PC = BB'.$$

6. *Om man genom vertex i en parabel drager tvenne mot hvarandra vinkelräta kordor OA och OD och sammanbinder skärningspunkterna A och D mellan dessa kordor och parabeln, så går AD genom en fix punkt på parabelns axel.*

Eqvationen för den ena vertexkordan OA är

$$y = x \operatorname{tg} \theta$$

samt för OD

$$y = -x \operatorname{Cot} \theta .$$

Koordinaterna för A äro

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 4a \operatorname{Cot}^2 \theta \\ 4a \operatorname{Cot} \theta \end{matrix}\right.$$

samt för D

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 4a \operatorname{tg}^2 \theta \\ -4a \operatorname{tg} \theta \end{matrix}\right. .$$

Eqvationen för AD är då

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

eller

$$2y - x\,\mathrm{tg}\,2\theta + 4a\,\mathrm{tg}\,2\theta = 0 .$$

Sättes $y = 0$ i denna eqvation, så fås $x = 4a$, hvilket visar, att AD alltid går genom en fix punkt på parabelns axel. Denna punkt, hvars afstånd från parabelns vertex är lika med längden af latus rectum, skola vi i det följande kalla F'.

7. *Tangenten för vinkeln AOF' är lika stor med kubikroten ur tangenten för vinkeln OAF'.*

Enl. eqv. (7) är

$$OA = \frac{4a \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}^2\theta} .$$

Tydligen är äfven

$$OD = \frac{4a \operatorname{Cos}(\frac{1}{2}\pi - \theta)}{\operatorname{Sin}^2(\frac{1}{2}\pi - \theta)} = \frac{4a \operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta} .$$

Häraf fås

$$\frac{OD}{OA} = \mathrm{tg}^3\theta = \mathrm{tg}^3 AOF' .$$

Den rätvinkliga triangeln AOD ger äfven

$$\frac{OD}{OA} = \mathrm{tg}\, OAF' .$$

Således är

$$\mathrm{tg}\, OAF' = \mathrm{tg}^3 AOF'$$

eller

$$\mathrm{tg}\, AOF' = \sqrt[3]{\mathrm{tg}\, OAF'} .$$

Denna parabelns egenskap gifver följande solution af problemet om kubikrötters utdragande ur räta linier, som representera nummertal.

Låt AL vara enheten samt ML den linie, ur hvilken kubikroten skall dragas. Upprita på OF' ett cirkelsegment

OAF', som i sig innehåller en vinkel OAF', hvars tangent är ML. Tag O till medelpunkt för en cirkel, hvars radie är lika stor med AL = enheten. Denna cirkel skär parabelns axel i G. Drag GH vinkelrätt mot axeln och låt H vara skärningspunkten mellan räta linierna OA och GH. GH är då lika med kubikroten ur ML.

8. *Qvadraten på OA förhåller sig till qvadraten på OD liksom kuben på AF' förhåller sig till kuben på DF'.*

$$\varDelta AOF' \text{ är} = \tfrac{1}{2}\overline{AO.OF'}\operatorname{Sin} AOF' = \tfrac{1}{2}.\frac{4a\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}^2\theta}.4a\operatorname{Sin}\theta = 8a^2\operatorname{Cot}\theta$$

$$\varDelta DOF' \text{ är} = \tfrac{1}{2}\overline{DO.OF'}\operatorname{Sin} DOF' = \tfrac{1}{2}.\frac{4a\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}.4a\operatorname{Cos}\theta = 8a^2\operatorname{tg}\theta.$$

Således är

$$\frac{\varDelta AOF'}{\varDelta DOF'} = \operatorname{Cot}^2\theta\,.$$

Men emedan dessa trianglar hafva samma höjd, så är

$$\frac{\varDelta AOF'}{\varDelta DOF'} = \frac{AF'}{DF'}$$

och således

$$\frac{AF'}{DF'} = \operatorname{Cot}^2\theta$$

hvaraf

$$\frac{(AF')^3}{(DF')^3} = \operatorname{Cot}^6\theta\,.$$

I förra satsen bevisades, att

$$\frac{OD}{OA} = \operatorname{tg}^3\theta$$

hvaraf

$$\frac{(OA)^2}{(OD)^2} = \operatorname{Cot}^6\theta$$

och således är

$$(OA)^2 : (OD)^2 = (AF')^3 : (DF')^3.$$

AFDELNING III.

Om harmoniskt förhållande.

Af F. W. HULTMAN.

Som bekant förhålla sig längderna af de 3 strängar, hvilka anslagna gifva den vackra treklangen (c-dur-ackordet), liksom talen

$$1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3}.^{*}$$

Dessa 3 tal sägas derföre bilda en harmonisk progression. Omvändas dessa 3 tal, blir det medlersta $\left(\frac{5}{4}\right)$ = det aritmetiska mediet mellan de 2 yttre $\left(2 \text{ och } \frac{3}{2}\right)$. Denna egenskap hos i fråga varande 3 tal att omvända bilda en aritmetisk progression har man sedermera lagt till grund för definitionen på 3 tal i harmonisk progression, så att 3 tal (a, b, c) sägas vara i en harmonisk progression, hvilka omvända bilda en aritmetisk progression

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

eller

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

---

* Stränglängderna i motsvarande moll-ackord förhålla sig liksom talen

$$1 : \frac{5}{6} : \frac{2}{3}.$$

Exempel på tal i harmonisk progression förekomma ofta i naturen och i allmänna lifvet. Vi vilja angifva några sådana.

Ex. 1. *Konvexa speglar.* Kallas den lysande punktens

afstånd från spegeln $= a$,
bildens „ „ „ $= b$,
spegelns radie . . . . $= r$,

så eger som bekant följande samband rum mellan dessa 3 storheter:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

hvilken visar att spegelns radie r är det harmoniska mediet mellan föremålets och bildens afstånd från spegeln.

Vill man finna, hvar föremålet skall ställas för att de 3 afstånden skola förhålla sig som längderna på strängarne, hvilka gifva treklangen, har man blott att sätta

$$a : r = 1 : \frac{4}{5},$$

hvilket gifver

$$a = \frac{5}{4} r$$

och

$$b = \frac{5}{6} r .$$

Ex. 2. *Positiva linser.* Sättes föremålets afstånd från

linsen $= a$,
bildens „ „ „ $= b$,
hufvudbränpunktens „ „ „ $= f$,

har man som bekant

$$\frac{2}{2f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

hvilket visar, att dubbla afståndet till bränpunkten är det harmoniska mediet mellan föremålets och bildens afstånd från linsen. Stälde man föremålet på afståndet $\frac{5}{4} \cdot 2f$, uppkomme bilden på afståndet $\frac{5}{6} \cdot 2f$. Om i detta fall man genom lika spända strängar af samma tjocklek och beskaffenhet förenade linsens midtpunkt med föremålet, med bilden och med en punkt på afståndet $2f$ från linsen, skulle dessa strängar anslagna gifva den sköna treklangen.

Anm. Afståndet $2f$ är märkligt derigenom, att om föremålet ställes på detta afstånd från linsen, uppkommer bilden på samma afstånd från linsen på andra sidan om denne.

Ex. 3. *Naturkrafterna.* Det är allmänt bekant, att tvänne på afståndet R från hvarandra belägna kroppar med massorna M och m attrahera hvarandra med kraften $\frac{Mm}{R^2}$. Har man en tredje kropp med massan m' och vill veta, hvar den skall ställas på föreningslinien af kropparnes M och m tyngdpunkter, för att han skall attraheras lika af begge, får man således svaret ur eqvationen

$$\frac{Mm'}{x^2} = \frac{mm'}{(R-x)^2},$$

hvarest

x = det sökta afståndet från kroppen M.

Häraf erhålles

$$\frac{\sqrt{M}}{x} = \pm \frac{\sqrt{m}}{R-x} = \frac{\sqrt{M} \pm \sqrt{m}}{R},$$

hvadan

$$x = \frac{R\sqrt{M}}{\sqrt{M} \pm \sqrt{m}}.$$

Det finnes således två sådane punkter, en på hvardera sidan om kroppen m. För deras afstånd x_1 och x_2 från M gäller sambandet

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R},$$

hvilket visar, att x_2, R och x_1 bildar en harmonisk progression. Vill man veta, huru kropparne M och m skola vara beskaffade för att dessa afstånd besträngade må gifva treklangen, har man blott att sätta

$$x_2 = \frac{5}{4}R$$

eller

$$\frac{R\sqrt{M}}{\sqrt{M}-\sqrt{m}} = \frac{5}{4}R,$$

hvilket gifver

$$M = 25m.$$

Om således den ena kroppen har 25 gånger så stor massa som den andra kroppen, så gifva afstånden från den större kroppen till den mindre och till de två punkter på kropparnes föreningslinie, hvilka lika attraheras af dessa begge kroppar, den behagliga treklangen, om dessa afstånd så att säga besträngas.

Samma svar skulle man erhållit, om man frågat efter de 2 punkter, som lika upplysas af två ljuskällor, eller som lika uppvärmas af två värmekällor eller som lika attraheras af två magneter.

Ex. 4. *Besmanet.** Besmanet är en häfstång med rörlig stödjepunkt (hylsa).

Sätt P = lastens vigt = vigten af det som skall vägas,
Q = besmanets vigt,
q = tyngdpunktens afstånd från den ända af besmanet, i hvilken lasten är upphängd,
x, y, z = afstånden på samma ända, der stödet eller handtaget (hylsan) skall ställas, då lasten är respektive = P, $P+1$ och $P+2$.

Besmanets ställning bör vara horisontal. Enligt jämnvigtslagen har man följande likhet:

$$Px = Q(q-x),$$

som gifver

* Namnet härledes af peso a mano (handvigt).

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{q} + \frac{P}{Qq}.$$

På samma sätt erhålles:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{q} + \frac{P+1}{Qq}$$

och

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{q} + \frac{P+2}{Qq}.$$

Af dessa 3 likheter får man:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y},$$

hvilket angifver det märkvärdiga förhållandet, att ett besman är genom sina delningsstreck uppdelad i en oupphörlig harmonisk progression.*

Vill man veta för hvilka delningsstreck afstånden till den belastade ändan äro som längderna på de strängar, hvilka gifva treklangen, har man att sätta

$$y = \frac{4}{5}x.$$

eller

$$1 + \frac{P+1}{Q} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{P}{Q}\right).$$

Denna likhet gifver trycket $(P+Q)$ på stödjepunkten att vara

$$P + Q = 4.$$

Således, då trycken på hylsan äro till hvarandra som talen 4, 5, 6, hvilka omvända förhålla sig som längderna på treklangssträngarne, äro hylsans afstånd från den belastade ändan som de stränglängder, hvilka gifva treklangen.

Ex. 5. *Rabatt- och diskontafdrag.* Sättes

k = begynnelsekapitalet,

s = slutkapitalet,

---

* Hr adjunkten d:r Simon Nordström och herr prof. Daug hafva gjort mig uppmärksamma på denna egendomlighet.

r = rabattafdraget eller räntan på k,

d = diskontafdraget eller räntan på s,

så har man som bekant sambanden

$$s = k + r,$$

$$r = \frac{kpt}{100},$$

$$d = \frac{spt}{100}.$$

Elimineras s och k ur dessa likheter, finner man

$$d = r\left(1 + \frac{pt}{100}\right),$$

hvilken formels likhet med formeln

$$s = k\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$$

är i ögonen fallande.

Ur dessa båda formler får man

$$\frac{k}{s} = \frac{r}{d}.$$

Då värdet på k ur denna likheten insättes i likheten

$$s = k + r,$$

uppkommer det vackra sambandet

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r},\ *$$

hvilket visar, att dubbla rabattafdraget (eller räntan på begynnelsekapitalet) är det harmoniska mediet mellan diskontafdraget (räntan på slutkapitalet) och slutsumman. Detta samband konstrueras lätt geometriskt. Uppritar man nämligen en cirkel ADB med AB ($2r$) till diameter, utdrager AB ett godtyckligt stycke och på förlängningen tager en punkt C så, att räta linien $ABC = s$ samt från C drager en tangent CD till cirkeln ADB och vidare från D nedfäller perpendikeln DE, så är AE det sökta diskontafdraget.

* På denna likhet har prof. Daug gjort oss uppmärksam.

Ehuru i ett problem af denna natur det är alltför mycket sökt att vilja finna någon glad treklang, kan det dock i analogi med föregående exempel vara af ett visst intresse att erfara, huru länge för en gifven procent ett kapital k skall vara utlånadt, för att talen s, $2r$ och d skola förhålla sig till hvarandra som treklangslängderna. Sätter man för detta ändamål

$$s = \frac{5}{4} . 2r,$$

finnes, med iakttagande af sambanden i föregående likheter,

$$r = \frac{2k}{3} \quad \text{och} \quad t = \frac{200}{3p}.$$

För $p = 5$, blir $t = 13\frac{1}{3}$ år.

Slutanmärkning. Det är i synnerhet exemplen 1—3, som äro af intresse. Det är nämnligen märkvärdigt, att de i naturen förekommande ackorden alltid äro de sköna, glada dur-ackorden och aldrig de vemodiga moll-ackorden, oaktadt förändringen från de förra till de senare är högst obetydlig. I dur-ackordet är nämnligen mellansträngen $\frac{4}{5}$ af den längre strängen, under det att i moll-ackordet den är $\frac{5}{6}$. Känslan häraf stämmer menniskan gladt, då hon vandrar i naturens rike. Hon är då benägen att i sin fantasi sätta strängar mellan stjernorna på himmelens fäste, mellan daggdropparne, mellan blommorna m. m., och att med sina fingrar anslå dessa strängar. De toner hon då tycker sig höra från dessa strängar ljuda harmoniskt och majestätiskt liksom Skaparens ord vid slutet af hvarje skapelsedag: »se det är allt ganska godt».

Om spektral-analysens användning för bestämmande af ljuskällans rörelse.

Af G. LUNDQUIST.

Ibland nyare tiders upptäckter inom fysikens område torde ingen finnas, som med afseende på mångfalden och betydelsen af sina tillämpningar kan mäta sig med spektral-analysen. Särskildt har dess användning inom astronomien redan visat sig i hög grad fruktbärande, och under det kännedomen om himlakropparnes fysiska beskaffenhet förut var ytterst ringa, i de flesta fall nödtorftigt ersatt af obestyrkta gissningar, har man nu i detta hänseende insamlat en rik skörd af fakta och är i stånd att draga slutsatser med samma säkerhet, som inom andra grenar af fysiken.

Ett af de nyaste resultat, man på detta område ernått, är, att spektroskopet lemnar medel i hand att uppskatta den hastighet, hvarmed ljuskällan förflyttar sig. Det är om de hithörande fenomenen, hvilkas utomordentliga vigt ej torde behöfva påpekas, vi nu gå att yttra några ord.

De satser, som kunna sägas ligga till grund för spektral-analysen äro, såsom bekant, hufvudsakligen följande:

1) Ljuset från en glödande fast eller flytande kropp, framsläppt i form af ett smalt knippe, gifver vid brytning i ett prisma ett s. k. kontinuerligt spektrum, och är sålunda sammansatt af strålar af alla grader af brytbarhet.

2) Ljuset från en glödande gas gifver ett diskontinuerligt, för hvarje gas olika och fullkomligt karakteristiskt spektrum och består således af endast ett visst antal bestämda ljussorter.

3) En gas absorberar af genomgående ljus precis samma ljussorter, som den sjelf i glödande tillstånd utsänder.

De slutsatser, man härur dragit med afseende på solen, torde äfvenledes vara allmänt kända. Solljuset gifver ett spektrum, som är till sin allmänna karakter kontinuerligt, men på en mängd ställen genomdraget af fina mörka linier, de s. k. Frauenhoferska. Alltså: det från solens inre delar utsända ljuset, som i och för sig skulle gifva ett kontinuerligt spektrum, passerar på sin väg ut i verldsrymden genom ett hölje af sannolikt glödande gaser, hvilka absorbera just de ljussorter, som de sjelfva skulle synas utskicka, om det från dem utgående, ofantligt svagare ljuset kunde uppfattas och undersökas; dessa ljussorter komma följaktligen att felas i solspektrum, d. v. s. motsvaras af mörka linier, och genom att jemföra dessa med spektra från en mängd kroppar, på ett eller annat sätt bragta i glödande gasformigt tillstånd, har man funnit det ofvannämnda absorberande gashöljet, solens atmosfer, till hufvudsaklig del bestå af vätgas, natrium, magnesium, jern och ett antal andra med dessa beslägtade ämnen.

En lysande bekräftelse vunno dessa åsigter vid 1868 års solförmörkelse, i det de s. k. protuberanserna, som vid flera föregående dylika tillfällen iakttagits, och om hvilkas natur man dittills sväfvat i ovisshet, då visade sig gifva ljusa linier i spektroskopet och sålunda i sjelfva verket vara endast mera utstående delar af den solen omgifvande gasmassan. Upptäckterna i denna riktning hafva sedan gjort snabba framsteg och vunnit i fullständighet, förnämligast genom en af *Lockyer* och *Janssen* uppfunnen metod, att äfven vid fullt solsken observera protuberanserna och solatmosferen. Såsom lätt inses, är det egentliga solljuset alltför bländande att under vanliga förhållanden tillåta oss se det svagare ljuset från de glödande gaserna, men genom deras metod kringgås denna olägenhet på ett enkelt sätt. Om nämligen det genom en fin springa infallande solljuset får brytas genom en hel följd af prismer efter hvarandra (Lockyer använder 7 och Young en dispersion svarande mot 13 flintglas prismer), så blir det kontinuerliga spektret, som genom den starka spridningen mycket förlänges, äfven i samma mån ljussvagt, under det att de ljusa, fullkomligt enfärgade linier, som härröra från gaserna, visserligen rycka längre isär, men ej förlora synnerligen i ljusstyrka, hvarföre de också kunna blifva synliga; i det samtidigt närvarande solspektret har man dessutom en skala, hvarmed deras läge mycket noggrant kan bestämmas. Insättes ett enligt denna princip inrättadt spektroskop i stället för okular i en astronomisk tub på sådant sätt, att den genom strålarnes brytning i objektivet uppkomna bilden just faller på den lilla skärm, hvari springan är anbragt, så erhålles ett instrument, ett telespektroskop, hvarmed man beqvämt kan undersöka hvilken del af solen som helst. Häri visa sig nu ljusa linier, de flesta härrörande från vätgas, ej allenast i spektra från protuberanserna och andra delar af solkanten, utan äfven från vissa punkter af sjelfva solskifvan, synnerligast de i solfläckarnes närhet liggande s. k. facklorna. Genom att gifva springan en passande ställning och vidd, har man dessutom i samma instrument ett medel att bestämma gaslagrets tjocklek och form. Af alla dessa undersökningar framgår, att solatmosferen kan anses sammansatt af tvenne delar, en undre, som utgöres af alla de gaser, hvilka genom sin absorption åstadkomma de Frauenhoferska linierna och en öfre, till hufvudsaklig del bestående af vätgas, och att detta yttersta gashölje visserligen sträcker sig rundt omkring solen, men är mycket ojemt fördeladt och ständigt underkastadt förändringar, vanligen långsamma, men stundom af en häftighet, hvarom det är svårt att bilda sig en klar föreställning. Locker omtalar t. ex. ett tillfälle, då en protuberans af omkring 4200 mils höjd inom 10 min. spårlöst försvann. Att solfläckarne vid dessa omstörtningar spela en betydande, ehuru ännu ej fullt känd rol, kan på goda grunder antagas.

Härpå häntyda också de fenomen, vi nu gå att beskrifva. Vid observationer med telespektroskopet af solfläckar och angränsande ställen af solskifvan har Lockyer och efter honom äfven andra ofta funnit, * att allteftersom olika delar af solbilden öfverfarits af springan, de mot vätgasen svarande Frauenhoferska linierna *C* och *F*, liggande den förra i den röda, den senare i den grönblå delen af spektrum, undergått de märkligaste förändringar, synnerligast den senare. Än är den böjd eller utsvälld, än flyttad åt ena eller andra sidan om dess vanliga plats, utan att något dylikt kunnat märkas hos de omkringliggande linierna, än försvinner den delvis eller helt och hållet, än ersättes den till och med af en ljus linie. Detsamma har han ock iakttagit i fråga om protuberanserna. I den ena delen af synfältet, i det kontinuerliga spektret, intager då *F*-linien, allt som springan flyttas, stundom ett, stundom ett annat läge, under det att i den andra den deremot svarande ljusa vätgas-linien framblixtrar än här, än der i dess närhet. Att dessa förflyttningar stå i något sammanhang med de våldsamma förändringar i vätgas-massornas fördelning, som redan förut på annat sätt blifvit ådagalagda, är ett nära till hands liggande antagande. Återstår att undersöka, om och huru man deri kan finna ett mått på hastigheten af dessa rörelser.

Såsom bekant, föreställer man sig numera ljuset såsom en vågrörelse i ett mycket fint, öfverallt i verldsrymden utom och inom alla kroppar befintliga ämne, som benämnes etern. Då en kropp säges vara i glödgning, betyder det ingenting annat, än att dess partiklar oskillera med utomordentlig snabbhet fram och tillbaka i alla möjliga riktningar. Derigenom uppväckes i den omkringliggande etern vågrörelser, som utbreda sig åt alla håll och de bland dem, hvilkas vågor ej äro längre än omkring 700, och ej kortare än 400 milliondelar af en millimeter, uppfattas af vårt öga såsom ljus. Eterpartiklarne svänga dervid i transversella, d. v. s. mot ljusstrålarnes riktning vinkelräta banor, och allteftersom dessa vibrationer försiggå

* Proceedings of Royal Society 1869 o. följ.

med större eller mindre liflighet, allteftersom ljusvågorna äro kortare eller längre, erfar ögat ett olika intryck, ljuset säges vara olika färgadt. Dock är ögats iakttagelseförmåga i detta hänseende temligen begränsad, så att en jemförelsevis betydlig olikhet i våglängd erfordras, för att det med bestämdhet skall kunna angifva en skilnad i färg. Ett vida noggrannare medel att särskilja olika ljussorter äger man i deras egenskap att brytas olika vid öfvergången från ett ämne till ett annat. Dervid är den lagen gällande, att afvikningen är större i samma mon som våglängden är mindre, således minst för det röda ljuset, som har de längsta, störst för det violetta, som har de kortaste våglängderna.

Enligt detta uppfattningssätt har ljusets teori att uppvisa rätt många anknytningspunkter med ljudets, utan att dermed vara fullt analog. Liksom ljuset är ljudet en vågrörelse, ej i etern, men i en materiel kropp t. ex. luften. Liksom ögat skiljer mellan ljus af olika färger, så förnimmer örat hos olika toner en olikhet i höjd, likaledes beroende endast på den hastighet, hvarmed luftpartiklarne vibrera. Äfven det ofvan beskrifna, af Lockyer observerade fenomenet har sin motsvarighet inom akustiken, och till dess tolkning bör således ett från detta område hämtadt, till en viss grad analogt exempel kunna bidraga.

En person, stående invid en jernbana, då ett lokomotiv med ljudande hvisselpipa ilar förbi, märker lätt en plötslig sjunkning i tonen i samma ögonblick det passerar. Orsaken härtill är lätt att angifva. Den ur pipan hastigt urströmmande ångan stöter mot kanten af en liten klocka, försätter denna i vibrationer på ett sådant sätt, att den ömsom vidgar sig, ömsom drager sig tillsamman ett visst antal (n) gånger i sekunden, och denna rörelse åstadkommer i sin ordning en följd af förtätningar och förtunningar i den omgifvande luften. Till utsändandet af ett sådant par, en ljudvåg, åtgår alltså en tid af $\frac{1}{n}$ sekund. Då lokomotivet är stillastående, utbreda sig dessa vågor lika åt alla håll med den hastighet, som tillkommer ljudet, c meter i sekunden, indelande hvarje sträcka af denna storlek i n lika delar, och sålunda blir längden af hvarje våg

$$\lambda = \frac{c}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Är åter lokomotivet i rörelse med en hastighet af a meter i sekunden, hinner ljudkällan under den tid af $\frac{1}{n}$ sekund, som den behöfver för att utskicka en våg, sjelf förflytta sig ett stycke $\frac{a}{n}$, hvarföre de i detta fall utsända vågorna blifva i rörelsens riktning så mycket kortare, i den motsatta så mycket längre än förut, således våglängden

$$\lambda' = \lambda \pm \frac{a}{n},$$

under det att de i den deremot vinkelräta riktningen gående vågorna tydligen ej undergå någon förändring. Om värdet på n, taget ur eqv. (1) insättes i detta uttryck, erhålles

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 \pm \frac{a}{c}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

der $+$ eller $-$ är att taga, allteftersom den ifrågavarande vågen fortplantar sig åt ett håll motsatt eller sammanfallande med ljudkällans rörelseriktning. Då ljudkällan är i hvila, mottager trumhinnan i en lyssnande persons öra n stötar i sekunden, hvilka tillsammans uppfattas såsom en viss ton. I motsatt fall åter blir deras antal $n' = \frac{c}{\lambda'}$ eller ur eqv. (1) och (2)

$$\frac{n'}{n} = \frac{c}{c \pm a}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

och tonen således förändrad.

Antages lokomotivets hastighet a t. ex. till 11.3 meter, och svängningstalet n af hvisselpipans ton $= 2673$, så blir, med antagande af $c = 340$ meter, $n' = 2759$ då lokomotivet närmar sig, och = 2587 då det aflägsnar sig; den iakttagna tonen sjunker sålunda vid förbifarten från *f* till *e* i 4-strukna octaven.

Skulle i stället observatorn vara i rörelse med hastigheten *a*, så erhålles på liknande sätt samma uttryck, der + eller — är att använda, allteftersom observatorn rör sig från eller till ljudkällan. För öfrigt torde knappast behöfva påpekas, att alla dessa formler äro fullt allmänna, gällande för en ljudkälla hvilken som helst.

Ofvanstående betraktelser äga, såsom redan är nämdt, sin tillämpning äfven i fråga om ljuset, ehuru förhållandet der ej är fullt så enkelt. Fyra olika omständigheter kunna nämligen dervid tänkas utöfva sitt inflytande: rörelse hos den *lysande kroppen*, hos det *absorberande mediet*, då ljuset passerar igenom ett sådant, och slutligen hos de apparater, hvarmed ljuset uppfattas, *spektroskopet* och *ögat*, alla dessa rörelser i förhållande till etern, tänkt såsom stillastående, och endast för så vidt de försiggå i riktning af sammanbindningslinien mellan den lysande kroppen och ögat.

Hvad först sjelfva *ljuskällans* rörelse beträffar, så är dess inverkan på ljusets beskaffenhet ej så lätt att på förhand bestämma. Analogien med ljudet är nämligen här ej fullständig, ty en ljudande kropps partiklar svänga vanligen endast fram och tillbaka ungefär i samma plan, under det en lysande kropps smådelar måste tänkas vibrera åt alla möjliga håll, och rörelsens öfvergång till luften i förra fallet och till etern i det senare blifva sålunda egentligen ej med hvarandra jemförbara. Förefinnes emellertid en sådan inverkan, böra det utskickade ljusets våglängder, i öfverensstämmelse med hvad vi ofvan funno vara händelse med ljudet, förminskas, då kroppen närmar sig ögat, och förlängas, då den derifrån aflägsnar sig. I fråga om glödande fasta och flytande kroppar, hvilka utsända ljussorter af alla slag, kan dock en sådan förändring aldrig blifva märkbar. För att inse detta, behöfver man blott erinra sig, att utom de vågrörelser i etern, som af ögat uppfattas såsom ljus, äfven andra finnas, hvilkas våglängder äro för korta eller för långa att göra ett sådant intryck, och att dessa i föreliggande fall undergå samma modifikationer som de förra. Om t. ex. ett närmande, således en förminskning af alla vågrörelsernas våglängder eger rum, så blifva några af dessa, det yttersta violetta ljusets, för korta för att vidare kunna ses, andra åter förut osynliga s. k. värmestrålar, nu synliga såsom rödt ljus; hvad som på ena hållet går förloradt, återfås på det andra, och liksom förut innehåller det utskickade ljuset alla möjliga slag af ljussorter. Annat blir förhållandet med en glödande gas. Om den är stadd i rörelse, måste under nämnde förutsättning i dess diskontinuerliga spektrum en förflyttning af de ljusa linierna åt ena eller andra sidan om deras rätta platser kunna blifva märkbar. En dylik förskufning har också iakttagits och på detta sätt tolkats af Lockyer, och någon annan förklaring af detta fenomen är hittills ej angifven.*

Att det *absorberande mediets* rörelse måste utöfva ett inflytande på absorptionen är vida lättare att förutse. Antag t. ex. att en ljusstråle, sammansatt af alla möjliga ljussorter, på sin väg till vårt öga passerar igenom en vätgasmassa. Vore denna stillastående, skulle deri absorberas den grönblå ljussort, som vätgasen sjelf vid glödgning utsänder, hvars våglängd är 486.1 milliondelar af en millimeter, och i strålens spektrum skulle efteråt den Frauenhoferska linien *F* uppträda. År deremot gasmassan i rörelse, framströmmar den t. ex. i riktning mot ljuskällan, så blir förhållandet ej mer detsamma. Den nyssnämnda

* Det enda mig bekanta försök att på experimentel väg utreda denna fråga finnes omnämdt i en äldre uppsats af *Ångström* (Optiska Undersökningar, Kongl. Vetenskaps-Akad. Handl. 1852), hvarvid han som ljuskälla begagnade de metallpartiklar, som i elektriska gnistan i glödande gasformigt tillstånd utkastas från polträdarne. Oaktadt deras hastighet bör vara betydlig, kunde likväl icke någon förskjutning af deras spektral-linier upptäckas.

ljussortens svängningar träffa nu vätgasen tätare än eljest, dess våglängder förefalla densamma, så att säga, allt för korta, och i stället absorberar den en annan ljussort, som för tillfället tyckes vara den rätta, men som i sjelfva verket har något för långa våglängder. Denna ljussort, mindre brytbar än den förra, kommer således att saknas i strålens spektrum, d. v. s. *F*-linien blir, om vätgas-massans hastighet är tillräckligt stor, märkbart förflyttad åt den röda sidan af spektrum. Aflägsnar sig åter gasen från ljuskällan, kommer förflyttningen naturligtvis att äga rum åt motsatt led. Har ej gasmassans alla delar samma hastighet, så absorberas på olika ställen något olika ljussorter: absorptionslinien kan då synas utbredd delvis eller utefter hela sin längd, eller ock förete andra oregelbundenheter.

Frågan om inverkan af *spektroskopets* rörelse på vår uppfattning af det genomgående ljusets brytbarhet står i det närmaste samband med den om eterns fördelning inom materiella kroppar. Den sannolikaste åsigten härom, först uttalad af *Fresnel* och bekräftad genom ett bekant experiment af *Fizeau*, hvari visas, att ljusets hastighet i vatten är till en viss grad beroende af dettas rörelsetillstånd, synes vara, att etern till en del är bunden i kropparne genom deras molekylers attraktion, till en del åter fri. Deraf följer,* att i spektroskopet den genomgående strålens deviations-vinkel visserligen i någon mon förändras genom det brytande prismats förflyttning i rymden, men för att ljuset skall infalla längs observations-tubens optiska axel, måste man gifva denna en sådan riktning, att nämnda förändring fullständigt eller till större delen upphäfves, och den aflästa vinkeln blir densamma, som om spektroskopet stode stilla. För öfrigt är denna afvikning sannolikt ganska ringa, åtminstone har den hittills undgått alla direkta efterforskningar.

---

* Fresnel, Oeuvres complètes, II, pag. 627. Paris 1868.

Genom *ögats* rörelse skulle deremot en variation i vår uppfattning af ljusets färg kunna uppkomma, i det näthinnan vid rörelse till ljuskällan på samma tid träffas af flera, i motsatt fall af färre ljusvågor, än om det vore stillastående, alldeles som i ofvan anförda, från akustiken hemtade exempel den observerade tonens höjd var beroende af örats rörelse. Så skulle t. ex. grönt ljus kunna förefalla antingen mera blått eller mera gult. Emellertid är vårt ögas största möjliga hastighet så obetydlig i förhållande till ljusets, att en sådan färgvexling aldrig kan ens märkas, än mindre med noggranhet uppmätas. Ty antag, att jorden befunne sig i den delen af sin bana, der hennes rörelse är riktad åt samma håll, som solsystemets i rymden, så förflytta vi oss i denna och i förhållande till stjernor, belägna på rörelsens utdragna riktningslinie, med den största hastighet, som öfverhufvud för oss kan ifrågakomma, nämligen jordens 2.74 + solsystemets 0.74 = 3.48 mil i sekunden. Den i ögat uppkommande förändringen i våglängd hos dessa stjernors ljus, beräknad enligt formeln (2) på sid. 165, som naturligtvis äfven här är att tillämpa, — a sättes 3.48 och c = ljusets hastighet = 27600 mil — befinnes då för t. ex. den gröna ljussort, hvars våglängd är 520 milliondelar af en millimeter, ej utgöra mer än 0,07 af en sådan enhet, under det att en förändring af minst 30 à 40, ja kanske ännu flera dylika är nödvändig för att en variation i färg skall af ögat märkas.

Af ofvanstående betraktelser draga vi nu den slutsats, att då rörelsen hos de apparater, hvarmed ljuset uppfattas, ej visat sig utöfva något märkbart inflytande, en observerad förflyttning af en ljus linias läge måste antagas bero endast af sjelfva ljuskällans rörelse. Likaså är en förskufning af en Frauenhofersk linia, under förutsättning att ljuskällan utskickar alla möjliga ljussorter, endast att tillskrifva den absorberande gasens rörelse och fullkomligt oberoende af den förras, hvarföre denna också ganska väl kan deltaga i den senares rörelse, såsom förhållandet är t. ex.

med solen, utan att absorptionsfenomenet derigenom i någon mon förändras. För öfrigt är vid alla hithörande observationer, som endast gå ut på att jemföra det relativa läget af tvenne mörka eller ljusa linier, samtidigt observerade med samma apparat, den möjliga inverkan af dennes rörelse tydligen för båda densamma och resultatet således deraf fullständigt oberoende.

Alla de förut beskrifna, af Lockyer först iakttagna förändringarne och oregelbundenheterna i *F*-linien och den deremot svarande ljusa vätgas-liniens läge och utseende finna på detta sätt sin otvungna förklaring och efter all sannolikhet har man häri också erhållit ett mått på den hastighet, hvarmed vätgas-massorna i det yttersta lagret af solatmosferen förflytta sig. De mot dessa förändringar i brytbarhet svarande förändringarne i våglängd kunna nämligen genom jemförelse med de närliggande fixa Frauenhoferska linierna, hvilkas våglängder alla finnas angifna i *Ångströms* bekanta Atlas öfver Solspektrum, med säkerhet uppmätas på 0.1 när af en milliondels millimeter, och om man med Lockyer antager formeln (2) på sid. 165 äfven här äga giltighet, — en fullt berättigad förutsättning i fråga om den mörka liniens förflyttningar, mindre väl grundad deremot med hänseende till den ljusa liniens — kan den lysande eller absorberande gasens hastighet sedermera derur med lätthet beräknas. Härvid är dessutom att ihogkomma, att endast de rörelser, som försiggå på sammanbindningslinien mellan ljuskällan och ögat, åstadkomma dylika fenomen, hvarföre också de upp- och nedgående strömmarnes hastighet iakttages på midten af solskifvan, de tangentiellas åter vid dess kant.

De på denna väg vunna resultaten bekräfta fullständigt de förut uttalade åsigterna om dessa rörelsers utomordentliga häftighet. En hastighet af 3 à 4 mil är mycket vanlig, och ej sällan rasa hvifvelstormar af betydligt — 250 à 300 mils — omfång, hvari vätgas-massorna drifvas omkring med den nästan otroliga hastigheten af 20 svenska mil i sekunden.

Dessa i solspektrum observerade fenomen stå för öfrigt ej enstaka; i ett fixstjerne-spektrum hade *Huggins* redan förut gjort en liknande iakttagelse af fullt ut lika stor betydelse. * Genom hans och *Secchis* arbeten är ådagalagdt, att alla fixstjernor, liksom solen, förete kontinuerliga, af mörka linier genomdragna spektra, och då dessa liniers läge för olika stjernor är betydligt olika, har man häri det säkraste bevis för, att de äro sjelflysande kroppar, i fysiskt hänseende analoga med solen. I somliga fixstjernors spektra uppträda vätgasens absorptionslinier, i andras icke. Till de förra hör Sirius. Genom upprepade jemförelser mellan denna stjernas spektrum och vätgasens i elektriska gnistan, särdeles svåra och mödosamma observationer i följd af det förras ljussvaghet, fann Huggius, att *F*-linien i detta var något utbredd men ej symmetriskt i förhållande till den motsvarande ljusa linien i vätgas-spektrum, utan öfvervägande åt den röda sidan, och detta så mycket, som i medeltal svarade mot en förlängning i vågläng af 0.11 milliondels millimeter. Förklaringen häraf innehålles i det föregående. Under samma antaganden, som ligga till grund för Lockyers beräkningar, måste denna olikhet i våglängd förorsakas af en relatif rörelse mellan den elektriska gnistan och den absorberande vätgasen i Sirius' atmosfer uppgående till 6.2 mil i sekunden. En del af denna hastighet tillkommer den förra, som, åtföljande jorden, vid observationstillfället rörde sig från Sirius 1.8 mil i sekunden; det återstående måste härröra från dennas egen rörelse. Alltså förflyttar sig denna himlakropp för närvarande bort ifrån vårt solsystem med en hastighet af 4.4 mil. Betänker man nu, att detta är utefter ljusstrålens riktningslinia räknadt, och att vanliga teleskopiska observationer gifva hastigheten vinkelrätt deremot, så inses huru

* Philosophical Transactions 1868 p. 529.

lyckligt dessa båda metoder komplettera hvarandra för studiet af stjernornas egna rörelse.

Huggins har i samma syfte undersökt åtskilliga andra stjernors spektra, men kan ej ännu med säkerhet i något annat uppvisa en dylik förskjutning.

Denna framställning, om än kort, torde dock vara tillräcklig att gifva en öfverblick öfver denna frågas närvarande ståndpunkt. Ehuru förklaringen af denna klass af fenomen i ett och annat ännu måste anses bristfällig, är dock deras stora betydelse för utvidgandet af vår kännedom om himlakropparnes rörelse och fysiska beskaffenhet ej att underskatta, och ännu stå vi säkerligen endast vid början af de upptäckter, som på denna väg komma att göras.

AFDELNING IV.

Anmälan af böcker.

Weström, C. A. *Lärobok i Geometri.* II. Stockholm 1871. Alb Bonniers förlag. 48 sidor 8:o. Häft. Pris 50 öre.

Detta arbete, som utgör en fortsättning af författarens år 1867 utgifna plana geometri, innefattar planimetri och läran om storheter i rymden samt deras mätning.

Arbetet har förtjensten af att vara kort.

Mot detsamma kunna dock följande anmärkningar göras:

1. En kropp anses lika med summan af ett oändligt antal plan. (VIII. 7 och 15).

2. En cirkel anses som en månghörning med ett oändligt antal sidor (VI. 10), en cylinder som en prisma med ett oändligt antal kanter (VIII. 12), en kon som en pyramid med ett oändligt antal kanter (IX. 6).

3 Alla linier anses kommensurabla sinsemellan. Förf. antager nämligen, att man genom oupphörlig tudelning af en gifven linie slut-

ligen kan komma till en del, som jämnt innehålles i en annan gifven linie (VI. 1, VIII. 1, IX. 1).

4. Förf:s bevis af lemmat på sid 19 (= Eukl. I. 25) förutsätter hvad som skall bevisas och är således ett cirkelbevis.

5. Förf:s påstående, att de två prismor, i hvilka en parallelepiped genom diagonalplanet delas, kunna helt och hållet passas i hvarandra, är falskt Rigtigt bevis för denna sats finnes i geometriska läroböcker af Kjellin, Lithander, Legendre (Harfvefeldt), Lidberg, Hellström, Mundt-Bergroth m. fl.

Dessa anmärkningar visa, att arbetet icke är godt.

Stockholm den 30 Oktober 1871

F. W. HULTMAN.

Satser af STEN BOIJE,

elev i 7:de klassen vid Strengnäs elementarläroverk.

Prop. IV (XIV enl. Björling).

Om uti $\triangle$:na ABC och abc $\wedge A = \wedge a$, $\wedge B = b$, $\wedge C = c$; så skall
1) $AB : ab = AC : ac$, 2) $AC : ac = CB ; cb$, 3) $CB : cb = BA : ba$.

Afskär af

AC $AE = ac$ (I: 3)* och drag $ED // CB$ och $EF // AB$ (I: 31).

Då är fig. $BDEF$ en prgrm (def.) och $BF = DE$ (I: 34),

Eftersom

$$\wedge A = \wedge a, \quad \wedge AED = \wedge ACB \text{ (constr. o. I: 29)} = \wedge acb$$

och

$$AE \text{ gjord } = ac, \quad \text{är} \quad \triangle ADE \cong \triangle abc \text{ (I: 26)}$$

och följaktligen

$$AD : ab = AE : ac, \quad AE : ac = ED : cb, \quad ED : cb = DA : ba$$

eller efter altern. (V: 19, Cor. 3):

$$AD : AE = ab : ac, \quad AE : ED = ac : cb, \quad ED : EA = cb : ba.$$

1) Eftersom

$$ED // CB,$$

måste

$$AB : AC = AD : AE \text{ (VI: 2, Cor.)} = ab : ac \text{ (V: 10)}$$

---

* Citaten till Bok. I—IV äro enligt Lindmans edition, och till Bok. V—VI enligt Björlings proportionslära.

och således genom altern. (V: 19, Cor. 3):

$$AB : ab = AE : ac;$$

hvilket var det första som skulle bevisas

2) Efter

$$EF \parallel AB,$$

måste

$AC : BC = AE : BF$ (VI: 2, Cor.) $= AE : DE$ (V: 12 o. 10) $= ac : cb$ (V: 10) eller genom altern. (V: 19 Cor. 3)

$$AC : ac = CB : cb;$$

hvilket var det andra som skulle bevisas.

3) Efter nu är bevist, att AB, AC och CB äro i ordning proportionela mot ab, ac och cb, så slutes af likhet, att

$$CB : cb = BA : ba \text{ (V: 23)};$$

hvilket var det tredje som skulle bevisas

Prop. V (XV enl. Björling).

Om uti $\triangle$:na ABC och abc AB, AC, CB äro i ordningen proportionela mot ab, ac, cb; så skola $\wedge$:na A, B, C vara $=$ hvar sin i ordning af $\wedge$:na a, b, c.

Samma konstruktion som i prop. IV.

Eftersom

$$ED \parallel CB \text{ är } \triangle AED \infty \triangle ACB \text{ (I: 29)},$$

hvaraf följer (enl. föreg. prop. 4) 1) att

$$AE : AD = AC : AB = ac : ab \text{ (V: 10)},$$

således genom alten. (V: 19, Cor. 3):

$$AE : ac = AD : ab,$$

hvaraf

$$AD = ab \text{ (V: def. 7, Cor 1)};$$

och 2) att

$$AE : ED = AC : CB = ac : cb \text{ (V: 10)}$$

således genom altern. (V: 19, Cor. 3)

$$AE : ac = ED : cb,$$

hvaraf

$$ED = cb \text{ (V: def. 7, Cor. 3)}.$$

Alltså är

$$ADE \,\underline{\underline{\infty}}\, \triangle acb \text{ (I: 8)},$$

$$\wedge a = \wedge A, \quad \wedge b = \wedge ADE = \wedge B, \quad \wedge c = \wedge AED = C.$$

Hvilket skulle bevisas.

Prop. VI (XVI enl. Björling).

Om uti $\triangle$:na ABC och abc $AB:AC = ab:ac$ och $\wedge A = \wedge a$; så skall ock

$$\wedge B = \wedge b. \quad \wedge C = \wedge c.$$

Samma konstruktion i prop. IV.

Eftersom

$ED \parallel CB$, är $AE:AD = AC:AB$ (VI: 2, Cor.) $= ac:ab$ och således genom altern. (V: 19, Cor. 3)

$$AE:ac = AD:ab,$$

hvaraf

$$AD = ab \text{ (V: def. 7, Cor. 3)}.$$

Alltså är

$\triangle ADE \cong \triangle abc$ (I: 4), $\wedge b = \wedge ADE = B$, $c = \wedge AED = C$. Hvilket skulle bevisas.

Prop. VII (XVII enl. Björling).

Om uti $\triangle$:na ABC' och abc $\wedge C = \wedge c$ och $AB:AC = ab:ac$ och $\wedge$:na B och b äro antingen spetsiga i båda eller icke spetsiga i båda, så skall

$$\wedge A = \wedge a, \quad \wedge B = \wedge b.$$

Samma konstruktion som i prop. IV.

Eftersom

$ED \parallel CB$, är $AE:AD = AC:AB$ (IV: 2, Cor.) $= ac:ab$ (V: 10), således genom altern. (V: 19, Cor. 3)

$$AE:ac = AD:ab,$$

hvaraf

$$AD = ab.$$

Alltså är

$\triangle ADE \cong \triangle abc$ (I: 26 A.), $\wedge a = \wedge A$, $\wedge b = \wedge ADE = \wedge B$. Hvilket skulle bevisas.

Aritmetiska problem,*

gifna vid Kongl. Lärarinneseminariet den 27 Maj 1871 åt de afgående eleverna. 3 st. på 3 timmar.

1. År 1870 belupo sig svenska folkets utgifter för åttonde hufvudtiteln (undervisningsväsendet, fattigvården m. m.) till 4 957 200 rdr. I år uppgå dessa utgifter till 5 158 000 rdr. Med huru många procent öfverstiga således detta årets utgifter 1870 års?

2. Dela 4 000 rdr mellan A och B i förhållandet 7: 9. Huru mycket får hvardera?

3. En moder är 60 år, hennes dotter är hälften så gammal. När var modern 4 gånger så gammal som dottern?

4. En person lottar bort en klocka, värd 378 rdr. Om han säljer lotten till 3 rdr 40 öre stycket, förlorar han lika mycket, som han vinner, om han för hvarje lott erhåller 5 rdr. Huru många lotter säljer han?

5. En köpman betalar 216 rdr för ett visst antal centner af en vara; för samma summa köper han sedermera af samma vara, men erhåller då 3 centner mindre än förut, emedan varan under tiden stigit med 1 rdr på hvarje centner. Huru många centner köpte han första gången?

6. Befolkningarne i Asien och Afrika utgöra, den förra $\frac{8}{3}$, *den senare* $\frac{11}{15}$ *af Europas befolkning. Huru stor är Afrikas befolkning? Man anser, att Asiens befolkning utgör 725 millioner innevånare.*

7. Hvarföre skall man vid division i bråk multiplicera dividenden med divisorns inverterade värde?

8. Beräkna uttrycket

$$\frac{0{,}9 - \frac{3}{20}}{\frac{0{,}5}{2} - \frac{1}{5}} + \frac{6 - 0{,}4}{\left(10 : \frac{1}{0{,}16}\right) - 2{,}4}!$$

9. Om man beräknar för ett skolbarn 200 kubikfot luft, för huru många skolbarn är då en sal beräknad, hvars längd är 60 fot, bredd 40 fot och höjd 12 fot?

10. Hvarföre är ett tal jämnt delbart med 5, om det slutas på 5 eller noll?

---

* Insända lösningar å dessa af flickor eller skolynglingar emottagas med nöje af

F. W. HULTMAN
under adress: Stockholm.

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1871.

För latinlinien.

1. Att genom en gifven punkt på en cirkelperiferi draga en tangent, då cirkelns medelpunkt ej kan konstrueras.

2. Att konstruera en rätvinklig triangel, då man känner dess ena kaet och höjden mot hypotenusan.

3. Att konstruera en cirkel så, att dess periferi går genom en gifven punkt, tangerar en gifven linie och har en radie af gifven längd.

4. Att skära en gifven rät linie så, att rektangeln af båda delarne blir lika med qvadraten på en fjerde del af hela linien.

5. Att upprita ett parallelltrapizium, då man känner storleken af båda parallela sidorna och de båda diagonalerna.

6. Att på en gifven cirkels periferi söka de punkter, hvilkas afstånd från tvenne gifna punkter äro lika stora.

7. Att i ett gifvet cirkelsegment inskrifva en qvadrat.

8. Att konstruera rötterna till eqvationen

$$x^2 - 5x = -3.$$

---

9. Någon utlånar 1000 rdr, en del efter 4 procent och en annan del efter 5 procent. Årliga räntan för hela summan uppgår till 46 rdr 40 öre. Frågas efter delarnes storlek?

10. Dela en linie, som är 10 alnar lång, i 2 sådana delar, att rektangeln af hela linien och den ena delen må vara dubbelt så stor som rektangeln af båda delarne.

11. Produkten af två tal är 10. Summan af qvadraterna, som fås genom hvardera talets dividering med det andra utgör $2^9/_{10}$. Hvilka äro dessa tal?

12. Upplös eqvationen

$$\sqrt{x^2+7} = 6 - \tfrac{1}{2}(x+1)!$$

13. Upplös eqvationen

$$x^2 - 5x + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = -4 + \sqrt{2}!$$

14. Från ett och samma ställe utgå två personer samtidigt och i samma rigtning men med olika hastighet. Efter någon tid är afståndet mellan dem $^1/_4$ mil. Då vänder den, som hunnit längst och går för att möta den *andre, hvilken han träffar efter förloppet af en tid, som till den nyssnämnda förhåller sig, som 1 till 5. Hela tiden från skilsmessan till mötet är 1 timme 48 minuter. Hur fort gå de båda personerna?*

15. Två personer gingo samtidigt från ett ställe A till ett annat B, beläget på 4 mils afstånd från det förra. Den ene gick $^1/_3$ mil i timmen, den andre $^1/_2$ mil. Båda hvilade under sin färd, den ene tre gånger så länge som den andre. Samtidigt inträffade de i B. Hur lång hvilotid tog hvardera, och hur lång tid använde båda på färden från A till B?

För reallinien.

16. Att upprita en rhomb, då man känner en vinkel och summan af diagonalerna.

17. Att dela en cirkel i två sådana segmenter, att vinkeln i det ena är dubbelt så stor, som vinkeln i det andra.

18. Att omkring en gifven cirkel omskrifva en femhörning, som är likvinklig med en gifven femhörning.

19. Att i en gifven sfer inskrifva en tetraëder.

20. Att upprita en parallelogram, som är likformig med hvar och en af de parallelogrammer, som uppkomma, då midtpunkterna på hans båda större sidor förenas genom en rät linie.

21. Att upprita en triangel, då man känner två vinklar och de motstående sidornas skilnad.

22. Att upprita en cirkel, som går genom två gifna punkter och skär en gifven cirkels periferi midt uti.

23. Att från en punkt utom en cirkel draga en sekant, så att rektangeln, som innehålles af densammas utom och inom cirkeln liggande delar, blir lika stor med en gifven rätlinig figur.

---

24. $x + \sqrt{xy} = 60;\ y + \sqrt{xy} = 40.$

25. En eqvation af andra graden är af formen: $x^2 + ax + b = 0$; *att uppställa en eqvation, hvilkens rötter äro n gånger så stora som den gifnas.*

26. Man känner om en ångbåt att den på 7 timmar tillryggalägger vägen fram och åter mellan två ställen, belägna vid en flod och på $2^1/_3$ mils afstånd från hvarandra. Derjemte vet man, att strömmen har en hastighet af $^1/_4$ mil i timmen. Hvad är ångbåtens hastighet i stillastående vatten?

27. En person afreser från en ort och tillryggalägger första dagen 3 mil och hvarje följande dag $^1/_2$ mil mer än den närmast föregående. Samtidigt reser en annan person från samma ort och utefter samma väg 5 mil dagligen. När har den förre upphunnit den senare?

28. Med huru stort belopp skall en skuld af 12,000 rdr, å hvilken beräknas $5^1/_2$ procent ränta, årligen amorteras, för att vara fullt godtgjord med den 30:de inbetalningen?

29. En ockrare utlånade 500 rdr emot en skuldsedel på 700 rdr att betalas räntefritt efter tre år. Huru många procent tog han, då han beräknade ränta på ränta.

30. En stympad rät kon rymmer 24 kannor. Dess höjd är lika med skilnaden mellan bottenradierna, och förhållandet mellan dessa är 5 : 3. *Huru stora äro de?*

31. Höjden i en triangel är 5 tum och motstående sida 7 tum. Vinkeln mellan höjden och en af de närliggande sidorna är 23°. Bestäm triangelns sidor och vinklar.

---

32. Med hvilken hastighet bör en kropp kastas lodrätt nedåt från ett ställe, för att under sin rörelse efter 3 sekunder upphinna en annan kropp, som fallit från samma ställe 2 sekunder, innan den förstnämnda kroppen sattes i gång?

33. Angif svängningstalet för den ton, som uppkommer vid blåsning i pipan till en vanlig nyckel af $^3/_4$ tums djup, under förutsättning af att ljudets hastighet i luft är 1100 fot i sekunden.

34. En jemntjock skifva, i form af en liksidig triangel och af $7^1/_2$ skålp. vigt, är vridbar kring en af sina sidor samt uppbäres från motstående vinkelspets genom ett snöre, hvars andra ända är fästad i en midt öfver vridningsaxeln belägen punkt. Skifvan antages vara horizontel, och snöret af samma längd som triangelsidan. Beräkna spänningen i snöret.

35. Ett cylinderformigt dricksglas af 3 tums djup invändigt är, med botten vänd uppåt, till halfva sin inre höjd nedsänkt i vatten, hvarvid vattnet antages stå lika högt inom och utom kärlet. Om glaset varsamt upplyftes ur vattnet, så att ingen luft dervid får inströmma, tills nedre kanten befinner sig i jemnhöjd med det yttre vattenbrynet, så kommer vattnet att stå högre invändigt, än utanför kärlet. Beräkna höjdskilnaden mellan vattenytorna för det fall, då barometern visade 25 tum och qvicksilfrets täthet i förhållande till vattnet var 13,6.

36. En persons syndistans är 8 tum. Huru många gånger förstoradt ser han ett föremål genom en lupp af en tums brännvidd?

37. I ett glasrör, som är graderadt i lika stora volymdelar, upptager en qvicksilfverpelare 47 delar vid 12° C. Huru många delar upptager han *vid 90° C., då qvicksilfrets kubiska utvidgningskoëfficient är* 0,00018 *och glasets liniära* 0,000009?

38. Om styrkan hos den galvaniska ström, som vid 0° och 25,6 *tums lufttryck under 1 minut förmår utveckla* e n *kubiktum knallgas, väljes såsom enhet för strömstyrkan, frågas styrkan hos den ström, som vid 24 tums tryck och 15° kan under 10 minuter utveckla 180 kubiktum vätgas. Luftens utvidgningskoëfficient är* 0,00367.

Norska läroböcker.

1. *Lærebog i Fysik for Middelskolen.* Af H. CHRISTIE, professor ved Universitetet i Christiania. (Christiania P. T. Malling 1871. 190 sid. Pris inb. 55 skill.).

Indhold.

Om faste, flydende og luftformige Legemers Egenskaber. Om Magnetisme. Om Elektricitet. Om Blanding, mekanisk (Luften), Kemisk (Vandet). Om Forbrænding (Flammen). Om Varmen. Om Ligevægt och Bevægelse. Om Lyden. Om Lyset

2. *Kortfattet Lærebog i Arithmetik og Algebra med Exempelsamling*, utarbeidet for Middelskolen af I. A. BONNEVIE, Overlærer ved Kristiansands Kathedralskole. (Kristiania P. T. Malling 1871, 165 sid. Pris 48 skill.).

Indhold.

Indledning. I Bog. Hele tal. II Bog. Brøk. III Bog. Ligninger af første grad. IV Bog. Potenser, Rodstørelser og Logarithmer. V Bog. Ligninger af anden Grad.

3. *Kortfattet Lærebog i Plangeometri*, utarbeidet med særligt hensyn till Middelskolens Behov af I. A. BONNEVIE, Overlærer ved Kristiansands Kathedralskole. (Kristiania P. T. Malling 1871, 123 sid. Pris 40 skill.).

Indhold.

Indledning. I Bog. Retteliniers gjensidige Stilling. Polygoner. II Bog. Cirkelen. III Bog. Rumstørelsers Forhold til hinanden. Vinkelns och Liniers Udmaaling. IV Bog. Polygoners Fladeindhold. V Bog. Ligedannede Polygoner. VI Bog. Regulære Polygoners og Cirklers Beregning.

Traité Élémentaire des Fonctions Elliptiques

par D:r O. J. Broch (Christiania P. T. Malling 1867, 281 pag.)

Table des matières.

†

Konstförvandt Frans Robert Johnsson

född d 26 febr. 1840, död d. 31 okt. 1871.

Det namn, för hvilket tidskriften nu fäster dödstecknet, tillhörde en man, hvars tidiga bortgång redaktionen med verklig saknad beklagar; ty den mannen har i sin mon och det på ett hedrande sätt bidragit i det gemensamma arbetet för tidskriftens framgång. Johnsson mottog vid tidskriftens början uppdraget att vara hennes sättare; och hvar och en, som under de fyra år tidskriften fortvarat haft att läsa korrektur på inlemnade uppsatser, drar sig säkerligen till minnes, med hvilken tillfredsställelse blandad med förvåning man ögnade igenom korrekturarket, icke rätt vetande, om man hade att göra med ett reviderark i stället för ett första korrektur. Hvar och en, som har sig bekant, hvilken ojämförligt större svårighet sättning af matematik erbjuder framför sättning af vanlig text, ity att den matematiska formeln erfordrar för att korrekt och väl byggas icke allenast konstfärdighet i sättareyrket, utan äfven skarpsinnighet och omdöme att med ledning af ett ofta nog otydligt manuskript anvisa hvarje tecken sin rätta plats, erkänner säkerligen med nöje, efter gjord bekantskap med Johnsson, att man hos den anspråkslöse arbetaren med vanlig folkskoleuppfostran kan träffa prof på intelligens, som skulle kunna räknas för en prydnad hos mången, som bär i flere instanser kontrollerade anspråk på bildning. Också studerade Johnsson på lediga stunder i hemmet matematik, så vidt förmågan att reda sig på egen hand medgaf. Flere af tidskriftens problem på första afdelningen funno i honom en intresserad om ock icke bekant lösare. — Johnsson hade haft anställning på det akademiska tryckeriet i 7 år. För $3\frac{1}{2}$ år sedan insjuknade han i lunginflammation, efter hvilken tid hans helsa var svag och ojämn. Sistlidne vår efter ett svårare sjukdomsanfall mottog han af läkaren med lugn undergifvenhet det budskap att han snart måste skiljas hädan. — Frid öfver hans minne.

Fig. 10.

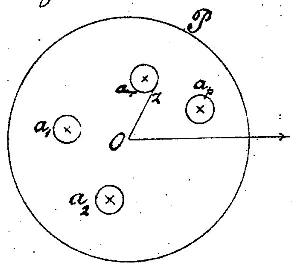


Fig. 11.

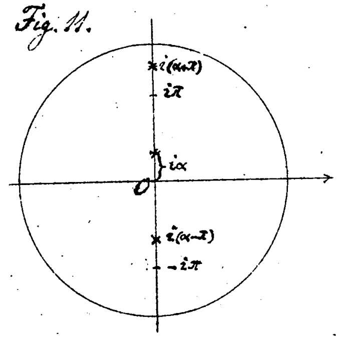


Fig. 13.

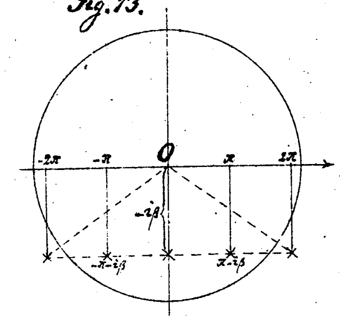


Fig. 9.

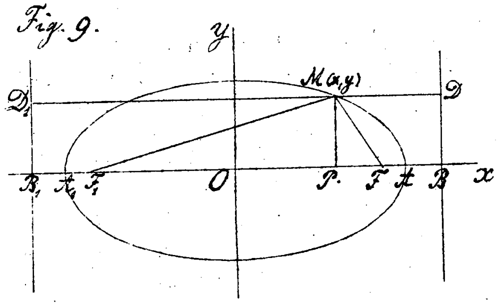


Fig. 14.

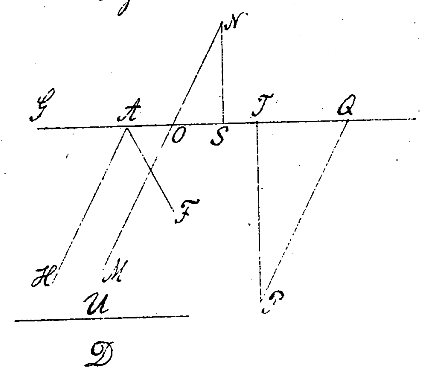


Fig. 12.

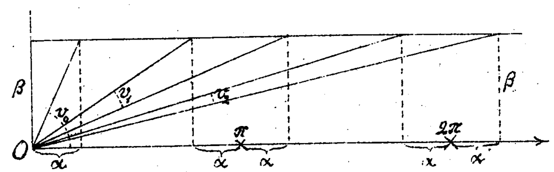


Fig. 15.

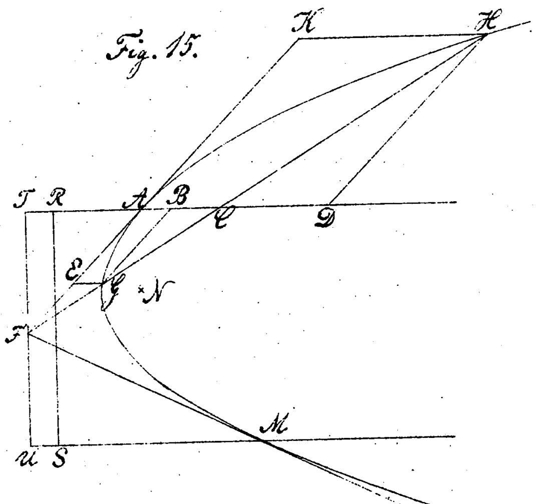


Fig. 16.

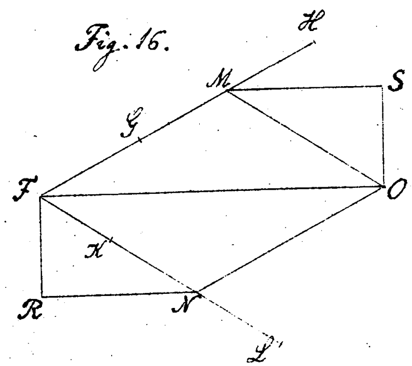
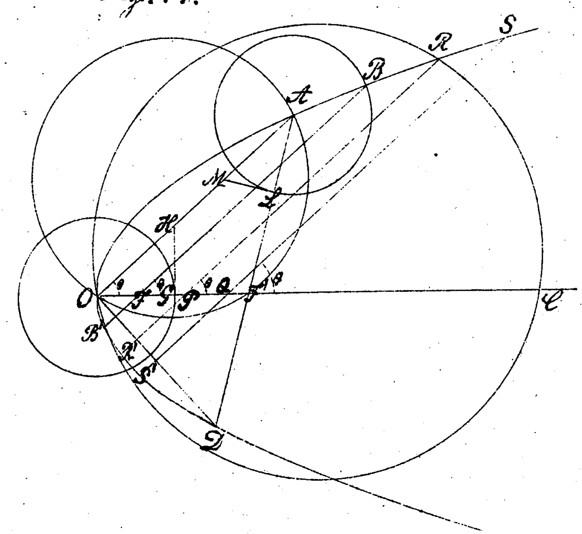


Fig. 17.



AFDELNING I.

Om tredje grads funktionen med en variabel.

Af lektor K. P. NORDLUND.

På det att de unge läsarena, för hvilka denna uppsats är skrifven, må fatta undersökningen af den allmänna tredje-grads-funktionen, vilja vi såsom inledning undersöka följande enskilda fall af densamma:

$$x^3 - 7x^2 + 11x + 1 \quad \ldots\ldots \quad A$$

$$x^3 - 7x^2 + \frac{49}{3}x - \frac{309}{27} \quad \ldots\ldots \quad B$$

$$x^3 - 7x^2 + 18x - \frac{46}{3} \quad \ldots\ldots \quad C.$$

Om man i

$$x^3 - 7x^2 + 11x + 1 \quad \ldots\ldots \quad A$$

insätter ett bestämdt värde i st. f. x, erhåller A *ett* bestämdt värde. Insättes t. ex. i st. f. x värdet 2, erhåller A värdet 3. Detta värde 3 kan äfven A erhålla för tvenne andra värden, nämligen:

$$\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{5 - \sqrt{21}}{2},$$

hvilka vi finna på följande sätt:

A divideras med $x - 2$, då qvoten $x^2 - 5x + 1$ och resten 3 erhållas, hvadan A är likabetydande med

$$(x-2)(x^2-5x+1)+3\,,$$

hvilket uttryck blir 3 endast för värdena

$$2,\ \frac{5+\sqrt{21}}{2} \text{ och } \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

Anm. De värden, för hvilka en x-funktion erhåller lika värden, kalla vi *korresponderande* x-värden i afseende på funktionen.

Sålunda äro $2,\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ och $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ korresponderande x-värden i afseende på A.

Genom ett dylikt förfaringssätt finna vi de korresponderande x-värdena jemte 7 vara $\sqrt{-11}$ och $-\sqrt{-11}$ och värdet på A 78, de korresponderande x-värdena jemte 1 vara 5 och 1 och värdet på A 6.

För att närmare undersöka de korresponderande x-värdena i afseende på A, söka vi de värden, som jemte μ (μ antages vara reel och oberoende af x) äro korresponderande. Genom division af A med $x-\mu$ finna vi A vara likabetydande med

$$(x-\mu)(x^2+(\mu-7)x+\mu^2-7\mu+11)+\mu^3-7\mu^2+11\mu+1 \ldots A_1$$

för hvarje μ-värde.

De korresponderande x-värdena jemte μ äro således

$$\frac{7-\mu+\sqrt{\frac{64}{3}-3\left(\mu-\frac{7}{3}\right)^2}}{2} \quad \ldots\ldots \quad \alpha_1$$

och

$$\frac{7-\mu-\sqrt{\frac{64}{3}-3\left(\mu-\frac{7}{3}\right)^2}}{2} \quad \ldots\ldots \quad \alpha_2\,.$$

Anm. I denna uppsats hafva vi sökt gifva uttrycken den för undersökningen tydligaste formen

Vid aktgifvandet på de trenne korresponderande x-värdena μ, α_1 och α_2 finna vi, att

1) Summan af tre korresponderande x-värden hvilka som helst är 7 (koëfficienten för x^2 med ombytt tecken).

2) Summan af tre korresponderande x-värdens hvilka som helst tvåledigа produkter är 11 (koëfficienten för x).

3) Produkten af tre korresponderande x-värden hvilka som helst minskad med värdet på A för ett x-värde lika med något bland dem är -1 (den af x oberoende termen med ombytt tecken).

4) Skilnaden mellan de jemte μ korresponderande x-värdena α_1 och α_2 är

$$\sqrt{\frac{64}{3} - 3\left(\mu - \frac{7}{3}\right)^2},$$

hvilken erhåller sitt största värde $\sqrt{\frac{64}{3}}$, då $\mu = \frac{7}{3}$ ($\frac{1}{3}$ af koëfficienten för x^2 med ombytt tecken).

5) När $3\left(\mu - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{64}{3}$ eller $\mu = -\frac{1}{3}$ eller 5, äro α_1 och α_2 lika, i förra fallet med $\frac{11}{3}$ och i det senare med 1.

6) När $3\left(\mu - \frac{7}{3}\right)^2 < \frac{64}{3}$ eller μ är något medelvärde mellan $-\frac{1}{3}$ och 5 äro α_1 och α_2 reela och olika.

7) När $3\left(\mu - \frac{7}{3}\right)^2 > \frac{64}{3}$ eller $\mu < -\frac{1}{3}$ eller > 5, äro α_1 och α_2 imaginära.

Anm. En funktion säges erhålla ett *maximi-värde* M för $x = a$, om funktionens värden för x-värden i grannskapet af a (såväl större som mindre än a) äro mindre än M och ett *minimivärde* M_1 för $x = a_1$, om funktionens värden för x-värden i grannskapet af a_1 äro större än M_1.

Sättes $\mu = -\frac{1}{3}$ i A_1, erhålles

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 - \frac{94}{27} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_2.$$

Sättes $\mu = 5$ i A_1, erhålles

$$(x-5)(x-1)^2+6 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_3.$$

A_2 och A_3 äro likbetydande med A.

8) För $x = \frac{11}{3}$ är $A_2 = -\frac{94}{27}$.

För x-värden i grannskapet af $\frac{11}{3}$ är $A > -\frac{94}{27}$.

Således har A ett *minimivärde* $-\frac{94}{27}$, då $x = \frac{11}{3}$.

9) För $x = 1$ är $A_3 = 6$.
För x-värden i grannskapet af 1 är $A < 6$.
Således har A ett *maximivärde* 6, då $x = 1$.

10) Från $x = -\infty$ till $x = -\frac{1}{3}$ växer A från $-\infty$ till $-\frac{94}{27}$.

„ $x = -\frac{1}{3}$	„ $x =$	1	„		A	„ $-\frac{94}{27}$	„	6.
„ $x = 1$	„ $x =$	$\frac{11}{3}$	aftager		A	„ 6	„	$-\frac{94}{27}$.
„ $x = \frac{11}{3}$	„ $x =$	5	växer		A	„ $-\frac{94}{27}$	„	6.
„ $x = 5$	„ $x =$	∞	„		A	„ 6	„	∞.

11) När $k < -\frac{94}{27}$, har eqv. $A = k$ (k oberoende af x) *en* reel rot mindre än $\frac{1}{3}$ och *två* imaginära.

12) När $k = -\frac{94}{27}$, har eqv. $A = k$ rötterna $-\frac{1}{3}$, $\frac{11}{3}$ och $\frac{11}{3}$.

13) När k är något medelvärde mellan $-\frac{94}{27}$ och 6, har eqv. $A = k$ *tre* reela och olika rötter.

Den minsta är något af medelvärdena mellan $-\frac{1}{3}$ och 1.

Den andra (i afseende på storleken) något af medelvärdena mellan 1 och $\frac{11}{3}$.

Den tredje (i afseende på storleken) något af medelvärdena mellan $\frac{11}{3}$ och 5.

Anm. Eqv. $A = 0$ har sina tre rötter reela och olika och deras gränsvärden äro de ofvan uppgifna, emedan 0 är ett af medelvärdena mellan $-\frac{94}{27}$ och 6. I allmänhet har en tredje grads eqvation, hvars ena membrum är 0, sina tre rötter reela och olika, då den funktion, som utgör det andra membrum, har *maximi-* och *minimi-*värden och dessa hafva olika tecken.

14) När $k = 6$, har eqv. $A = k$ rötterna 1, 1 och 5.

15) När $k > 6$, har eqv. $A = k$ *en* reel rot större än 5 och två imaginära.

Dels för att åskådliggöra det ofvan sagda, dels för att påpeka några andra egenskaper hos A, hvilka hufvudsakligen hafva geometrisk betydelse, hafva vi i fig. 18 uppritat en del af den kroklinie $CQMND$, som motsvarar A.

Anm. För korthetens skull kalla vi denna kroklinie i det efterföljande K.

Upplysningsvis meddelas följande:

AOB är grundlinien (x-axeln),

O begynnelsepunkten (origo) och

e den antagna enheten.

De positiva x-värdena räknas till höger om O, de negativa till venster.

Funktionens A positiva värden räknas *ofvanom* och dess negativa *nedanom* grundlinien.

Följande liniers storlekstal i förhållande till längdenheten e äro:

$$OE=\frac{1}{3},\ OF=1,\ OG=\frac{7}{3},\ OH=\frac{11}{3},\ LK=\sqrt{\frac{64}{3}},\ IG=\frac{34}{27},$$

$$EQ=HN=\frac{94}{27},\quad MF=ST=6,\quad PI=IR=\frac{4}{3}.$$

Anm. I st. f. uttrycket: »storlekstal i förhållande till längdenheten e» användes i det efterföljande blott »storlekstal».

Vilja vi med användning af K söka värdet på A för ett bestämdt värde på x t. ex. r, afsättes på OAB ifrån O r längdenheter e (åt höger om r är positiv, åt venster, om r är negativ). Ifrån ändpunkten af detta stycke fälles mot BOA en vinkelrät linie och utdrages, så att den träffar K, storlekstalet till denna linie (med tecknet $+$, om den faller *ofvanom*, med tecknet $-$, om den faller *nedanom* grundlinien) är värdet på A.

Vilja vi finna det eller de x-värden, som jemte r äro korresponderande, drages genom den punkt (p), der den vinkelräta linien träffade K en med BOA parallel linie, då följande fall kunna inträffa:

1) Att linien endast träffar K i p, hvilket händer, då p ligger på QC eller KD.

I detta fall äro de jemte r korresponderande x-värdena imaginära.

2) Att linien träffar K i tvenne andra punkter, hvilket händer, då p ligger på QM, MN eller NK.

I detta fall äro de jemte r korresponderande x-värdena reela och olika.

3) Att linien tangerar K i p och skär den i en annan, hvilket händer, då p är någon af punkterna M eller N (maximi- och minimi-punkterna).

I detta fall finnes blott *ett* korresponderande x-värde jemte r.

4) Att linien skär K i p och tangerar i en annan punkt, hvilket händer, då p är någon af punkterna Q eller K.

I detta fall äro de jemte r korresponderande x-värdena lika.

Ifrån denna eller dessa punkter på K fällas vinkelräta linier mot BOA, storlekstalen till de stycken af BOA, som ligga mellan O och de vinkelräta linierna (tagna med tecknet $+$, om styckena ligga till höger, med tecknet $-$, om de ligga till venster om O) äro de jemte r korresponderande x-värdena i afseende på A.

Vilja vi finna de reela rötterna till eqvationen $A = f$ (f är beroende eller oberoende af x), uppritas den linie, som motsvarar f, med samma grundlinie, utgångspunkt, enhet och rigtningar. Värdena på x, som motsvara denna linies skärningspunkter med K, äro de reela rötterna till eqvationen $A = f$.

Anm. 1. De värden, som man genom detta förfaringssätt erhåller, äro i de flesta fall blott närmevärden, men felen blifva mindre ju noggrannare linierna äro uppritade och mätningen verkställes.

Anm. 2. De imaginära värdena kunna ej på detta sätt erhållas.

Vi företaga oss en undersökning af K.

Divideras A med $(x-2)(x-4)$ befinnes

$$(x-1)(x-2)(x-4)+9-3x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_4$$

vara likbetydande med A.

$9-3x$ antager samma värden som A_4 eller A endast för x-värdena 1, 2 och 4, hvadan den räta linie, som motsvarar $9-3x$ går endast genom de punkter på K, som motsvaras af x-värdena 1, 2 och 4.

Divideras A med $(x-2)(x-3)$ befinnes

$$(x-2)^2(x-3)+13-5x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_5$$

vara likabetydande med A.

$13-5x$ antager samma värden som A_5 eller A endast för x-värdena 2 och 3. Insättas i A_5 x-värden i grannskapet af 2 (såväl större än, som mindre än 2) blir $13-5x$ större än A_5. Insättas deremot x-värden i grannskapet af 3, blir $13-5x$ större än A_5, om de äro mindre än 3, och mindre än A_5, om de äro större än 3, hvadan den räta linie, som motsvarar $13-5x$ endast går genom de punkter på K, som motsvara x-värdena 2 och 3 samt tangerar K i den förra punkten och skär i den senare.

För att närmare undersöka denna fråga, dividera vi A med $(x-m)(x-n)$ (m och n antagas vara reela och oberoende af x), då

$$\left.\begin{array}{r}(x-m)(x-n)(x-(7-m-n))+(m^2+mn+n^2-7(m+n)+11)x+1\\ +7mn-mn(m+n)\end{array}\right\}..A_6$$

befinnes vara likbetydande med A för hvarje värde på m och n.

På ofvan angifna sätt kan visas, att den räta linie, som motsvarar

$$(m^2+mn+n^2-7(m+n)+11))x+1+7mn-mn(m+n)$$

endast går genom de punkter på K, som motsvaras af x-värdena m, n och $7-m-n$.

16) Äro m, n och $7-m-n$ olika, går linien genom tre punkter på K.

17) Äro två lika t. ex. $m=7-m-n$ går den endast genom två punkter och tangerar K i den, som motsvarar $x=m$.

18) Äro alla *tre* lika, hvilket endast inträffar, då m och n och således äfven $7-m-n$ äro $\frac{7}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right.$ af koëfficienten för x^2 med ombytt tecken), tangeras och skäres K af linien i den mot $x=\frac{7}{3}$ svarande punkten.

Anm. Punkten (I), som motsvarar $x=\frac{7}{3}$, kallas omböjningspunkt (inflexionspunkt), emedan K der ändrar böjning. Bågen MI är nämligen konkav åt venster och

IN åt höger. Storlekstalet till denna punkts afstånd från BOA är $\frac{34}{27}$.

Summan af m, n och $7-m-n$ är 7 (koëfficienten för x^2 med ombytt tecken), hvaraf följer:

19) Om en rät linie skär K i *tre* punkter, så är summan af de mot skärningspunkterna svarande x-värdena lika med 7.

Anm. Satsen 1 är till en del ett enskildt fall af 19.

20) Om en rät linie tangerar K i en punkt och skär i en annan, så är summan af det x-värde, som motsvarar skärningspunkten och 2 gånger det x-värde, som motsvarar tangeringspunkten äfven 7.

21) Tre gånger det x-värde, som motsvarar omböjningspunkten är äfven 7.

Sättas i st. f. m och n i A_6 värdena $\frac{7}{3}+a$ och $\frac{7}{3}-a$, hvilkas aritmetiska medelvärde är $\frac{7}{3}$, erhålles

$$\left(x-\left(\frac{7}{3}+a\right)\right)\left(x-\left(\frac{7}{3}-a\right)\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)+\left(a^2-\frac{16}{3}\right)x+\frac{370}{27}-\frac{7}{3}a^2$$

likabetydande med A.

Den räta linie, som motsvarar

$$\left(a^2-\frac{16}{3}\right)x+\frac{370}{27}-\frac{7}{3}a^2 \quad \ldots\ldots \quad \gamma$$

går genom de punkter på K, hvilkas motsvarande x-värden äro $\frac{7}{3}+a$, $\frac{7}{3}-a$ och $\frac{7}{3}$ (x-värdet, som motsvarar omböjningspunkten).

Anm. 1. Är $a \pm = \sqrt{\frac{16}{3}}$ blir γ $\frac{34}{27}$ som motsvarar den räta linie, som genom omböjningspunkten drages parallel med grundlinien.

Anm. 2. Storlekstalet till LI (se fig. 18) är således $\sqrt{\frac{16}{3}}$. I satsen 4 visades, att LK^{s} storlekstal var $\sqrt{\frac{64}{3}}$; således är $LI = IK$. Af samma sats 4 följer äfven, att af alla räta linier, som dragas genom punkter på MN parallela med grundlinien och begränsas af MQ och NS är LK den största.

Anm. 3. Är $a = 0$ blir γ
$\frac{370}{27} - \frac{16}{3}x$, hvilket uttryck motsvarar tangenten i omböjningspunkten.

Anm. 4. Utdrages MP (se fig. 18) så, att den träffar tangenten i omböjningspunkten, så är stycket af den förlängda MP mellan M och tangenten hälften af MP.

Af denna sats inses lätt, huru man skall finna tangenten i omböjningspunkten.

Af ofvanstående följer:

22) Om ifrån tvenne punkter på grundlinien, belägna på lika afstånd från den punkt, der vertikalen från omböjningspunkten mot grundlinien träffar den, fällas vinkelräta linier mot grundlinien och utdragas så, att de träffa K, så skall den räta linie, som sammanbinder de begge punkterna på K gå genom omböjningspunkten.

23) Om en rät linie drages genom omböjningspunkten parallel med grundlinien och ifrån punkter på denna linie, belägna på lika afstånd från omböjningspunkten, fällas vinkelräta linier mot denna linie och utdragas så, att de träffa K, så skola dessa vinkelräta linier blifva lika stora, och linien, som sammanbinder punkterna på K, vara midt i tu skuren i omböjningspunkten.

24) K är i omböjningspunkten delad i två kongruenta delar.

Anm. De punkter på K, som komma att sammanfalla, då den ena delen af K lägges på den andra, så att de täcka hvarandra, kallas *kongruenspunkter*.

25) Maximi- eller minimi-punkterna äro kongruenspunkter, hvilkas räta sammanbindningslinie går genom omböjningspunkten och är i denna skuren midt i tu.

26) Punkter på K, hvilkas räta sammanbindningslinie går genom omböjningspunkten, äro kongruenspunkter.

Sättes i A_6 $m = n$, erhålles formen

$(x-m)^2(x-(7-2m))+(3m^2-14m+11)x+1-2m^3+7m^2 \ldots A_7$.

Anm. Formen A_7 kan äfven erhållas genom division af A med $(x-m)^2$.

Den räta linie, som motsvarar

$$(3m^2-14m+11)x+1-2m^3+7m^2 \quad . \quad . \quad . \quad \gamma_1$$

tangerar K i den punkt, som motsvarar $x = m$ och skär K i den, som motsvarar $x = 7-2m$.

Storlekstalet till det stycke af grundlinien, som ligger mellan vertikalen mot grundlinien från punkten, som motsvarar $x = m$ och vertikalen mot grundlinien från omböjningspunkten är $\pm\left(\frac{7}{3}-m\right)$.

Storlekstalet till stycket af grundlinien, som ligger mellan vertikalen mot grundlinien från punkten, som motsvarar $x = 7-2m$ och vertikalen från omböjningspunkten mot grundlinien är $\pm 2\left(\frac{7}{3}-m\right)$.

Anm. Tecknet $+$ gäller, då $m < \frac{7}{3}$.

„ $-$ „ „ $m > \frac{7}{3}$.

Häraf följer:

27) Om en rät linie tangerar K i en punkt och skär i en annan och den del af denna linie, som ligger mellan dessa punkter på K, delas genom en vinkelrät linie dragen mot grundlinien genom omböjningspunkten, så är den delens, som ligger närmast tangeringspunkten, projektion

på grundlinien hälften af den andra delens projektion och således är den förra delen hälften af den sednare.

Anm.. Med ledning af denna sats löses lätt problemet: »Att ifrån en punkt på K draga de begge tangenterna till K».

28) Om från tvenne kongruenspunkter p och r dragas räta linier, som tangera K i p och r och förlängas, så att de träffa K i p_1 och r_1, så skall den del af grundlinien, som begränsas af vertikalerna från p_1 och r_1 mot grundlinien, blifva delad i 4 lika delar genom vertikalerna från p, omböjningspunkten och r mot grundlinien.

Anm. Emedan maximi- och minimi-punkterna M och N äro kongruenspunkter, så följer, att (se fig. 18) ET är delad i 4 lika delar genom punkterna F, G och H.

Enligt Analytiska Geometrien utmärker koëfficienten för x i γ_1

$$3m^2 - 14m + 11 \quad \text{eller} \quad 3\left(m - \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \ \ldots\ldots \ \delta$$

tangenten för den vinkel, som den mot γ_1 svarande räta liniens öfver grundlinien liggande del bildar med den del af grundlinien, som ligger till höger om nämde linie.

Anm. Denna vinkel kalla vi i det efterföljande v.

Vid aktgifvande på δ, finna vi, att

29) Från $m = -\infty$	till $m = 1$	*aftager*	δ från	∞	till 0 och
			v „	90°	„ 0°.
„ $m = 1$	„ $m = \frac{7}{3}$	„	δ „	0	till $-\frac{16}{3}$ och
			v „	180°	till $100^\circ 37' 11''$.
„ $m = \frac{7}{3}$	„ $m = \frac{11}{3}$	*tilltager*	δ „	$-\frac{16}{3}$	till 0 och
			v „	$100^\circ 37' 11''$	till 180°.
„ $m = \frac{11}{3}$	„ $m = \infty$	„	δ „	0	till ∞ och
			v „	0	„ 90°.

För två värden på m, hvilkas aritmetiska medelvärde är $\frac{7}{3}$, antager δ lika värden.

Häraf följer, att

30) Tangenterna till K i tvenne kongruenspunkter äro parallela.

För $m = 1$ och $m = \frac{11}{3}$ blir $\delta = 0$ och således äro de mot γ_1 för dessa m-värden svarande räta linierna parallela med grundlinien. I det föregående är visadt, att maximi- och minimi-punkternas motsvarande x-värden äro 1 och $\frac{11}{3}$, hvaraf följer, att

31) Tangenterna i maximi- och minimi-punkterna äro parallela med grundlinien.

För $m = \frac{7}{3}$ erhåller δ, såsom lätt synes, sitt minsta värde $-\frac{16}{3}$. Insättes i γ_1 $m = \frac{7}{3}$, erhålles

$$-\frac{16}{3}x + \frac{370}{27},$$

hvilket uttryck, såsom förut är visadt, motsvarar tangenten i omböjningspunkten.

Anm. Tangenten i omböjningspunkten och den genom omböjningspunkten mot grundlinien fälda vinkelräta linien bilda med hvarandra 4 vinkelöppningar. Inom två af dessa midt emot hvarandra stående ligger K. Hvarje rät linie, som drages genom omböjningspunkten och ligger inom dessa vinkelöppningar skär K dessutom i tvenne punkter. Hvarje rät linie, som drages genom omböjningspunkten inom de begge andra vinkelöppningarna, träffar ej K i någon annan punkt.

Vi öfvergå nu till en undersökning af de begge återstående funktionerna

$$x^3 - 7x^2 + \frac{49}{3}x - \frac{309}{27} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad B$$

och

$$x^3 - 7x^2 + 18x - \frac{46}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad C.$$

I fig. 19 är uppritad en del af den linie, som motsvarar B och i fig. 20 en del af den, som motsvarar C med samma antaganden, som i det föregående blifvit gjorda, angående enhet, rigtning o. s. v.

Genom samma förfaringssätt, som förut blifvit använda finner man, att satserna 1 (Obs.! Koëfficienterna för x^2 är -7 i både A, B och C) 16—25, 28 och 30 äfven äro gällande för funktionerna B och C samt de linier, som motsvara dem. Satserna 2 och 3 gälla äfven, om koëfficienterna i A utbytas mot de motsvarande i B och C.

I likhet med K hafva de mot B och C svarande linierna omböjningspunkter, hvilka äro betecknade med I och motsvaras af $x = \frac{7}{3}$.

Deremot hafva B och C inga maximi- och minimivärden.

De begge korresponderande x-värdena till ett reelt x-värde i B äro imaginära, undantagandes, då $x = \frac{7}{3}$, i hvilket fall de begge korresponderande värdena äro $\frac{7}{3}$.

De begge korresponderande x-värdena till hvarje reelt x-värde i C äro alltid imaginära.

Med iakttagande af samma förfarings- och beckningssätt, som i inledningen till satsen 29 blifvit använda, finner man i afseende på linien, som motsvarar B, att

från $m = -\infty$ till $m = \frac{7}{3}$ aftager δ från ∞ till 0 och
v „ 90^0 „ 0^0
„ $m = \frac{7}{3}$ „ $m = \infty$ tilltager δ „ 0 „ ∞ och
v „ 0^0 „ 90^0

samt i afseende på linien, som motsvarar C, att

från $m = -\infty$ till $m = \frac{7}{3}$ aftager δ från ∞ till $\frac{5}{3}$ och
v „ 90^0 „ $59^0 2' 10'$,
„ $m = \frac{7}{3}$ „ $m = \infty$ tilltager δ „ $\frac{5}{3}$ „ ∞ och
v „ $59^0 2' 10''$ till 90.

Anm. 1. Tangenten i omböjningspunkten på linien, som motsvarar B är parallel med grundlinien och motsvaras af $\frac{34}{27}$.

Anm. 2. Tangenten i omböjningspunkten på linien- som motsvarar C, motsvaras af $\frac{5}{3}x - \frac{71}{27}$.

Både B och C tilltaga, då x tilltager.

(Forts. följer.)

Om vinkelns tredelning.*

Af G. D.

Låt den gifna vinkeln, som skall delas i tre lika delar, vara C (fig. 21); förena punkterna A och B på benen och omskrif en cirkel omkring $\triangle ABC$. Tag midtpunkten

* Denna konstruktion af vinkelns tredelning är i sak ingenting annat än den välbekanta tredelningen förmedelst hyperbeln ($e = 2$) [jfr

S på AB och drag $SD \perp AB$. Det gäller nu att finna sådane punkter P och P' på periferien, att bågen BP = bågen PP' = bågen $P'A$ eller, som är detsamma, kordan BP = kordan PP' = kordan $P'A$. Låt Q vara träffpunkten mellan SD och PP', då $PQ \perp SD$ samt $PQ = \frac{1}{2} PP'$ eller som är detsamma,

$$PQ = \tfrac{1}{2} BP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Då nu punkten P har ett sådant läge på periferien, att vilkoret (1) är uppfyldt, så är $\wedge PCB = \frac{1}{3} \wedge ACB$ och således tredelningen verkstäld.

För att finna punkten P göra vi följande konstruktion. Vi dela AB i tre lika delar och sätta $a = \frac{1}{3} AB$; vidare afsätta vi på förlängningen af AB stycket $AE = a$. Enligt Eukl. II, 13 eller 12 fås, om vi för korthetens skull sätta $EP = R$ och $BP = r$, följande likhet:

$$R^2 = (4a)^2 + r^2 - 2.4a(\tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}r)$$

som efter en enkel reduktion blir

$$R = r + 2a \quad \text{eller} \quad R - 2a = r \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Vi få alltså följande regel för finnandet af punkten P: *markera på bågen BD en punkt p, der vi kunna antaga P ungefärligen ligga; tag E till medelpunkt och rita en cirkel genom p; tag vidare B till medelpunkt och $Ep - 2a$ till*

Tychsens Tidskrift for Mathematik 1868, Aug.—Sept.]. Vi hafva anfört denna förenkling af hyperbelkonstruktionen, emedan förutsättningarna för beviset äro ytterst små och det praktiska utförandet enkelt och lätt (ofta nog äro två korspunkter q och q_1, om de ligga på hvar sin sida om bågen BD och honom temligen nära, tillräckliga att förenade genom en rät linie angifva läget af punkten P så pass nära, som det för praktiska behof är nödvändigt). Det gifves äfven andra konstruktioner af vinkelns tredelning såsom förmedelst Pascals snäcka, qvadratricen m. f., hvilka dock icke torde kunna jämföras i enkelhet med den här anförda. Nybörjaren må derför icke tro, att han har att göra med någon ny upptäckt i geometrien, då han sysselsätter sig med problemet om vinkelns tredelning. Detta problem är nämligen, såsom vi här antydt, löst på flerfaldiga sätt, med konstruktions postutat, som gälla andra kroklinier än cirkeln.

radie och rita en cirkel, som skär den nyss ritade cirkeln i q; upprepa detta förfaringssätt för nya skärningspunkten q_1, q_2 etc., till dess vi träffa en skärningspunkt q_n, som antingen ligger på bågen BD eller ock så nära honom, som vi någonsin behaga. Denna punkt q_n anger då antingen fullständigt eller ock så nära vi behaga läget af den sökta punkten P.

Approximatif rotutdragning.

Af D—G.

I nedanstående formler betyda:

N, A, a positifva qvantiteter hvilka som helst,
b en positif qvantitet mindre än 1,
m, n hela tal större än noll,
α en positif eller negatif qvantitet, hvars numeriska värde ligger mellan 0 och 1,
B en positif- eller negatif qvantitet.

1.

Med tillhjelp af den generella formeln

$$\frac{r^n - s^n}{r - s} = r^{n-1} + r^{n-2} . s + \ldots + r . s^{n-2} + s^{n-1}$$

erhålles för $r = 1 + a$ och $s = 1$

$$n(1+a)^n > \frac{(1+a)^n - 1}{a} > n,$$

hvaraf först och främst följer, att

$$\left.\begin{array}{l} (1+a)^n < \dfrac{1}{1-na} \\ na < 1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

om

och vidare, att

$$(1+a)^n > 1 + na \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

2.

Insättes nu i (1) $\frac{1}{n}\frac{a}{1+a}$ i stället för a, så erhålles utan något vilkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\frac{a}{1+a}\right)^n < 1+a,$$

hvaraf

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} > \left(1+\frac{1}{n}\frac{a}{1+a}\right)^m$$

och i stöd af (2)

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} > 1+\frac{m}{n}\frac{a}{1+a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Insättes åter i (2) $\frac{1}{n}\frac{b}{1-b}$ i stället för a, så får man

$$\left(1+\frac{1}{n}\frac{b}{1-b}\right)^n > \frac{1}{1-b}$$

hvaraf

$$\left(1+\frac{1}{n}\frac{b}{1-b}\right)^m > \frac{1}{(1-b)^{\frac{m}{n}}}.$$

Om nu

$$\frac{m}{n}\frac{b}{1-b} < 1,$$

så följer af (1), att

$$(1-b)^{\frac{m}{n}} > 1-\frac{m}{n}\frac{b}{1-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Denna formel, som blifvit beräknad under nyssnämnda vilkor, gäller äfven detta förutan, såsom man lätt finner af expressionen i högra membrum.

Insättes vidare i (2) $\frac{a}{n}$ i stället för a, så blir

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n > 1+a,$$

hvaraf

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^m > (1+a)^{\frac{m}{n}}$$

och häraf erhålles på grund af (1)

$$\left.\begin{array}{ll} & (1+a)^{\frac{m}{n}} < \dfrac{1}{1-\dfrac{m}{n}a} \\ \text{om} & \dfrac{m}{n}a < 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Om slutligen $\frac{b}{n}$ insättes i (1) i stället för b, så förvandlas denna olikhet till

$$\left(1+\frac{b}{n}\right)^n < \frac{1}{1-b},$$

hvaraf

$$\left(1+\frac{b}{n}\right)^m < \frac{1}{(1-b)^{\frac{m}{n}}},$$

och häraf följer i stöd af (2), att

$$(1-b)^{\frac{m}{n}} < \frac{1}{1+\dfrac{m}{n}b} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

3.

Af olikheterna (3), (4), (5) och (6) följer nu, att

$$\left.\begin{array}{ll} & 1+\dfrac{m}{n}\dfrac{\alpha}{1+\alpha} < (1+\alpha)^{\frac{m}{n}} < \dfrac{1}{1-\dfrac{m}{n}\alpha} \\ \text{om} & m\alpha < n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

4.

Antag nu att A är ett approximatift värde på n^{te} roten ur N, så att i eqvationen

$$N = A^n + B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

B kommer att beteckna en qvantitet, som uppfyller vilkoret

$$\frac{m}{n}\frac{B}{A^n} < 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Då kan man på sednare faktorn i högra membrum af eqvationen

$$N^{\frac{m}{n}} = A^m \left\{1 + \frac{B}{A^n}\right\}^{\frac{m}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

applicera formeln (7), som i sådant fall och i förening med (8) gifver

$$\frac{(m+n)N - mA^n}{nN} < \left(1 + \frac{B}{A^n}\right)^{\frac{m}{n}} < \frac{nA^n}{(m+n)A^n - mN} \ldots (11).$$

Adderar man här täljarne och nämnarne i de båda yttersta membra, så får man som bekant är ett medelvärde mellan dem, och om detta insättes i eqvationen (10) i st. för sista faktorn, erhåller man en approximationsformel

$$N^{\frac{m}{n}} = A^m \cdot \frac{(n+m)N + (n-m)A^n}{(n-m)N + (n+m)A^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (12),$$

hvari felet måste vara mindre, än A^m multiplicerad med differensen mellan de båda yttersta membra i (11). Om detta fel betecknas med F, är följaktligen

$$F < \frac{m}{n}\frac{A^m}{N} \cdot \frac{(m+n)\{N - A^n\}^2}{(m+n)A^n - mN} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Allt under förutsättning af

$$\frac{m}{n}\frac{N - A^n}{A^n} < 1 .$$

Obs.: I Francoeurs Algèbre Supérieure förekommer pag. 19 ett specialfall af formeln (12), men detta utan felbestämning.

5.

För det fall att A^n är ett bråk med stort antal decimaler och kalkylem med detta sålunda skulle blifva besvärlig, kan den förenklas på sätt här nedan skall visas. Man bortkastar i A^n ett antal decimaler och betecknar det sålunda erhållna värdet med A^n_μ. Vidare låter man A^n_σ beteckna samma bråk, hvari likväl sista decimalen blifvit ökad med en enhet. I följd af

$$A^n_\mu < A^n < A^n_\sigma$$

måste nu olikheten (11) förändras till

$$\frac{(m+n)N - mA^n_\sigma}{nN} < \left(1 + \frac{B}{A^n}\right)^{\frac{m}{n}} < \frac{nA^n_\sigma}{(m+n)A^n_\mu - mN} \quad \ldots \ (14)$$

och approximationsformeln blifva

$$N^{\frac{m}{n}} = A^m \cdot \frac{(n+m)N + (n-m)A^n_\sigma}{(n-m)N + (n+m)A^n_\mu} \quad \ldots\ldots \ (15)$$

samt felet

$$F < \frac{n+m}{n}\frac{A^m}{N} \cdot \frac{m(N - A^n_\sigma)(N - A^n_\mu) + nN(A^n_\sigma - A^n_\mu)}{(n+m)A^n_\mu - mN} \ldots (16),$$

under förutsättningen

$$\frac{m}{n}\frac{N - A^n_\mu}{A^n_\mu} < 1.$$

6.

Exempel 1. Se facitboken till Björlings problemsamling pag. 49, ex. 116.

$$x = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{954}{41}}.$$

Sätt

$$x = \frac{y}{10}$$

och

$$y = \sqrt[3]{\frac{7632}{41}} = \sqrt[3]{186,14\ldots.}$$

Genom försök finner man lätt

$$A = 5{,}7$$

$$\therefore \quad A^3 = 185{,}193.$$

Följaktligen är approximatift

$$y = 5{,}7 \cdot \frac{2.7632 + 41.185{,}193}{7632 + 2.41.185{,}193}$$

eller

$$y = 5{,}70972\ldots.$$

och

$$F < \frac{1{,}9}{1908} \cdot \frac{(39{,}087)^2}{22739{,}652}$$

$$< 0{,}00007.$$

Häraf erhålles

$$5{,}70980 > y > 5{,}70965$$

och således med säkerhet

$$x = 0{,}5709\ldots.$$

Exempel 2.

$$x = \sqrt[13]{(8200)^3}.$$

Af

$$A = 2$$

får man

$$A^{13} = 8192$$

och således approximatift

$$x = 2^3 \cdot \frac{16.8200 + 10.8192}{10.8200 + 16.8192}$$

$$= 8 \cdot \frac{13320}{13317}$$

$$= \frac{106560}{13317}$$

$$= 8{,}001802\ldots.$$

samt

$$F < \frac{3}{13} \cdot \frac{8}{8200} \cdot \frac{16.64}{106472}$$

$$< 0{,}000002.$$

Följaktligen är

$$8{,}001805 > (8200)^{\frac{3}{13}} > 8{,}001800$$

och således med säkerhet

$$(8200)^{\frac{3}{13}} = 8{,}00180\ldots.$$

Exempel 3.

$$x = 3^{\frac{2}{5}}.$$

Antages först och främst

$$A = \frac{5}{4},$$

så fås approximatift enligt den först framställda formeln

$$3^{\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{6.3.1024 + 4.3125}{4.3.1024 + 6.3125}$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{15466}{15619}$$

$$= 1{,}2457\ldots.$$

Sättes nu vid en följande approximation

$$A = 1{,}246,$$

så blir

$$A^5 = 2{,}991208\ldots.$$

ett decimalbråk med 15 decimaler. För att ej nödgas använda detta vidlyftiga bråk sätta vi

$$A_\mu^5 = 2{,}991208$$

$$A_\sigma^5 = 2{,}991209.$$

Då blir

$$(N - A_\sigma^5)(N - A_\mu^5) < 0{,}0000773$$

och

$$F < \frac{7}{5}\cdot\frac{(1{,}245)^2}{3}\,\frac{2.0{,}0000773 + 5.3.0{,}000001}{7.2{,}991208 - 2.3}$$

$$< \frac{10{,}86}{15}\cdot\frac{0{,}00017}{14{,}938456}$$

$$< \frac{19}{2240768}$$

$$< 0{,}000009$$

samt approximatift

$$3^{\frac{2}{5}} = 1{,}550025 \, . \, \frac{7.3 + 3.2{,}991209}{3.3 + 7.2{,}991208}$$

$$= 1{,}5518459 \ldots .$$

Häraf med säkerhet

$$3^{\frac{2}{5}} = 1{,}5518 \ldots .$$

I sjelfva verket äro 6 decimaler rigtiga.

7.

Olikheten (11) kan skrifvas under följande form, om man iakttager eqv. (10) och observerar, att plustecknen höra tillsammans och likaså minustecknen:

$$\left\{\frac{N}{A^n}\right\}^{\pm\frac{m}{n}} > 1 + \frac{m}{n} - \frac{m}{n}\left(\frac{A^n}{N}\right)^{\pm 1} \quad \ldots\ldots \ (17).$$

Medelst denna formel kan man genom att successive använda plus- och minustecknen instänga $N^{\frac{m}{n}}$ mellan gränser och derigenom med lätthet finna, hur många decimaler i dess beräknade värde blifva exakta.

Exempel. Vi välja samma exempel, som nyss ofvan blifvit anfördt, näml.:

$$X = (8200)^{\frac{3}{13}}.$$

Man har

$$A^3 = 8$$

$$A^{13} = 8192$$

och således

$$\frac{x}{8} > 1 + \frac{3}{13} - \frac{3}{13} \cdot \frac{8192}{8200}$$

$$\frac{8}{x} > 1 + \frac{3}{13} - \frac{3}{13} \cdot \frac{8200}{8192} \, .$$

Häraf

$$8{,}001803 \ldots > x > 8{,}001801 \ldots$$

och således med säkerhet

$$x = 8{,}00180 \ldots\ldots$$

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 101.)

12. J. MEURS.

I sin »Förteckning på de i Sverige från äldre till närvarande tider utkomne skole- och undervisningsböcker», Stockholm 1817, uppgifver Hammarsköld en lärobok i räkning med titeln:

»Arithmetica eller Räknebook aff Johannes Meurs. Strengnäs 1652. 8:o.

Någon vidare kunskap om detta arbete eller om dess författare har jag ej lyckats erhålla. Om det är samme Joh. Meurs, som utgifvit arbetet »Majestas Veneta», Lugd. Batav. 1640, vet jag ej.

13. NICOLAUS PETRI AGRELIUS (AGRELL).*

Knappast torde någon lärobok haft att glädja sig åt ett så långt lif som Agrelii lärobok i räkning. Emellan

* Det är en besynnerlig ödets lek, att vi ha endast ytterst knapphändiga biografiska notiser att meddela om denne man, hvilkens arbete fortlefvat i en sådan mängd upplagor och en så lång tidrymd, att knappast någon författare i detta hänseende kan täfla med honom. Med ledning af företalen till hans läroböcker och af upplysningar lemnade af bibliotekarien för Wexiö högre elementarverks bibliotek doktor Johansson, hemtade ur J. Forsanders handskrifna samlingar till Wexiö Stifts herdaminne, kunna vi meddela följande.

Nicolaus Petri Agrelius föddes i Småland. (Namnet härledes sannolikt af Åkers 5 mil från Jönköping belägna församling). Blef 1646 medlem af Smålands nation i Uppsala. Efter slutade studier derstädes kallades han till Linköpings stift för att der som apologist undervisa ungdomen i skrifva och räkna, hvarmed han fortfor i två år. År 1655 utgaf han sin lärobok i räkning i Stockholm, den enda af honom sjelf utgifna. Den andra upplagan af år 1672 är tryckt i Göteborg och af förläggaren tillegnad författaren, numera (1672) borgmästaren och tullförvaltaren Agrell i Warberg. Nu varande tjenstförrättande borgmästaren L. P. Larsson i Warberg har skriftligen meddelat mig, att han påträffat Agrells namnteckning under ett intyg i 1678 års dombok i Warbergs den tidpunkt, då första upplagan af hans lärobok utgafs, och den då den sista utkom eller emellan åren 1655 och 1798, ligger en tidrymd af 143 år. Får man förutsätta att den sista upplagan af år 1798 begagnades lika länge som den näst föregående af år 1754 eller i 44 år, har således hans lärobok varit använd i Sveriges skolor i 187 år, d. v. i nära 200 år eller ifrån Karl X Gustafs tid 1655, ända in i Karl XIV Johans regering. Hvad kan skälet vara till en så lysande framgång? Är hans lärobok utmärkt framför föregående svenska aritmetiska läroböcker genom goda bevis och förklaringar? Nej, några bevis framställas här ej. Finnes der decimalräkningen bättre framstäld än hos föregående författare? Nej, i ingen enda upplaga ända intill 1798 förekommer ett ord om decimalräkning. Är arbetet framstående genom de vyer det erbjuder, genom ett noggrant fasthållande af hvad som är hufvudsak och hvad som är bisak? Nej, tvertom kan det karakteriseras genom dess brist på förmåga att skilja mellan hufvudsak och bisak. Kanhända är dock arbetets innehåll lätt att inhämta genom lärobokens ringa omfång? Nej, någon digrare lärobok i räkning än Agrelii på 400 sidor har hvarken förr eller senare blifvit utgifven.

Dess framgång kan derför svårligen förklaras af annat än af det imponerande i dess dedikation till konung Karl Gustaf, af det vidlyftiga och ytterst detaljerade arbetet, af dess stora massa af räkneexempel samt af den nära anslutningen mellan denna lärobok och den då mest begagnade aritmetiska läroboken, näml. Aurelii lärobok (se matematisk tidskrift för år 1868, sid. 245). Björcks ojämförligt mera framstående lärobok skiljde sig för mycket från Aurelii lärobok för att kunna blifva allmännare antagen. Vi vilja nu närmare redogöra för Aurelii arbete. Dess titel är:

---

rådstufvurätts arkiv, äfvensom att Agrell ej finnes upptagen i Warbergs kyrkoböcker, hvilka dock ej gå längre tillbaka i tiden än till år 1692. Häraf visar sig, att man kan förlägga Agrells lefnad ungefärligen mellan åren 1625—1680. Att Skåne också gör anspråk på Agrell visar sig deraf, att han finnes uppförd såsom en bland Skånes lärda i Sommelii lexicon eruditorum scanensium.

»Institutiones arithmeticæ: Eller Een kort Vnderwiisningh om de Skiön-högnödigste Regler, exempel, Italiensche Practiquer och Compendier, som i daghligh rächningh mäst brukelige äre: Them Konstälsk- och Lusthafvandom til nytta och gagn sammanskreefne och första gången Cum Gratia et Privilegio S. R. Mtis sampt Authoris egen Bekostnadt vnder Trycket giffne Aff Nicolao P. Agrelio Smolando. Stockholm 1655». 8:o 419 sidor.

Af arbetet äro utkomna åtminstone följande åtta upplagor, hvilka alla finnas på riksbiblioteket i Stockholm.

Upplagan 1. Stockholm 1655, utgifven af honom sjelf och tillegnad konung Karl Gustaf.

„ 2. Göteborg 1672, förlagd af boktryckaren Grefve och tillegnad förf. sjelf (som numera under namnet Agrell blifvit borgmästare* och tullförvaltare i Warberg) och fem andra män (råd- och handelsmän i Warberg).

„ 3. Stockholm 1683. Upplagan saknar företal och tillegnan.

„ 4. Jönköping 1729. Arbetet inledes med några verser utan underskrift. Utan företal.

„ 5. Stockholm 1737. Utgifven af Wallersten. Inledes med samma verser. Utan företal.

„ 6. Stockholm 1738. Med företal af P. A. Bliberg,** samt med tillägg af ett kapitel om italienskt bokhålleri af samme man.

„ 7. Stockholm 1754. Innehåller ock Blibergs kapitel om bokhålleri.

„ 8. Stockholm 1798. Likaledes.

* Kanhända erhöll Agrell såsom en erkänsla af Karl Gustaf denne plats i ett af Sveriges då nyförvärfvade landskap.

** P. A. Bliberg var informationsmästare för pagerna vid hofvet. Pagerna bodde i Storkyrkobrinken i huset närmast till slottet, der jernvägstrafikstyrelsen nu har sitt säte. Denna lilla skola för pagerna, hvilka utgjordes af adliga ynglingar, blef snart en militärskola, ur hvilken sedan Carlbergs krigsskola utvecklade sig.

Någon annan olikhet mellan den första upplagan af 1655 och alla de följande än att i de senare tryckfel blifvit rättade, ha vi ej kunnat förmärka.

I upplagan af år 1655 säger han sig hafva åtnjutit stipendium vid Uppsala akademi samt af konungen erhållit särskildt privilegium på tryckning af sitt arbete och till tacksamhet derför tillegnat det till konungen. Som vanligt i arbeten från denna tid lyckönskas äfven Agrelius i en mängd verser i början af arbetet. Sålunda lyckönskas han af eloqu. professor Svenonius i Åbo. I en af dessa lyckönskningar omnämnes han som apologist hos Gustaf Kurk, friherre till Allenö, Braheberg m. fl.

Att Agrelii lärobok varit utsatt för skarp kritik visar sig af Blibergs företal till upplagan af 1738. Vi kunna ej neka oss nöjet att derur göra följande utdrag: »Onekligt är väl att åtskilliga kortare räknesätt än Agrelius brukar äro i senare tider uppfunne och äfven väl i Sverige öflige, men likafullt blir dock en ostridbar sanning, att hans metoder äro som erfarenheten visar så väl tydligare som lättare att fatta för de mindre qvicka och uppstädade hufvuden, hvilka begripa äfven så litet, ehuru man predikar för dem en hop beniga algebraiska upplösningar samt decimal- och centonalräkningar, som bonden grekiska. En som väl uppodlat sina snillegåfvor kan med redighet lära räknekonsten så, att han vet gifva besked till allt hvad han deruti läst och må derför en sådan gerna följa hvad auktor han finner behag uti, men en enfaldigare lärer bäst genom flitig öfning och exempel, fast han ej kan begripa, hvarför det bör vara så men intet så. Agrelii fiender må derför fritt svärta hans räknebok, hälst som deras lack och tadel, långt ifrån att fläcka och sudla henne, gifva henne fast mer glans och befordra dess beröm. Och alltså gjorden I bättre och skäligare, mine käre momister, om I följden hvad arithmetica I haden smak före och lemnaden denna i det värde hon förtjenar».

Boken sönderfaller i fyra delar.

Första delen. (Hela tal och bråk).

Addition. Exempel. Ifrån 1550 intill 1586 hafva papisterne mördat, bränt och ihjelslagit uti några åtskilliga länder, derför att de ej ville emottaga påfviska läran:

furstliga personer	49,
grefvar	148,
friherrar	235,
adlige personer	147518,
gement folk	700060.
Hvad är summan?	Facit 848010.

Subtraktion. Exempel. Anno Christi 1260 blef den kongl. residensstaden Stockholm funderad af Birger Jarl. Huru länge är sedan? Facit 393 år.

Multiplikation. Ex. 1. En man blef tillfrågad, huru många svin han hade. Han svarade sig ej hafva mer än 12 galtar, med hvar galt 13 suggor och med hvar sugga 14 grisar. Nu frågas huru många svinen voro. Facit 2352.

Ex. 2. Multiplicera 34567 med 23456!

Bland andra sätt att multiplicera förekomma ock följande tvenne:

	34567	34567
	23456	23456
	14	691341852
	1221	10370630
	101828	138284
	8152435	1727
	612203042	20
	9162536	810803552
	122030	
	1524	
	18	
Facit	810803552	

Som man ser, bilda delprodukterna i sin uppstälning i förra exemplet en dubbelkägla och i senare en omvänd pyramid. Någon förklaringen på räkningen finnes ej. Emedlertid märker man snart att i förra exemplet förf. räknat sålunda:

Första delprodukten: 2 ggr 7 är 14.
Andra „ 2 ggr 6 är 12, 3 ggr 7 är 21.
Tredje „ 2 ggr 5 är 10, 3 ggr 6 är 18, 4 ggr 7 28. O. s. v.

I senare exemplet har Agrelius räknat sålunda:
Första delprodukten: 2 ggr 34567 = 69134.
Andra „ 3 „ „ = 103701, der sista siffran blifvit uppflyttad i första raden näst efter 4.
Tredje „ 4 ggr 34567 = 138268, der 6:an blifvit uppflyttad en och 8:an två rader. O. s. v.

Division. Ex. Dividera 110592 öre genom 32 till daler. Facit 3456.

Se här uppställningen:

10	
13	
116	
159	
182	
4160	
8492	
11714	
14936	1 1 1 1
46158	1 1 1 1
78370	1 1 1 1
110592	1 1 1
32222	1 1
333	1
Fac.	3 4 5 6

Äfven här finnes ingen förklaring. Dock märker man snart, att under dividenden 110592 är divisorn 32 skrifven 4 gånger, motsvarande de 4 siffrorna i qvoten. Första gången är 32 skrifven under talet 10 af dividenden, andre gången under 05, tredje gången under 59 och fjerde gången under 32, ehuru de tre sista gångerna siffran 2 är uppflyttad en rad. Divisionen sker genom oupphörliga subtraktioner af divisorn 32 och resten sättes alltid ofvanom dividenden och tillika så att dess siffror komma dividenden så nära som möjligt, hvarigenom ofta inträffar att dess siffror komma att stå i olika horisontela rader. Vid hvarje subtraktion sättes ett streck i qvoten.

Läran om bråk liknar den i Aurelii lärobok. Inga förklaringar. Inga decimaler.

Tabell öfver mått, mål och vigt.

Mynt.			Torrvaror.		
1 riksdaler håller	6	mark.	1 läst spanskt salt	18	tunnor,
1 daler	4	mark.	1 gemen läst . . .	12	tunnor,
1 mark	8	öre.	1 tunna	4	halfspänn = 6 skäppor,
1 öre	24	penningar.	1 halfspann	12	kannor,
Vigt.			1 skäppa	8	kannor.
1 skeppund .	$2\frac{1}{2}$	centner,	Vin och ölmått.		
1 centner . . .	8	lispund,	1 foder håller .	6	åmer,
1 lispund . . .	20	marker,	1 åm	$1\frac{1}{4}$	tunna,
1 mark	1	skålpund,	1 tunna	4	fjerdingar,
1 skålpund . .	16	uns,	1 fjerding . . .	2	åttingar,
1 uns	2	lod,	1 åtting	6	kannor,
1 lod	4	qvintin,	1 kanna	2	stop,
1 qvintin . . .	4	ort,	1 stop	4	pelar.
1 lödig mark	16	lod.	Stycke mått.		
			1 bal	10	ris,
			1 ris	20	böcker,
			1 bok	25	ark,
			1 timmer . . .	40	stycken,
			1 stig	20	stycken,
			1 minut	12	seierknäpp.

Denna tabell står i slutet på arbetet. Vi ha flyttat den hit. Några längdmått eller ytmått förekomma ej.

Dock förekomma sådana mått äfvensom andra styckemått (t. ex. decker, mandel) i exemplen i boken.

Andra delen

innefattar 1. Regula de tri i hela tal,
2. „ „ i bråk,
3. Praxis italica.
4. Progressiones.

Regula de tri i hela tal. Ex. En fader skickar sin son till ett universitet och gifver honom 470 rdr med sig, hvaraf han hvar vecka för kost gifva måste 3 daler: item, hvar månad till tvätterskan 1 daler; uti alla extraordinarie expenser hvarjo 2 månader 4 daler. Nu frågas, huru mycket han för hvarjo utgifvit hafver uti 3 år, 6 månader och 2 veckor. Sedan hvad honom ännu af penningarne resterar, hvart år räknadt för 13 månader eller 52 veckor?

Facit. Kostpenningarne belöpa sig till 546 daler. Tvätterskans $45\frac{1}{2}$ daler. Extra ordinarie expenserna 91 daler. Honom restera $212\frac{1}{2}$ daler.

Anm. Här följa ett kapitel om papper, ett om våta varor, ett om torra varor, ett om penningar o. s. v.

Regula de tri i bråk. Ex. En köper 89 decker bockhudar och betingar halfparten för $48\frac{3}{4}$ daler, den andre halfparten för $52\frac{3}{4}$ daler hvart decker, hvad är summan? Facit 4516 daler 24 öre.

Praxis italica (så kallad efter dess uppfinnare, de italiener) är ej annat än hvad numera kallas parträkning. Agrelius indelar den i fyra afdelningar, näml.:

1. Huru öre emot daler skola proportioneras.

Ex. Ett lispund kostar 5 öre, hvad 120 lispund?
Facit 18 daler 24 öre.

Ty de kosta först 120 gånger
4 öre eller 120 ggr $\frac{1}{8}$ daler, d. v. s. . . . . 15 daler,
vidare 120 ggr 1 öre, d. v. s. $\frac{1}{4}$ af 15 daler . . . . . . 3 daler 24 öre.

Summa 18 daler 24 öre.

2. Huru penningar mot öre skola proportioneras.

Ex. 1 aln kostar 21 penningar, hvad kosta 567 alnar? Fac. 15 daler 16 öre 3 pgr.

Uträkning.

21 p.	567 alnar.			
12	283	öre	12	penningar.
6	141	„	18	„
3	70	„	21	„
Facit	496	öre	3	penningar.

3. Huru multiplicationis exempla compendiose skola behandlas.

Ex. 1 lispund kostar 6 daler 12 öre 6 pgr, hvad kosta 240 lispund? Facit 1531 daler 28 öre.

Uträkning.

	6 d. 12 öre 6 pgr.	
	240	
	1440 d.	
240 ggr 8 öre är .	60 d.	eller 240 ggr $\frac{1}{4}$ daler.
„ „ 4	30 d.	
240 ggr 6 pgr . . .	1 daler 28 öre	eller 240 ggr $\frac{1}{4}$ öre.
	Summa 1531 daler 28 öre.	

4. Multiplicationis och divisionis exempla.

Denna afdelning är ganska vidlyftig, och då det är i synnerhet genom den, som Agrelii lärobok karakteriseras, komma vi att något utförligare redogöra för dem — något som vi vid framställningen af läran om proportioner efter Biörcks lärobok (sid. 9 denna årgång) antydde.

Liksom hos Biörck är terminologien på latin och låter svårligen öfversätta sig med annat än algebraiska beteckningar. Afdelningen sönderfaller i två stora kapitel, ett der förhållandena äro större än 1 (proportiones majoris inæqualitatis) och ett der förhållandena äro mindre än 1 (proportiones minoris inæqualitatis). Hvartdera af dessa uppdelas vidare i 5 smärre underafdelningar, allteftersom förhållandena kunna sättas under någon af formerna

$$m, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{m}{n}, \quad m+\frac{1}{n}, \quad m+\frac{r}{n}$$

eller under någon af följande

$$\frac{1}{m},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{n}},\quad \frac{1}{1+\frac{m}{n}},\quad \frac{1}{m+\frac{1}{n}},\quad \frac{1}{m+\frac{r}{n}}.$$

A. *Majoris inæqualitatis.* (Förhållandena större än 1).

I. *Proportio multiplex.* (Förhållanden, hvilkas exponenter kunna uttryckas med ett helt tal m).

Ex. Proportio sextiquingecupla (d. v. s. = talet 56). Om 7 lispund kosta 12 daler 16 öre 16 penningar, hvad kosta 392 lispund. Facit. 701 daler 5 öre 8 penningar.

Agrelii uppstälning och uträkning är följande.

$\frac{7 \text{ lisp.}}{1}$ – 12 rdr 16 öre 16 p. – $\frac{392 \text{ lisp.}}{56}$. Fac. 701 daler 5 öre 8 pgr.

Så väl i detta som i följande exempel är ej sjelfva problemets uttryck angifvet, utan får man tänka sig i stället för den ena strecken (–) i exemplet ordet »kosta» och i stället för den andra orden »hvad kosta».

II. *Proportio superparticularis.* $\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Anm. Förhållandet $1\frac{1}{2}$ kallas sesquialtera,
„ $1\frac{1}{3}$ „ sesquitertia,
„ $1\frac{1}{4}$ „ sesquiquarta, o. s. v.

Ex. Proportio sesquioctava (d. v. s. = talet $1\frac{1}{8}$).

16 lisp. – 12 daler 18 öre 16 penningar – $\frac{18 \text{ lisp.}}{16}$ Fac. 14 daler 5 öre.

1 „	18 „	8 „		2
14 d.	5 öre	0 penn.		

III. *Proportio superpartiens* $\left(1+\frac{m}{n}\right)$.

Ex. Proportio super nonipartiens quadridecimas (d. v. s. = $1\frac{9}{14}$).

14 lisp. –	12 dr	14 öre	18 penn. –	23 lisp.
				14
	6 „	7 „	9	7
		28 „	$11\frac{4}{7}$	1
		28 „	$11\frac{4}{7}$	1
Facit.	20 dr	15 öre	$2\frac{1}{7}$ penn.	

IV. *Proportio multiplex superparticularis* $\left(m + \frac{1}{n}\right)$.

Ex. Prop. septupla sesquioctava (d. v. s. = $7\frac{1}{8}$).

8 lisp. –	20 daler	20 öre	20 penn. –	57 lisp.
	144 „	17 „	20	56
	2 „	18 „	$14\frac{1}{2}$	1
Facit.	147 dal.	4 öre	$10\frac{1}{2}$ penn.	

V. *Proportio multiplex superpartiens* $\left(m + \frac{r}{n}\right)$.

Ex. Proportio nonupla superseptipartiens decimas (d. v. s. = $9\frac{7}{10}$).

10 lisp. –	8 dr	16 öre	20 penn. –	97 lisp.
	76	23	12	90
	4	8	10	5
		27	$6\frac{4}{5}$	1
		27	$6\frac{4}{5}$	1
Facit	82 dr	22 öre	$11\frac{3}{5}$ p.	

B. *Minoris inæqualitatis.* (Förhållanden mindre än 1).

I. *Proportio submultiplex* $\left(\text{d. v. s. formen } \frac{1}{m}\right)$.

Ex. Proportio suboctupla (d. v. s. = $\frac{1}{8}$).

72 lisp. –	5 dr	6 öre 7 p. –	9 lisp.
8	Facit	20 öre $18\frac{7}{8}$ p.	1

II. *Proportio subsuperparticularis* $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)$.

Ex. Proportio subsesquiquinta $\left(\text{d. v. s.} = \frac{1}{1\frac{1}{5}}\right)$.

30 lisp. –	16 dr	14 öre	12 p. –	25 lisp.
	8	7	6	15
	5	15	12	10
Facit	13 dr	22 öre	18 p.	

III. *Proportio subsuperpartiens* $\left(\frac{1}{1+\frac{m}{n}}\right)$.

Ex. Prop. subsupertripartiens septimas $\left(=\frac{1}{1\frac{3}{7}}\right)$.

10 lisp. –	12 dr	16 öre	12 p. –	7 lisp.
	6 „	8 „	6	5
	2 „	16 „	$2\frac{2}{5}$	2
Fac.	8 dr	24 öre	$8\frac{2}{5}$ p.	

IV. *Prop. submultiplex subsuperparticularis* $\left(\frac{1}{m+\frac{1}{n}}\right)$.

Ex. *Prop. subquintupla subsesquisexta* $\left(=\frac{1}{5\frac{1}{6}}\right)$.

31 lisp. –	64 dr	17 öre	9 p. –	6 lisp.	(α)
30	12	29	$1\frac{4}{5}$	. . . .	(β)
1		13	$7\frac{4}{5}$	. . . .	(γ)
Facit	12 dr	15 öre	18 pgr.		

Då föregående afdelningar temligen lätt begripas af dem, som förstå parträkning, är denna och följande (IV och V) något svårare. Emellertid märker man snart att raden (β) är $\frac{1}{5}$ af raden (α) och att raden (γ) är $\frac{1}{31}$ af raden (β). Facit är = (β) minskad med (γ). Förfaringssättet i denna och följande afdelning grundar sig derpå, att

$$\frac{1}{m+\frac{p}{n}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{mn}{mn+p} = \frac{1}{m}\cdot\frac{mn+p-p}{mn+p} = \frac{1}{m}\left(1-\frac{p}{mn+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m}\cdot\frac{p}{mn+p}.$$

V. *Proportio submultiplex subsuperpartiens.* $\left(\frac{1}{m+\frac{r}{n}}\right)$.

Ex. Prop. subnonupla subsuperseptipartiens decimas. $\left(\frac{1}{9\frac{7}{10}}\right)$.

97 lispund –	82 dr	22 öre	$11\frac{3}{5}$	penningar. – 10 lisp.
90	9 „	6 „	$1\frac{13}{45}$	
1		3 „	$0\frac{3298}{4365}$	
6		18 „	$4\frac{2328}{4365}$	

Facit: 8 dr 16 öre 20 penningar.

Tredje delen innehåller:

1. Regula conversa.
2. Regula dupla.
3. Interesse.
4. Rebatto.
5. Thara.
6. Fusti.
7. Vexel- och kassaräkning.
8. Stick- eller byteräkning.
9. Factorie.
10. Vinst och förlis.
11. Societatis ell. sällskapsregeln.
12. Skeppsparter.
13. Arf- och annor delningsräkning.

Vi välja några exempel på några af dessa 13 räknesätt.

Om intresse. Ex. En trängder man tager af en danist skinnare och ockrare 400 daler med sådant förord, att han hvar vecka af dalern 1 öre gifva skall. Nu frågas hvad han foeneratori efter ett års förlopp uti interesse gifva skall. Facit 650 daler. Det är pro cento om året 162 och en half daler.

1 dr 1 öre 400 dr

1 vecka $12\frac{1}{2}$ dr 52 veckor.

Anm. Detta är så vidt vi erfarit första gången som ordet procent förekommer i en svensk räknebok.

Om rebatto. Ex. En köper en obligation om 3456 dr 24 öre, uti sex år förfallande emot $5\frac{1}{2}$ pro cento de anno: Nu frågas hvad han kontant derför gifva bör? Facit. 2599 daler $1\frac{123}{133}$ öre.

133 – 100 – $3456\frac{3}{4}$ dr.

Om thara. Thara kallas det ting uti hvilket något väges, såsom säckar, tunnor, näfver, korgar etc. Detta bör subtraheras från hela vigten, anders finge man (det oskäligt vore) så dyrt betala, näfver som smör, en grof säck som muskot, en gammal handsketumme som saffran, o. s. v.

Thara är trefaldig.

1. Thara, som subtraheras af godset, hvarefter det öfriga betalas.

2. Thara, så och så mycken thara på (auf) hvarje skeppund.

3. Thara uti eller af (in eller von) hvarje skeppund.

Exempel på det första slaget af thara.

En månglerska vill köpa af en bonde 4 näfverskrindor smör, hvarför han för hvar mark 3 öre begär. Detta synes käringen för dyrt, gifver honom alltså 10 dr 30 öre oförsedt. Smöret vog brutto

$1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{3}$ lispund.

Thara för näfvern är

3, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{8}$, $4\frac{1}{8}$ mark.

Nu frågas hvad henne en mark netto kostar, och hvilkendera bedragen blef.

Facit. Hvar mark kostar henne $3\frac{1}{3}$ öre. Blef fördenskull månglerskan bedragen, ty hon gaf bonden 8 pgr för hvar mark mer än han begärde, det är tillhopa 1 dr 3 öre.

$5\frac{1}{4}$ lisp. – 10 dr 30 öre – 1 mark.

Anm. Mellan de två andra slagen af thara är det ungefär samma skilnad som mellan diskont och rabatt i våra räkneböcker.

Om fusti (vrak). Ex. En köper 560 sablar och befinnes uti hvart hundrade 5 stycken oduglige och förderfvade, hvart decker de bäste kosta 40 rdr, och hvart stycke fusti 2 rdr. Facit 2184 rdr.

100 – 5 – 560. Facit 28 st.
1 deck. 40 – 532 st.
1 st. 2 rdr – 28 st.

Om vexel och kassaräkning. Att förvandla ett lands mått, mål och vigt i ett annat lands.

Ex. När 30 öre göra 12 holländske stooter, och 2 stooter göra 5 brabandiske stüver, och 100 brabandiske stüver göra 5 holländske gylden, och 21 gylden göra 3 flemske nobel, och 12 nobel göra 42 holländska statens dr. Nu frågas huru många holländska statens daler man får för 750 svenska dr? Facit 600 dr.

Om stick- eller byte-räkning. Denne regel lärer, huru man gods emot gods skall barattera, förvexla och förbyta.

Ex. Två vilja med hvarandra barattera. *A* hafver koppar à 40 dr skeppundet, men sätter det i stick för 44 daler. *B* hafver jern, kostar à skeppund 32 dr. Nu frågas, huru högt han det skall sätta i stick eller byte, på det han sitt jern efter sitt värde sätter så högt i stick, som den andre sin koppar. Facit $35\frac{1}{5}$ daler.

40 dr bahr – 44 dr stick – 32 dr bahr.

Nota. När detta ordet bahr framställes, då förstår man dermed de penningar, som äro godsens rätta värde, förrän de stegras till stick eller byte.

Om faktori. Faktori är en räkning emellan en köpman och hans kommissionär (faktor).

Ex. En köpman eller principal i Stockholm försänder sin facteur i Westervik gods af åtskilliga sorter på 6000 daler, hvilket facteuren å hans vägnar på det bästa föryttra skall. För sådan sin provision och omak tillsäges honom $2\frac{1}{2}$ daler för hvart 100. Nu kommer godset senare än facteuren det hafver förskrifvit, och kan fördenskull godset ej högre föryttra än principalen honom det i händerna satt hafver. Nu frågas hvad facteuren för hans provision efterlåta bör? Facit 150 dr.

100 – $2\frac{1}{2}$ dr – 6000 dr.

Om vinst och förlis. Ex. En köper en åm brunsvikisk mumma för 18 dr 24 öre och vinner 16 pro cento. Kort derefter slår han af att han 24 pro cento förlorar, hvad kostar då en åm? Facit 12 dr 9 öre $2\frac{14}{29}$ pgr.

Om skeppsparter och delar. Ex. Tre frakta ett skepp för 184 dr. Deruti vill *A* hafva en halfpart, *B* $\frac{2}{3}$ och *C* $\frac{3}{4}$. Nu frågas hvad hvar betala bör? Facit. *A* 48 dr, *B* 64 dr och *C* 72 dr.

$$23 - 184 - \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - 6 \\ \frac{2}{3} - 8 \\ \frac{3}{4} - 9 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \text{Facit} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 48 \\ 64 \\ 72 \text{ dr.} \end{array}$$

$$\overline{\quad 23 \quad}$$

Fjerde delen

innefattar 1. Regula alligationis,

2. „ falsi,

3. „ cesis eller virginum.

Här sammanfaller Agrelii framställning med Clavii och Aurelii. (Se årgången 1868).

Boken slutar med »några lustiga frågor». Se här en.

En bondpiga (Corebij syster) går till torgs med några ägg, hvarest henne möter en druckenbulter och slår sönder några af äggen. Pigan brukar mun. Denne druckne säger: Huru många voro äggen, jag vill dig dem betala. Pigan svarar och säger: Bumsse må Gute hielpe, ia wa ett tålijkit ålike, ia ottade intet på när moor hasse inladhe, men Guds blum hää, huxar ia, at han först lade dum i jeen korgh altijdh 2 tillijka och tå bleeff ett åfver, sedan lade hun dum i een annor korgh medh 3 och tå bleeff å ett åfver, lijka så mä när hun lade in dum 4 eller 5 eller å 6, tå bleeff altijdh 1 åfver, men sidst lade hun dum in medh 7 och tå gick hää juust uth: Nu frågas huru många äggen voro. Facit 721.

Anm. Man bör här ha

$$\frac{3.4.5\,n+1}{7} = \text{ett helt tal,}$$

således också

$$\frac{3n-1}{7} = \text{ett helt tal,}$$

hvilket gifver $n = 5,\ 12,\ 19,$ hvaraf talet $= 60n + 1 = 301,\ 721,\ 1141,\ 1561, \ldots, 301 + n.420.$

Slutord. Af vår framstälning af Agrelii arbete visar sig, att detsamma är öfver måttan detaljeradt och att der hufvudsak och bisak äro blandade om hvarandra. För dess läsare bör räknekonsten förefalla synnerligen vidlyftig, dess inhemtande ett verkligt herkulesarbete, och författaren Agrelius sjelf ett märkvärdigt underdjur i afseende på lärdom. Tanken på huru Sveriges ungdom i nära 200 år plågats med detta arbete och derigenom tillbakahållits i sin utveckling är í sanning förfärande. Man kan derför ej vara nog tacksam mot de män, hvilka genom korta, enkla och väl redigerade läroböcker bidraga till att sprida och hos litet hvar inplanta de sanningar och upptäckter, som våra store män bragt i dagen. Tanken på hvad ondt Agrelii lärobok gjort och hvad godt en god undervisning kan göra, bör vara lifvande för hvarje skolman. Skolmannen är ju mellanhanden, som förer det skapande snillets alster till hvarje härd. Utan denna mellanhand skulle dessa alster komma verlden till liten eller ingen nytta.

AFDELNING II.

Angående den kända karakteriska egenskapen hos homogena funktioner.

Af C. J. MALMSTEN.

Vid Fysisk-Matematiska föreningens sammankomst d. 19 oktober 1871 framställdes till behandling bland andra uppgifter äfven *den*, att på ett enkelt sätt bevisa den bekanta egenskapen hos homogena funktioner

$$\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}\right)^k f(x\,,\,y)=n(n-1)\ldots.(n-\widehat{k-1}).f(x,\,y),$$

der $f(x\,,\,y)$ är en sådan funktion af n^{te} graden.

Det är med anledning häraf som jag tillåter mig här nedan meddela *tvenne* särskildta bevis för den likaledes kända, ännu generellare satsen

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k f=n(n-1)\ldots(n-\widehat{k-1}).f,\ \ldots (1)$$

der

$$f=f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,x_m)$$

är en homogen funktion af n^{te} graden.

Det *förra* A af dessa bevis, hvilka båda förutsätta såsom bevisadt, att

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)f=n.f,\ \ldots\ .\ (2)$$

är onekligen det enklaste; det *senare* B — eller rättare sagdt, hvad som i noten bevisas — torde icke heller sakna intresse, då det lemnar ett ganska godt tillfälle till öfning i kalkylen med högre partiella derivator.

A. *Bevis från k till k + 1.*

Antag att formeln

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k f = n(n-1)\ldots(n-\widehat{k-1}).f \;\ldots (3)$$

är gällande för k. Om man då å ömse sidor opererar med

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right) \;\ldots\ldots (4)$$

erhålles med tillhjelp af (2)

$$\left.\begin{aligned}&\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\right]f\\ &\qquad = n^2(n-1)\ldots(n-\widehat{k-1}).f\end{aligned}\right\}\ldots(5).$$

Men resultatet af operationen (4) på

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k \;\ldots\ldots (6)$$

är = summan af resultaterna som erhållas, om man *först* opererar med (4) på (6) såsom om i (6) $x_1, x_2, \ldots x_m$ vore konstanta, och *sedan* opererar med (4) på (6) såsom om i (6) $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \ldots \frac{d}{dx_m}$ vore konstanta.

Då nu i allmänhet

$$\left(a_1\frac{d}{dx_1}+a_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+a_m\frac{d}{dx_m}\right)\left(a_1\frac{d}{dx_1}+a_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+a_m\frac{d}{dx_m}\right)^k=$$
$$=\left(a_1\frac{d}{dx_1}+a_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+a_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1},$$

och

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)(A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_mx_m)^k=$$
$$=k(A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_mx_m)^{k-1}(A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_mx_m)$$
$$=k(A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_mx_m)^k;$$

så blir naturligtvis resultatet af operationen (4) på (6), *under förutsättning att i (6) $x_1, x_2, \ldots x_m$ äro konstanta,*

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1}, \;\ldots\ldots (7)$$

och resultatet af operationen (4) på (6), *under förutsättning att i* (6) $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2} \dots \frac{d}{dx_m}$ *äro konstanta,*

$$k\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k. \quad \dots \quad (8)$$

Om nu summan af dessa båda (7) och (8) insättes i (5) i stället för

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\right],$$

erhålles omedelbart

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1}f+k\left(x_1\frac{d}{dx_1}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k f$$
$$=n^2(n-1)\dots(n-\widehat{k-1}).f,$$

och med tillhjelp af (3)

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1}f=n(n-1)\dots(n-\widehat{k-1})(n-k).f. \dots (9)$$

Vi hafva således bevisat att, om formeln (3) gäller för k, densamma äfven gäller för $k+1$, och således i *allmänhet.*

B.

Om man på den bekanta relationen

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)f=n.f$$

opererar å ömse sidor med

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k,$$

erhålles omedelbart

$$\left.\begin{aligned}\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\right]f=\\ =n\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\dots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k.f\end{aligned}\right\}\dots(10).$$

Men nu är i allmänhet, såsom här nedan i noten skall bevisas, *

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\right]=$$

$$=\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1}$$

$$+k\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k;$$

således erhålles ur (10), om i stället för k sättes $k-1$,

---

* Om man enligt kända reglor utvecklar

$$\varphi_k=\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k, \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

erhålles

$$\varphi_k=\Sigma M.x_1^{k_1}.x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}, \quad \frac{d^k}{dx_1^{k_1}.dx_2^{k_2}\ldots dx_m^{k_m}}, \quad \ldots (\beta)$$

der summationstecknet hänför sig till alla möjliga kombinationer af värdena på $k_1, k_2, \ldots k_m$, hvilka uppfylla vilkoret

$$k_1+k_2+\ldots+k_m=k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

På grund af (β) erhålles då äfven

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_k\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\right]=\\&=\Sigma M.x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}\frac{d^k}{d\xi_1^{k_1}.d\xi_2^{k_2}\ldots d\xi_k^{k_m}}\left(\xi_1\frac{d}{d\xi_1}+\ldots+\xi_m\frac{d}{d\xi_m}\right)\end{aligned}\right\}, \ldots (\delta)$$

om man, efter att hafva verkställt

operationen $\dfrac{d^k}{d\xi_1^{k_1}.d\xi_2^{k_2}\ldots d\xi_m^{k_m}}$ på $\left(\xi_1\dfrac{d}{d\xi_1}+\xi_2\dfrac{d}{d\xi_2}+\ldots+\xi_m\dfrac{d}{d\xi_m}\right)$,

gör i resultatet $\xi=x$.

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + \ldots + x_m \frac{d}{dx_m}\right)^k =$$

$$= (n - \widehat{k-1})\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + \ldots + x_m \frac{d}{dx_m}\right)^{k-1} f.$$

Om i denna formel sättes undan för undan

$$k-1,\ k-2,\ k-3,\ \ldots\ 3,\ 2,\ 1$$

Men utan svårighet inses att för $\xi = x$

$$\frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}}\left(\xi_1 \frac{d}{d\xi_1} + \xi_2 \frac{d}{d\xi_2} + \ldots + \xi_m \frac{d}{d\xi_m}\right) =$$

$$= x_1 \frac{d^{k+1}}{d\xi_1^{k_1+1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}} + k_1 \frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}}$$

$$+ x_2 \frac{d^{k+1}}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2+1} \ldots d\xi_m^{k_m}} + k_2 \frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ x_m \frac{d^{k+1}}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m+1}} + k_m \frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}},$$

d. v. s. till följe af (γ) (för $\xi = x$)

$$= \left(x_1 \frac{d}{d\xi_1} + x_2 \frac{d}{d\xi_2} + \ldots + x_m \frac{d}{d\xi_m}\right) \frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}}$$

$$+ k \frac{d^k}{d\xi_1^{k_1} . d\xi_2^{k_2} \ldots d\xi_m^{k_m}}.$$

Detta insatt i (δ) gifver, på grund af (α) och (β) (för $\xi = x$)

$$\varphi_k\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + \ldots + x_m \frac{d}{dx_m}\right) =$$

$$= \left(x_1 \frac{d}{d\xi_1} + x_2 \frac{d}{d\xi_2} + \ldots + x_m \frac{d}{d\xi_m}\right)\left(x_1 \frac{d}{d\xi_1} + x_2 \frac{d}{d\xi_2} + \ldots + x_m \frac{d}{d\xi_m}\right)^k$$

$$+ k\left(x_1 \frac{d}{d\xi_1} + x_2 \frac{d}{d\xi_2} + \ldots + x_m \frac{d}{d\xi_m}\right)^k$$

i stället för k, och resultaterna multipliceras samt de lika faktorerna å ömse sidor bortdivideras, erhålles

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k f = n(n-1)\ldots(n-\overline{k-1}).f.$$

Hvilket skulle bevisas.

---

eller, hvilket är detsamma, (för $\xi = x$)

$$=\left(x_1\frac{d}{d\xi_1}+x_2\frac{d}{d\xi_2}+\ldots+x_m\frac{d}{d\xi_m}\right)^{k+1}+k\left(x_1\frac{d}{d\xi_1}+x_2\frac{d}{d\xi_2}+\ldots+x_m\frac{d}{d\xi_m}\right)^k,$$

och således slutligen

$$\left.\begin{aligned}&\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\left[\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)\right]=\\&=\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^{k+1}+k\left(x_1\frac{d}{dx_1}+x_2\frac{d}{dx_2}+\ldots+x_m\frac{d}{dx_m}\right)^k\end{aligned}\right\}\ldots(\varepsilon).$$

Hvilket skulle bevisas.

Om integrationen af partiela lineära differentialeqvationer af andra ordningen med r oberoende variabler.

Af M. FALK.

Följande härledning är i hufvudsak lika med den af prof. Boole i hans *Differential Equations* gifna framställningen af Monges metod för integration af partiela lineära differentialeqvationer af andra ordningen med två oberoende variabler. Vi hafva likväl skiljt oss från Boole deruti, att vi sökt göra en bestämd skilnad mellan differentialeqvationens satisfiering medelst en första integral innehållande en arbiträr funktion af definita funktioner och dess satisfiering medelst ett system, som uttrycker att samtliga dessa definita funktioner äro konstanta.

Att Boole sammanblandat dessa från hvarandra bestämdt skilda sätt att satisfiera diff. eqv., har blifvit en följd af det oriktiga förmenandet, att *en* relation $u = f(v)$ skulle, på grund af den omständigheten att f är arbiträr, vara identisk med *två* relationer, innebärande att både u och v äro konstanta. Han sluter ju af $du = f'(v)dv$ till, att $du = 0$ och $dv = 0$. Men detta är samma felslut som att påstå, att eqvationen $z = xy$ skulle, enär y är arbiträrt, endast satisfieras af $z = 0$ och $x = 0$, d. v. s. representera blott en *linie* (y-axeln), ehuru den ju tillåter oändligt många andra värden på x och y, eftersom den representerar en andregrads-*yta*. Denna anmärkning tro vi oss veta vara allmänt bekant; förf. till denna uppsats är ej den första, som gjort den.

Efter dessa förberedande anmärkningar öfvergå vi till sjelfva härledningen af integrations metoden. Här låta vi z betyda den beroende variabeln, som är funktion af de oberoende $x_1, x_2, \ldots x_r$; p_i må betyda $\frac{\partial z}{d x_i}$ för hvarje förekommande i-värde, och $u_1, u_2, \ldots u_r$ äro ett system af r *definita* funktioner af variablerna, bland hvilka funktioner åtminstone någon förutsättes innehålla en eller flera af z^s derivator p.

Teorem I.

Om det finnes en första integral

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_r) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

der F är en arbiträr funktion, till en viss partiel differential-eqvation af andra ordningen med r oberoende variabler, så är denna partiela differential-eqvation äfven satisfierad af systemet simultana eqvationer:

$$u_1 = \alpha_1, \; u_2 = \alpha_2, \ldots, u_r = \alpha_r \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

och omvändt: om systemet (2) *satisfierar differential-eqvationen, så satisfieras han äfven af* (1).

Bevis. Ur (1) härledes differential-eqvationen genom partiel derivering i afseende på hvar och en af de oberoende variablerna och derpå följande elimination af derivatorna af F i afseende på funktionerna u. För enkelhets skull mena vi med $\left(\frac{\partial u}{d x_i}\right)$ uttrycket $\frac{\partial u}{d x_i} + p_i \frac{\partial u}{d z}$. För att erhålla differential-eqvationen hafva vi då att eliminera de nämnda derivatorna af F ur systemet:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial F}{d u_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{d x_1}\right) + \sum_{j=1}^{j=r} \frac{\partial u_i}{d p_j} \frac{\partial^2 z}{d x_1\, d x_j}\right] = 0\,, \\
\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial F}{d u_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{d x_2}\right) + \sum_{j=1}^{j=r} \frac{\partial u_i}{d p_j} \frac{\partial^2 z}{d x_2\, d x_j}\right] = 0\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial F}{d u_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{d x_r}\right) + \sum_{j=1}^{j=r} \frac{\partial u_i}{d p_j} \frac{\partial^2 z}{d x_r\, d x_j}\right] = 0
\end{array}\right\} \dots\dots (3).$$

Eqvationerna (2), betraktade som simultana, innebära, enär derivatorna p äro funktioner af variablerna, bestämda af den funktionsform af dem som z är, r stycken relationer mellan de $r+1$ variablerna $z, x_1, x_2, \dots, x_r$. I eqvationerna (2) hafva vi således blott *en* oberoende variabel och r beroende, hvarför vi der hafva verkliga relationer mellan alla variablernas differentialer, hvilket icke är händelsen i (1). Vi kunna tänka oss det i (2) uttryckta sambandet mellan variablerna så, att vi anse z som funktion af de öfriga variablerna och dessa utom en som funktioner af denna undantagna. På grund häraf hafva vi då ur den omständigheten, att z får anses som funktion af

$x_1, x_2, \dots, x_r$,

$$dz = \sum_{i=1}^{i=r} p_i dx_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

och

$$\left.\begin{array}{l} dp_1 = \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial^2 z}{dx_1\, dx_i} dx_i\,, \\ dp_2 = \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial^2 z}{dx_2\, dx_i} dx_i\,, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ dp_r = \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial^2 z}{dx_r\, dx_i} dx_i \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dessa eqvationer hafva vi alltså att förena med följande ur (2) härledda:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{i=r} \left(\dfrac{\partial u_1}{dx_i}\right) dx_i + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial u_1}{dp_i} dp_i = 0\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{i=r} \left(\dfrac{\partial u_2}{dx_i}\right) dx_i + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial u_2}{dp_i} dp_i = 0\,, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{i=1}^{i=r} \left(\dfrac{\partial u_r}{dx_i}\right) dx_i + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial u_r}{dp_i} dp_i = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ur (6) är dz redan bortskaffadt på grund af betydelsen af $\left(\dfrac{\partial u}{dx_i}\right)$; vi behöfva derför blott använda (5) och (6) och mellan dem till en början eliminera dp_i. Då erhålla vi det med (5) och (6) eqvivalenta systemet

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=r}\left[\left(\frac{\partial u_1}{dx_i}\right)+\sum_{j=1}^{j=r}\frac{\partial u_1}{dp_j}\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j}\right]dx_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{i=r}\left[\left(\frac{\partial u_2}{dx_i}\right)+\sum_{j=1}^{j=r}\frac{\partial u_2}{dp_j}\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j}\right]dx_i=0,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\sum_{i=1}^{i=r}\left[\left(\frac{\partial u_r}{dx_i}\right)+\sum_{j=1}^{j=r}\left(\frac{\partial u_r}{dp_j}\right)\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j}\right]dx_i=0
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(7).^*$$

Koëfficienterna till derivatorna af F i (3) äro nu desamma som koëfficienterna till differentialerna af variablerna x i (7), dock så, att de horizontela raderna i det ena systemet äro i ordning lika med de vertikala i det andra. Enligt det på determinant-teorien byggda eliminationssättet blifva då eliminationsresultaten lika. Häraf följer således, att eqvationen (1) och systemet (2) alltid satisfiera samma differential-eqvation.

Korollarium. Om vi nu lättare kunna finna systemet (2) än eqvationen (1), så behöfva vi blott, sedan vi fått systemet (2), göra upp en arbiträr relation (1) mellan de funna funktionerna u för att erhålla en första integral till differential-eqvationen. Klart är äfven, att alla vilkor, som metoden att utgå från (1) inför, äfven innehållas i metoden från (2), och tvertom.

Teorem II.

Härledning af ett system ordinära differential-eqvationer, som systemet (2) måste satisfiera, om det skall gifva upphof till den lineära partiela differential-eqvationen:

---

* Att detta är eqvivalent med (5) och (6) sammantagna, är klart deraf, att de ingående derivatorna af z uttrycka, att z är funktion af $x_1, x_2, \ldots x_r$.

$$\sum_{i=1}^{i=r}\sum_{j=i}^{j=r}\chi_{i,j}\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j} = U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

eller, som är samma eqvation,

$$\sum_{i=1}^{i=r}\chi_{i,j}\frac{\partial^2 z}{dx_i^2} + \sum_{i=1}^{i=r-1}\sum_{j=i\cdot 1}^{j=r}\chi_{i,j}\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j} = U \quad . \quad . \quad . \quad . (9).$$

Denna eqvation skall således vara resultatet af alla differentialers elimination mellan (5) och (6). Den innehålles derför i systemet (5), om dess innehållna differentialer satisfiera (6), d. v. s. om systemet (2) satisfierar differential-eqvationen (9). Vi hafva derför att tänka oss, att derivatorna p, hvilkas differentialer ingå i (5) äro sådana funktioner af variablerna, som satisfiera (2). Då blifva äfven (6) satisfierade och differential-eqvationen bör följa ur systemet (5). Multipliceras derför eqvationerna (5) i ordning med indeterminerade faktorer λ_1, λ_2, ..., λ_r och adderas, så fås

$$\sum_{i=1}^{i=r}\sum_{j=1}^{j=r}\frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j}\,.\,\lambda_i dx_j = \sum_{i=1}^{i=r}\lambda_i dp_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (10)$$

eller, som man lätt finner,

$$\sum_{i=1}^{i=r}\frac{\partial^2 z}{dx_i^2}\,.\,\lambda_i dx_i + \sum_{i=1}^{i=r-1}\sum_{j=i+1}^{j=r}(\lambda_j dx_i + \lambda_i dx_j) = \sum_{i=1}^{i=r}\lambda_i dp_i \ldots (11).$$

Men enligt systemet (2) måste denna eqvation vara homogen och af 1:sta graden med afseende på differentialerna dx_1, dx_2, ..., dx_r, hvilka ju äfven ingå på detta sätt i dp_i, då dessa p_i betraktas som funktioner af variablerna, såsom ofvan nämnts. Men dessa variablers x differentialer hafva till hvarandra förhållanden, som äro funktioner af variablerna. Följaktligen kommer eqvationen (11) efter division med en af dessa differentialer då icke att innehålla någon af dem. Han bör derför med lämpliga funktionsvärden på qvantiteterna λ öfvergå i (9), hvartill tydligen är nödvändigt och tillräckligt att

$$\frac{\lambda_1 dx_1}{\chi_{1,1}} = \frac{\lambda_2 dx_2}{\chi_{2,2}} = \ldots = \frac{\lambda_r dx_r}{\chi_{r,r}} = \frac{\lambda_j dx_i + \lambda_i dx_j}{\chi_{i,j}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=r} \lambda_i dp_i}{U} \ldots (12).$$

Dessa utgöra alltså de eqvationer, som det är nödvändigt och tillräckligt, att qvantiteterna λ och eqvationerna (2) skola satisfiera, för att dessa sistnämnda eqvationer, betraktade som simultana, skola satisfiera (9). Dessa eqvationer (12) kunna vi dela uti två grupper, hvaraf den ena ger qvantiteterna λ och de vilkor, som i öfrigt måste vara uppfyllda, och den andra utgör sjelfva systemet ordinära differential-eqvationer, hvars integralsystem eqvationerna (2) äro. Ur (12) fås för alla i och j, som förekomma i dubbelsumman i (9) eller (11), eqvationerna

$$\chi_{i,j} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \chi_{i,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \chi_{j,j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

hvilka dels bestämma qvantiteternas λ förhållanden och dels äro vilkors-eqvationer mellan koëfficienterna i (9).

Dessa eqvationer (13) äro till antalet $\frac{r(r-1)}{2}$ och eqvationerna (12) äro $r + \frac{r(r-1)}{2}$ stycken, hvarför, om qvantiteterna λ satisfiera alla eqvationerna (13), vi blott hafva r distinkta differential-eqvationer qvar af (12) för att bestämma de r funktionerna u i (2). Men detta system innehåller mer än en differential mer än eqvationernas antal och är således ofullständigt. Det är derför icke säkert, att man kan erhålla ett system af r integraler till detsamma; detta kan ju tydligen blott ske, då differential-eqvationen har en första integral af formen (1).

Om det lyckats att bestämma qvantiteterna λ så, att alla eqvationerna (13) äro satisfierade (hvilket icke alltid är möjligt), kan man insätta dem i systemet

$$\frac{\lambda_1 dx_1}{\chi_{1,1}} = \frac{\lambda_2 dx_2}{\chi_{2,2}} = \ldots = \frac{\lambda_r dx_r}{\chi_{r,r}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i dp_i}{U} \quad \ldots \; (14),$$

som då i förening med eqvationen (4) är det sökta hjelpsystemet, hvarur (2) skola härledas.

[Hvad detta hjelpsystem angår, har Boole med användning af variations-kalkylen funnit eqvationerna

$$\chi_{i,i}\, dx_j^2 - \chi_{i,j}\, dx_i\, dx_j + \chi_{j,j}\, dx_i^2 = 0,$$

som utgöra hvad eqvationerna (13) blifva, om qvantiteterna λ_i och λ_j ersättas med de mot dem proportionela

$\frac{\chi_{i,i}}{dx_i}$ och $\frac{\chi_{j,j}}{dx_j}$. Se härom det af Todhunter utgifna Supplement till Boole's Diff. Equ.].

Eqvationerna (13) äro $\frac{r(r-1)}{2}$ stycken; de i dem ingående obekanta (qvoterna mellan qvantiteterna λ) äro $r-1$ stycken. Antalet vilkor, som (13) innehålla, är således $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$. För $r = 2$ äro dessa vilkor 0 stycken, och för $r = 3$ fås ett vilkor, som lätt befinnes vara

$$4\chi_{1,1}\chi_{2,2}\chi_{3,3} + \chi_{1,2}\chi_{2,3}\chi_{1,3} - \chi_{1,1}\chi_{2,3}^2 - \chi_{2,2}\chi_{1,3}^2 - \chi_{3,3}\chi_{1,2}^2 = 0 \;\ldots (15),$$

som, eget nog, är vilkoret för, att ytan

$$\chi_{1,1}\xi^2 + \chi_{2,2}\eta^2 + \chi_{3,3}\zeta^2 + \chi_{2,3}\eta\zeta + \chi_{1,3}\xi\zeta + \chi_{1,2}\xi\eta = U,$$

der ξ, η, ζ äro löpande koordinater, har antingen ingen eller oändligt många medelpunkter. För det allmänna fallet (r oberoende variabler) blifva vilkoren flera, men af samma form som (15).

Vi skola nu bevisa följande

Hjelpsats.

$$\frac{\partial F}{dp_i} = \lambda_i M \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i}\left(\frac{\partial F}{dx_i}\right) = -UM \;\ldots .\; (16),$$

der M är en af i oberoende funktion.

Bevis. Eqvationerna (5) och (6) äro eqvivalenta med (5), (13) och (14), enär hvartdera systemet återger (9). Men (5) och (6) äro eqvivalenta med (5) och (7); derför måste (7) vara eqvivalent med (13) och (14), sedan man i sista membrum af (14) eliminerat dp_i med (5). Vi böra derför äfven erhålla (9) genom att mellan en af eqvationerna (7) [t. ex. den som innehåller u_k] och alla eqvationerna (14) utom en [vi undantaga den, som fås genom att använda sista membrum] eliminera differentialerna af variablerna x, hvarvid naturligtvis qvantiteterna λ måste satisfiera (13). Denna elimination ger

$$\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} \frac{\partial u_k}{dp_i} \frac{\partial^2 z}{dx_i^2} + \sum_{i=1}^{i=r-1} \sum_{j=i+1}^{j=r} \left[\frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} \frac{\partial u_k}{dp_j} + \frac{\chi_{j,j}}{\lambda_j} \frac{\partial u_k}{dp_i}\right] \frac{\partial^2 z}{dx_i dx_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} \left(\frac{\partial u_k}{dx_i}\right) = 0 .$$

Som denna eqvation skall sammanfalla med (9), måste vi hafva

$$\frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial u_k}{dp_i} = m_k ,$$

$$\frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} \frac{\partial u_k}{dp_j} + \frac{\chi_{j,j}}{\lambda_j} \frac{\partial u_k}{dp_i} = m_k \chi_{i,j} ,$$

$$\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} \left(\frac{\partial u_k}{dx_i}\right) = -m_k U ,$$

der m_k är en af i oberoende funktion. Det andra af dessa vilkor är uppfyldt på grund af det första, emedan det följer ur det första i förening med (13) genom elimination af qvantiteterna λ. Vi behöfva således blott det första och det tredje vilkoret, och dessa gifva eqvationerna (16) genom multiplikation med $\frac{\partial F}{du_k}$ och summering från

$k = 1$ till $k = r$, om man för korthetens skull med M betecknar den af i oberoeode funktionen $\sum_{k=1}^{k=r} m_k \frac{\partial F}{d u_k}$.

Teorem III.

Om qvantiteterna p satisfiera de första integralerna till (9), *betraktade som simultana eqvationer, så uppfylla de äfven integrabilitets-vilkoren för eqvationen* (4).

Bevis. Enligt Booles *Diff. Equ.* sidan 354 eqv. (45) måste de funktioner af formen $\Phi = 0$, som tillsammans med $F = 0$ uppfylla de nämnda integrabilitetsvilkoren, härledas ur eqvationen

$$\sum_{i=1}^{i=r} \left[\left(\frac{\partial F}{d x_i}\right) \frac{\partial \Phi}{d p_i} - \frac{\partial F}{d p_i} \frac{\partial \Phi}{d x_i} - p_i \frac{\partial F}{d p_i} \frac{\partial \Phi}{d z} \right] = 0,$$

hvarför $\Phi = 0$ fås ur hjelpsystemet bestående af eqvationen (4) och

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d x_1}{\frac{\partial F}{d p_1}} = \dfrac{d x_2}{\frac{\partial F}{d p_2}} = \ldots = \dfrac{d x_r}{\frac{\partial F}{d p_r}} = \dfrac{d p_1}{-\left(\frac{\partial F}{d x_1}\right)} = \dfrac{d p_2}{-\left(\frac{\partial F}{d x_2}\right)} = \ldots = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{d p_r}{-\left(\frac{\partial F}{d x_r}\right)} = \dfrac{d \Phi}{0} \end{array}\right\} \ldots (17).$$

Dessa gifva med tillhjelp af (16) systemet

$$\frac{d x_1}{\lambda_1} = \frac{d x_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{d x_r}{\lambda_r} = \frac{\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} d p_i}{U}.$$

Sätter man vidare häri $\frac{\chi_{i,i}}{\lambda_i} = \mu_i$ och eliminerar alla λ ur detta system och ur (13), så får man

$$\frac{\mu_1 dx_1}{\chi_{1,1}} = \frac{\mu_2 dx_2}{\chi_{2,2}} = \ldots = \frac{\mu_r dx_r}{\chi_{r,r}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=r} \mu_i dp_i}{U} \quad \ldots (18),$$

der qvantiteterna μ bestämmas ur eqvationerna

$$\chi_{i,j} = \frac{\mu_j}{\mu_i}\chi_{i,i} + \frac{\mu_i}{\mu_j}\chi_{j,j} \quad . \; . \; . \; . \; (19).$$

Men som nu dessa eqvationer (18) och (19) äro alldeles desamma som (14) och (13), så är satsen bevist.

Obs. 1. Då $r > 2$, blifva de *generela* första integralerna till antalet färre än qvantiteterna p och räcka derför ej till bestämning af dem. Då måste man söka att integrera en af dessa första integraler, hvilket lätt går för sig, om den är lineär i afseende på derivatorna p.

Obs. 2. Man kan äfven söka en *komplett* primitiva till (9) och dervid gå så tillväga, att man först söker en *komplett* första integral till (9). En sådan kan erhållas derigenom, att man löser en generel första integral $F(u_1, u_2, u_r) = 0$ i afseende på en funktion u_k innehållande åtminstone någon af derivatorna p, så att man får

$$u_k = f(u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots u_r)$$

och ponerar f = en arbiträr konstant C. Detta visar, att alla de eqvationer af systemet (2), som innehålla någon eller några af derivatorna p, tillika äro kompletta första integraler till (9). Sedan en sådan $(u_k = C)$ är erhållen, sätter man i (17) $F = u_k - C$ och söker ur det sålunda uppkomna systemet, om möjligt, ut $(r-1)$ från denna skilda första integraler. Dessa tillsammans med $u_k = C$ gifva värden på derivatorna p, som göra (4) integrabel, och gifva således en komplett primitiva till (9).

Om den oskulerande koniska sektionen.

Af ERIK LUNDBERG.

Att finna den koniska sektion, som har en bestämd punkt O till bränpunkt och i någon viss punkt P oskulerar en gifven kurva APB (fig. 22).

Låt den gifna kurvan APB, hänförd till O såsom origo och OX såsom grundriktning, vara representerad af en eqvation i polarkoordinater

$$\varphi(r, \theta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

De qvantiteter som sökas äro:

λ = vinkeln XOK mellan grundriktningen och den del OK af den koniska sektionens axel, som är riktad från origo mot närmaste punkt L af den koniska sektionen,

e = den koniska sektionens excentricitet,

p = „ „ „ parameter.

Äro dessa bestämda, är den koniska sektionen till läge, form och storlek fullständigt känd.

Sambandet mellan koordinaterna r_1, θ_1 för hvilken punkt som helst på den koniska sektionen är

$$r_1 \{1 + e \operatorname{Cos} (\theta_1 - \lambda)\} = p.$$

Häraf erhålles genom differentiation

$$r'_1 \{1 + e \operatorname{Cos} (\theta_1 - \lambda)\} = e r_1 \operatorname{Sin} (\theta_1 - \lambda),$$

$$r''_1 \{1 + e \operatorname{Cos} (\theta_1 - \lambda)\} = 2 e r'_1 \operatorname{Sin}(\theta_1 - \lambda) + e r_1 \operatorname{Cos} (\theta_1 - \lambda).$$

Men enligt vilkoret i problemet skall den koniska sektionen oskulera den gifna kurvan, hvilket fordrar, att, om man gör

$$\theta_1 = \theta,$$

det äfven måste inträffa, att

$$r_1 = r\,,$$
$$r'_1 = r'\,,$$
$$r''_1 = r''\,,$$

hvaremot det i allmänhet ej är möjligt att bringa de högre derivatorna r'''_1, r^{IV}_1 etc. till likhet med r''', r^{IV} etc., enär man ej har flere än tre parametrar λ, e, p att förfoga öfver.

Med begagnande häraf få vi vilkorseqvationerna

$$r\,\{1 + e\,\text{Cos}\,(\theta - \lambda)\} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$r'\,\{1 + e\,\text{Cos}\,(\theta - \lambda)\} = e r\,\text{Sin}\,(\theta - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$r''\,\{1 + e\,\text{Cos}\,(\theta - \lambda)\} = 2 e r'\,\text{Sin}\,(\theta - \lambda) + e r\,\text{Cos}\,(\theta - \lambda) \ldots (4).$$

Enär θ är den arbiträrt bestämda kontaktspunktens polarvinkel, och r, r', r'' medels (1) kunna tänkas uttryckta i θ, innehålla dessa eqvationer inga andra obekanta än λ, e, p, för hvilkas bestämning de således äro tillräckliga.

Divideras (4) med (3) erhålles

$$\text{Cot}\,(\theta - \lambda) = \frac{r''}{r'} - 2\frac{r'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

hvaraf man genom jemförelse med (3) finner

$$e = \frac{r r'\,\text{Cosec}\,(\theta - \lambda)}{r^2 + 2 r'^2 - r r''} = \frac{\sqrt{r^2 r'^2 + (2 r'^2 - r r'')^2}}{r^2 + 2 r'^2 - r r''} \quad \ldots \quad (6).$$

Med användande af dessa uttryck för λ och e gifver slutligen (2)

$$p = \frac{r^3}{r^2 + 2 r'^2 - r r''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Härmed är i sjelfva verket problemet löst.

Emellertid blifva formlerna (5)—(7) anmärkningsvärdt förenklade, om man i dem sätter

$$r = \frac{1}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

och inför u såsom beroende variabel i stället för r.

Insättning af (8) i de redan funna uttrycken för λ, e, p möter naturligtvis ingen svårighet, men vi föredraga en direkt utledning af de nya uttrycken för samma qvantiteter.

Vi tänka oss medels (8) kurvans eqvation vara bragt till formen

$$\psi(u, \theta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Genom likartadt betraktelsesätt med det för härledning af (2)–(4) använda finna vi

$$pu = 1 + e \operatorname{Cos}(\theta - \lambda) \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

$$pu' = -e \operatorname{Sin}(\theta - \lambda) \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

$$pu'' = -e \operatorname{Cos}(\theta - \lambda) \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Häraf erhålles med lätthet

$$\operatorname{Cot}(\theta - \lambda) = \frac{u''}{u'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$e = \frac{\sqrt{u'^2 + u''^2}}{u + u''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

$$p = \frac{1}{u + u''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Då nu e och p äro kända genom (6) och (7) eller genom (14) och (15), finner man, under antagande att $e \gtrless 1$, den koniska sektionens halfaxel a och halfva fokaldistans c af eqvationerna

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

$$c = ae = \frac{pe}{e^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

hvarvid såsom positiv anses riktningen från L eller O mot K.

Kallas afstånden från origo till den närmaste och till den aflägsnaste ändpunkten af axeln respektive r_1, r_2, båda dessa afstånd räknade positiva i riktningen OK, har man

$$r_1 = c - a = a(e-1) = \frac{p}{e+1} \quad . \; . \; . \quad (18),$$

$$r_2 = c + a = a(e+1) = \frac{p}{e-1} \quad . \; . \; . \quad (19).$$

Någon mera anmärkningsvärd geometrisk egenskap hos den nu funna oskulerande koniska sektionen eller något samband mellan henne och den oskulerande cirkeln har jag ej funnit. * Dock torde formeln

$$\frac{p}{\varrho} = \left(\frac{r}{s}\right)^3,$$

der som vanligt ϱ = krökningsradien och s = bågen, ej sakna allt intresse. Dess sanning är lätt bevisad.

Vill man finna orten för den oskulerande koniska sektionens medelpunkt, då kontaktspunkten successivt flyttar sig utefter kurvan (1) [(9)], har man att mellan uttrycken för c och λ i någondera variabeln, t. ex. θ, eliminera denna variabel, hvarefter det erhållna, af θ oberoende sambandet mellan c och λ utgör eqvation för den i fråga varande orten, c och λ dervid betraktade som löpande koordinater. Naturligtvis är det dock för detta ändamål ej behöfligt att hafva c och λ explicit uttyckta i θ, utan man kan i stället lika väl eliminera θ, $r(u)$, e, p mellan (1) − (4) [(9) − (12)], (17).

Användes (18) eller (19) i st. f. (17) finner man på samma sätt orterna för axelns ändpunkter.

---

* Vid sökande härefter påträffade jag följande formler för bestämning af centrum curvaturæ (u_0, θ_0) och radius curvaturæ ϱ:

$$\frac{\text{Cos}\,(\theta - \theta_0)}{u_0} = \frac{uu'' - u^2}{u^2(u + u'')},$$

$$\frac{\text{Sin}\,(\theta - \theta_0)}{u_0} = \frac{u'(u^2 + u'^2)}{u^3(u + u'')},$$

$$\varrho = \frac{(u^2 + u^2)^{3/2}}{u^3(u + u'')}.$$

Ehuru de ej höra hit, har jag dock ansett dem förtjena antecknas. Den sista formeln förekommer i Todhunters Differential Calculus.

Orten för den rörliga bränpunkten är naturligtvis en med orten för medelpunkten i likformighetsförhållandet 2 homotetisk kurva.

Vi gå nu att tillämpa det föregående på ett par exempel.

Ex. 1. Den gifna kurvan må vara en logaritmisk spiral APB (fig. 23) sådan, att den konstanta vinkeln OPT mellan radius vector och tangenten är $= \alpha$. Då vi till grundriktning välja riktningen af den radius vector, hvars längd är $= 1$, blir kurvans eqvation

$$r = e^{\theta \operatorname{Cot} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

eller

$$u = e^{-\theta \operatorname{Cot} \alpha} .$$

Man finner nu enligt det föregående:

Axelns vinkel XOK med grundriktningen:

$$\lambda = \theta + \alpha - \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b),$$

excentriciteten:

$$\varepsilon = \operatorname{Cos} \alpha ,$$

halfaxeln LM:

$$a = -r ,$$

halfva fokaldistansen OM:

$$c = -r \operatorname{Cos} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$

radius vector OL till axelns närmaste ändpunkt:

$$r_1 = r(1 - \operatorname{Cos} \alpha),$$

samt radius vector ON till axelns andra ändpnkt:

$$r_2 = -r(1 + \operatorname{Cos} \alpha) .$$

Häraf framgå följande egenskaper.

De oskulerande koniska sektionerna äro alla likformiga ellipser med excentriciteten $\operatorname{Cos} \alpha$. I hvar och en af dem är storaxeln parallel med spiralens och ellipsens gemensamma tangent, så att kontakten eger rum i den ena ändpunkten af ellipsens lillaxel. Häraf är en naturlig följd, att längden af ellipsens halfva storaxel är = radius vector till kontaktspunkten.

På grund af dessa egenskaper är det ytterst lätt att i hvilken punkt som helst af spiralen konstruera den oskulerande ellipsen.

Eliminerar man r och θ mellan (a), (b), (c) erhålles

$$-c = \operatorname{Cos} \alpha \,.\, e^{(\lambda + \pi - \alpha) \operatorname{Cot} \alpha},$$

eller, då han i stället för $-c$ och $\lambda + \pi$, hvilka här kunna betraktas såsom löpande koordinater, skrifver r och θ,

$$r = \operatorname{Cos} \alpha \,.\, e^{(\theta - \alpha) \operatorname{Cot} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d).$$

Denna eqvation representerar orten för medelpunkten, i figuren utmärkt genom den prickade linien.

På liknande sätt finnas orterna för axelns ändpunkter L och N:

$$r = (1 - \operatorname{Cos} \alpha) e^{(\theta - \alpha + \pi) \operatorname{Cot} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

och

$$r = (1 + \operatorname{Cos} \alpha) e^{(\theta - \alpha) \operatorname{Cot} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (f).$$

Eqvationerna (d), (e), (f) utmärka, som man ser, logaritmiska spiraler, lika den gifna (a), men skiljande sig från denna till sina lägen resp. med vinklarna

$$\alpha - \frac{\log \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cot} \alpha},$$

$$\alpha - \pi - \frac{\log (1 - \operatorname{Cos} \alpha)}{\operatorname{Cot} \alpha},$$

$$\alpha - \frac{\log (1 + \operatorname{Cos} \alpha)}{\operatorname{Cot} \alpha}.$$

Ex. 2. Låt den gifna kurvan APB (fig. 24) vara

$$r\theta = k$$

eller

$$u = \frac{\theta}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a).$$

Hos denna kurva är subtangenten $\frac{r^2}{r'}$ konstant $= -k$.

För $\theta = 0$ är $r = \infty$. Kurvan har således en asymptot, parallel med grundriktningen och belägen på afståndet k

öfver densamma. Då θ växer från noll, aftager r alltjemnt, och kurvan beskrifver ett oändligt antal hvarf kring origo, hvarintill hon obegränsadt närmar sig.

Mot negativa värden på θ svarar en dylik gren, symmetriskt med den förra i förhållande till ordinataxeln OY. För undvikande af oreda har dock i figuren blott den mot positiva värden på r och θ svarande grenen blifvit utmärkt, lika som vi äfven i det följande inskränka oss till att taga endast denna gren i betraktande.

Formlerna (13)–(19) gifva

$$\lambda = \theta + \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b),$$

$$e = \frac{1}{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$

$$p = \frac{k}{\theta} = r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d),$$

$$a = \frac{k\theta}{1 - \theta^2},$$

$$c = \frac{k}{1 - \theta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e),$$

$$r_1 = \frac{k}{1 + \theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f),$$

$$r_2 = \frac{k}{1 - \theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g).$$

Af (b) och (d) synes, att kontakten mellan den gifna kurvan APB och dess oskulerande koniska sektion eger rum i ändpunkten P af den sistnämndas parameter OP, så att axeln LN är vinkelrät mot radius vector OP.

Tänker man sig OY tagen till grundriktning i stället för OX, är det af (b) tydligt, att (e)–(g) just blifva eqvationer för medelpunktens samt axeländpunkternas orter.

Det är lätt att finna utseendet af de genom (e)–(g) representerade kurvorna. Så föreställes t. ex. i figuren den första af dem (orten för medelpunkten) genom den prickade kurvan $acc_1 Mb$. Då kontaktspunkten flyttar sig utefter den gifna kurvan från oändligt afstånd mot den punkt C, hvars koordinater äro $r = k$, $\theta = 1$, flyttar sig medelpunkten i den oskulerande koniska sektionen, som enligt (c) då är en hyperbel, utefter ac. I C är den oskulerande koniska sektionen en parabel, hvadan motsvarande punkt af (e) flyttas på oändligt afstånd, och, som man lätt finner, har kurvan här en asymptot GH, belägen på afståndet $\frac{k}{2}$ från origo och bildande med OY en vinkel $= 1$. När sedan kontaktspunkten löper utefter den återstående delen CPB af kurvan, är den oskulerande koniska sektionen en ellips, och dess medelpunkt löper utefter $c_1 Mb$, beskrifvande en spiral, som med oändligt många hvarf omsluter origo.

(f) eller orten för axelns närmaste ändpunkt L är samma kurva som den gifna, vriden i positiv led en vinkel $= \frac{\pi}{2} - 1$.* (g) eller orten för axelns andra ändpunkt N är den kurva, som uppkommer, då (f) hvälfves ett hvarf kring OY. Dessa båda kurvor (ej utsatta i figuren) äro således lätta att upprita, och det inses utan svårighet, huru man med deras hjelp kan konstruera den oskulerande koniska sektionen i hvilken punkt som helst P af den gifna kurvan.

Emellertid kan man äfven konstruera den oskulerande koniska sektionen oberoende af dessa kurvor. Vi hafva nämligen sett, att längden af subtangenten OK är konstant och $= k$, på grund hvaraf tangenten KP kan dragas. Men då tangenten och den ena fokalradien OP äro gifna, erhålles genom afsättning mot tangenten af en med KPO lika stor vinkel den andra fokalradien PF och således äfven, då ju axelns riktning är känd, den andra

---

* d. v. s. vriden så mycket, att punkten C kommit att sammanfalla med a.

bränpunkten F. Härmed är äfven medelpunkten M bestämd, och storaxeln finnes nu antingen på grund deraf, att dess längd skall vara $= FP \pm OP$, eller på grund deraf, att dess halfva längd ML skall vara medelproportional mellan MO och MK.

Om konvergensen af kedjebråksutvecklingen för $\sqrt{a^2 - b}$.

Af M. FALK.

Schlömilch har i »Zeitschrift für Mathematik und Physik», 1872 1:sta häftet, meddelat, att en herr doktor Weyr uti »Abhandlungen der böhm. Gesellschaft der Wissenschaften» i febr. 1869 genom geometrisk undersökning upptäckt, att konvergensvilkoret $2a \geqq b + 1$ (hvilket Schlömilch för öfrigt blott bevist vara afgörande, då $2a$ och b äro hela tal) för kedjebråket i högra membrum af eqvationen

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ddots}}}$$

är för inskränkt och att det uttömmande kriteriet på detta kedjebråks kouvergens i stället är $a^2 \geqq b$. För denna sats lemnar Schlömilch derefter ett enkelt analytiskt bevis. Att Schlömilch verkligen anser nämnde d:r Weyr härvid hafva upptäckt något nytt, inses temligen klart af följande hans yttrande: »Neuerdings hat nun Herr D:r E. Weyr durch eine geometrische Untersuchung gezeigt......., und es entsteht daher die Aufgabe, dies auch analytisch nachzuweisen», hvarmed man sammanställe hvad han straxt ofvanför säger om kriteriet $2a \geqq b+1$: »Der Grund für die letztere Beschränkung lag in dem Mangel ausreichender Criterien für die Convergenz solcher unendlicher Kettenbrüche, welche aus negativen Einzelbrüchen bestehen». Men vid den tid, då Schlömilch utgaf 3:dje upplagan af sin »Handbuch d. algebr. Analysis» (1862), hade vi här i Sverige redan i 14 års tid varit vida bättre lottade, än hvad detta sista citat visar hafva varit händelsen i Tyskland, ity att vi hafva det Malmstenska skarpa kriteriet, som offentliggjordes år 1848 uti Vetenskaps-Akademiens handlingar. I detta bevisas som *specialfall* af det allmänna kriteriet, att kedjebråket

$$B = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

konvergerar, om $\frac{a_{n-1}a_n}{b_n} \geqq 4$. Som det föregående kedjebråket har $a_{n-1} = a_n = 2a$ och $b_n = b$, så ger detta kriterium $a^2 \geqq b$ som konvergensvilkor. Det är häraf tydligt, att äran af den upptäckt, som Schlömilch tillerkänner d:r Weyr, och dessutom den mycket större af att hafva funnit det skarpa generela kriterium, hvaraf denna d:r Weyers' upptäckt är specialfall af påtagligaste art, tillkommer professor C. J. Malmsten sedan nära ett fjerdedels sekel tillbaka.

Denna anmärkning hafva vi velat offentliggöra för att befria dem af våra svenska matematiker, som icke tagit kännedom om det Malmstenska kriteriet, men möjligen i en framdeles kommande ny upplaga af Schlömilchs Handbuch d. alg. Anal. få se denna d:r Weyrs upptäckt omnämnd, från att tro, att d:r Weyr är den, som först gjort oss fullständigt bekanta med konvergensen af kedjebråket för $\sqrt{a^2-b}$.

AFDELNING IV.

Beräkning af värdet på en premie-obligation för en tidpunkt hvilken som helst före förfallotiden.

För några veckor sedan lemnade mig en bankir en Smålands hypoteksförenings premieobligation med anhållan att få veta dess närvarande värde. Som beräkningen häraf utom dess praktiska nytta äfven erbjuder ett teoretiskt intresse, införes den samma här. Obligationen utgifven på tyska, har på svenska öfversatt följande lydelse.

Ena sidan.

"Premie-obligation

utfärdad af den svenska hypoteksföreningen mellan jordägare i Småland och andra provinser.

| Ser. 218. | *Grundad på jordegendomar belägna* | N:o 4360. |

i provinserna Småland, Halland, Blekinge och Skaraborgs län

för hela lånesumman utgörande

Stämpel för premielån. 5 Groschen eller $17\frac{1}{2}$ Kreuzer.	tio mill. **(10 000 000)** mark hamburger banko.		
	Mark 200 Hamburger banko.	Vapen.	Mark 200 Hamburger banko.

Vi OSKAR *med Guds nåde, Sveriges, Norges, Götes och Wendes konung,*

göre veterligt, att sedan styrelsen för hypoteksföreningen, mellan jordägare i Småland, Halland, Blekinge och Skaraborgs län jämte andragande, huru i följd af vunnen erfarenhet under föreningens verksamhet åtskilliga förändringar och tillsatser erfordras i det af Oss den 12 november 1846 faststälda reglementet för en tilltänkt hypoteksförening, till oss i underdånighet inlemnat en i föreskrifven ordning af deltagarne i föreningen antagen plan till ett förnyadt reglemente för ofvannämnda tilltänkta förening med ansökan om Vår nådiga stadfästelse å detsamma: Så hafva Vi, efter pröfning af den nämnda planen, med upphäfvande af Våra den 12 november 1846 och den 2 november 1847 gifna nådiga förordningar, fastställt följande reglemente för den ofta nämnda föreningen under förändrad benämning "Hypoteksförening mellan jordägare i Småland och andra provinser": — — —

§. 26. Föreningen eger att förskaffa sig lån 1) genom att upptaga s. k. amorteringslån efter de grunder, som i allmänhet iakttagas vid statslån — — —

§ 27. Amorteringslån få genom styrelsen upptagas så väl inom landet som i utlandet, hvarvid dock i senare fallet erfordras ett särskilt af föreningen på ordinarie bolagsstämma fattadt beslut deröfver samt öfver lånets maximibelopp. — — —

§ 33. Föreningens penningelån garanteras af dess enligt denna ordning ägande fordringar af reservfonden och af all annan föreningen tillhörande förmögenhet.

I den oväntade händelse att, sedan alla dessa medel blifvit anlitade, brist likväl skulle uppstå, skall bristen betäckas så väl af föreningens låntagare med deras i föreningen förpantade gård och grund som ock af de intressenter, hvilka icke hafva erhållit något lån, i förhållande till deras insatser, och skall denna säkerhet tillhöra obligationsinnehafvarne med företrädesrätt framför föreningens intressenter. — — —

Gifvet i Stockholms slott den 13 nov. 1849.

OSKAR.

A. P. Sandströmer.

Vid i dag här hållen ordinarie bolagsstämma af medlemmarne i hypoteksföreningen mellan jordägare i Småland och andra provinser blef föreningens styrelse befullmäktigad att vid första gynsamma tillfälle upptaga ett nytt amorteringslån å högst tio millioner hamburger mark banko i utlandet, hvilket härmed försäkras. Wexiö den 9 december 1857.

C. J. Keij. — *C. O. Hellman.*

Ordförande på bolagsstämman. — Föreningens ombudsman.

Vi undertecknade direktörer för hypoteksföreningen mellan jordägare i Småland och andra provinser förklara härmed, att vi, i följd af uppdrag på ordinarie bolagsstämma den 9 december 1857 af medlemmarne i denna förening och i följd af deras fullmakt här ofvan, såsom ock på grund af kongl. majestäts nådiga sanktion af det deröfver utfärdade reglementet af den 13 november 1849 och med uttryckligt tillstånd af chefen för finansdepartementet i Stockholm af den 17 juli 1858, hafva för ofvan nämnda hypoteksförenings räkning afslutat ett amorteringslån å tio millioner mark hamburger banko till här nedan angifna villkor och i följd häraf för beloppet af detta lån å tio millioner mark hamburger banko utgifvit 50000 stycken på innehafvaren stälda och med 60 halfårs ränte-kuponger försedda obligationer i 2500 serier med 20 stycken i hvarje.

Vi direktörer förplikta oss på det kraftigaste, för oss och våra efterträdare i styrelsen, att för hypoteksföreningens räkning oåterkalleligen iakttaga nedanstående bestämmelser:

1. Återbetalningen af kapitalet jämte räntan sker under de första tio åren genom utlottning med premier för innehafvarne enligt den på obligationernas baksida tryckta planen.

2. För detta ändamål företages dragning af de planmässiga serietalen hvarje år den 1 oktober och dragning af de planmässiga nummertalen den derpå följande 2 januari i Hamburg i närvaro af två notarier och ett befullmäktigadt ombud från föreningen eller af ett vittne, som angifves af herr Paul Mendelssohn-Bartholdy i Hamburg. Den första seriedragningen sker den 1 oktober 1859, den första nummerutlottningen den 2 januari 1860. Den första premieutbetalningen äger rum den 1 juli 1860.

3. Resultaten af utlottningarne skola offentliggöras genom åtminstone en berliner- och en hamburger-tidning.

4. Betalningen af de genom utlottningarna faststälda beloppen sker den 1 juli efter dragningen kostnadsfritt till innehafvarne af de dragna obligationerna hos herr Paul Mendelssohn-Bartholdy i Hamburg eller hos herrar Mendelssohn et C:o och H. C. Plaut i Berlin. Utöfver de förfallna kapital- och räntebetalningarna godtgöras aldrig vidare räntor, och beloppet af felande kuponger afdrages vid återbetalningen.

5. Efter tio års förlopp, d. v. s. från den 1 juli 1869 sker förräntningen af lånet med 4 procents årlig ränta i halfårliga delar den 2 januari och den 1 juli hvarje år efter kuponginnehafvarnes val kostnadsfritt i Hamburg eller Berlin hos de förut under n:r 4 angifna handelshusen. Amorteringen försiggår genom årliga utlottningar den 2 januari med 280 mark banko för hvarje obligation betalbar den derpå följande 1 juli.

6. Liqviden af räntorna samt af kapital-återbetalningspremierna sker i Hamburg i hamburger banko, i Berlin i preussiska thaler kurant till dagens kurs.

7. Kapitalåterbetalningar och räntor, hvilka ej återfordras inom fyra år efter deras förfallotid, tillfalla föreningen.

8. Skulle låneobligationerna brinna upp eller på annat sätt förkomma eller blifva odugliga, så är hypoteksföreningen skyldig att mot ersättning af derigenom för föreningen uppkomna kostnader, lemna nya obligationer i stället, sedan innehafvaren skaffat de erforderliga bevisen och sedan ett proklama utgått, hvarigenom de förkomna obligationerna blifvit dödade.

9. Hypoteksföreningen ställer på det sätt säkerhet för lånet, att *oberoende af tidigare lån* ett belopp af 10 000 000 mark hamburger banko i inteckningar i jordegendomar måste finnas i styrelsens ägo och

under dess skydd och ansvar, hvilket hypotek endast får ligga inom första hälften af det vid skattläggningen lagligen faststälda värdet.

18. Hypoteksföreningen är också med afseende på detta lån underkastad kongl. svenska regeringens kontroll.

Till säkerhet för det här sagda lofva och förplikta vi direktörer för hypoteksföreningen oss för oss sjelfva och våra efterträdare i styrelsen på det högtidligaste att hålla och iakttaga allt det, som af kongl. majestät i nåder föreskrifves till säkerhet för föreningens borgenärer.

Vi direktörer förklara härigenom vidare för oss och våra efterträdare i styrelsen, att innehafvarne af obligationer hafva ända till det i hvar och en af desamma faststälda beloppet en obestridlig fordran hos hypoteksföreningen liksom en mot storleken af hvarje obligation motsvarande andel i alla de rättigheter, villkor och fördelar, hvilka äro tillförsäkrade samtliga obligationerna.

Slutligen förplikta vi oss och våra efterträdare i styrelsen i hypoteksföreningens namn och å dess vägnar till noggrant och hastigt uppfyllande af förestående förpliktelser ingångna vid bolagsstämman mellan samtliga medlemmarne i hypoteksföreningen och sanktionerade af kongl. majestät, och bestrida för oss och våra efterträdare i styrelsen och i hypoteksföreningens namn invändningar och inkast af alla slag, hvilka skulle kunna anföras mot dessa våra utfärdade obligationer, särskilt den invändningen, att en allmän protest icke gäller, om icke de enskilta invändningarna i detalj anföras, vi bestrida invändningen om det misstaget, att saken blifvit annorlunda nedskrifven än efter aftalet, vi bestrida rättigheten för oss att begagna oss af moratorium eller af medgifvet uppskof för andra gäldenärer af deras betalningsförbindelser, vi bestrida den invändningen, att blott så mycket behöfver betalas som innehafvarne af obligationerna hafva gifvit i valuta för deras fordran, och öfverhufvud alla invändningar, som kunna härledas ur de svenska lagarne och den svenska författningen.

Wexiö, den 20 juli 1858.

J. C. Keij. J. H. Forshæll. C. Küijlenstjerna. A. Hederstjerna.
G. C:son Ulfsparre. J. C. Kuylenstjerna. C. v. Boisman.
J. Axelson. Wilhelm Rappe."

Andra sidan. (Se vidfogade tabell).

"Öfversigt af vinstdragningarna.

Den första seriedragningen sker den 1 oktober 1859, den första nummerutlottningen den 2 januari 1860. Den första premieutbetalningen äger rum den 1 juli 1860. De följande dragningarna och premieutbetalningarna ske under de derpå följande nio åren på samma terminer.

1860.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 40 000
2 ,, à	10 000 mark	,, 20 000
2 ,, à	5 000 ,,	,, 10 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
24 ,, à	700 ,,	,, 16 800
60 ,, à	400 ,,	,, 24 000
800 ,, à	224 ,,	,, 179 200
900 stycken		mark 500 000

1861.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 40 000
2 ,, à	10 000 mark	,, 20 000
2 ,, à	5 000 ,,	,, 10 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
24 ,, à	700 ,,	,, 16 800
60 ,, à	400 ,,	,, 24 000
800 ,, à	224 ,,	,, 179 200
900 stycken		mark 500 000

1862.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 40 000
2 ,, à	8 000 mark	,, 16 000
2 ,, à	5 000 ,,	,, 10 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
28 ,, à	700 ,,	,, 19 600
56 ,, à	400 ,,	,, 22 400
1 000 ,, à	232 ,,	,, 232 000
1 100 stycken		mark 550 000

1863.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 40 000
2 ,, à	8 000 mark	,, 16 000
2 ,, à	5 000 ,,	,, 10 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
28 ,, à	700 ,,	,, 19 600
56 ,, à	400 ,,	,, 22 400
1 000 ,, à	232 ,,	,, 232 000
1 100 stycken		mark 550 000

1864.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 35 000
2 ,, à	7 000 mark	,, 14 000
2 ,, à	4 500 ,,	,, 9 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
28 ,, à	700 ,,	,, 19 600
56 ,, à	400 ,,	,, 22 400
1 000 ,, à	240 ,,	,, 240 000
1 100 stycken		mark 550 000

1865.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 30 000
1 ,, à		,, 8 000
3 ,, à	4 000 mark	,, 12 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
28 ,, à	700 ,,	,, 19 600
56 ,, à	400 ,,	,, 22 400
1 000 ,, à	248 ,,	,, 248 000
1 100 stycken		mark 550 000

1866.

1 stycke à		mark 200 000
1 ,, à		,, 20 000
1 ,, à		,, 10 000
3 ,, à	4 000 mark	,, 12 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
28 ,, à	700 ,,	,, 19 600
56 ,, à	400 ,,	,, 22 400
1 000 ,, à	256 ,,	,, 256 000
1 000 stycken		mark 550 000

1867.

1 stycke à		mark 175 000
1 ,, à		,, 25 000
1 ,, à		,, 8 000
3 ,, à	4 000 mark	,, 12 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
36 ,, à	700 ,,	,, 25 200
48 ,, à	400 ,,	,, 19 200
1 060 ,, à	260 ,,	,, 275 600
1 160 stycken		mark 550 000

1868.

1 stycke à		mark 170 000
1 ,, à		,, 20 000
1 ,, à		,, 8 000
3 ,, à	4 000 mark	,, 12 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
34 ,, à	700 ,,	,, 23 800
50 ,, à	400 ,,	,, 20 000
1 060 ,, à	270 ,,	,, 286 200
1 160 stycken		mark 550 000

1869.

1 stycke à		mark 170 000
1 ,, à		,, 20 000
1 ,, à		,, 8 000
3 ,, à	4 000 mark	,, 12 000
10 ,, à	1 000 ,,	,, 10 000
34 ,, à	700 ,,	,, 23 800
50 ,, à	400 ,,	,, 20 000
1 060 ,, à	270 ,,	,, 286 200
1 160 stycken		mark 550 000.

De obligationer, som genom dessa tio dragningar icke amorteras, förräntas från den 1 juli 1869 efter 4 procent om året i halfårliga delar. Återbetalningen af dessa sker med 280 mark för stycket enligt de årliga utlottningar, som i följande utlottningsplan äro fastställda.

Amorteringstabell.

Nummerdragningarna för de obligationer, som enligt denna plan skola amorteras, äga rum hvarje år den 2 januari, betalningen för de utlottade pantbrefven den derpå följande 1 juli. Den första utbetalningen sker den 1 juli 1870.

År.	Stycken.	År.	Stycken.	År.	Stycken.	År.	Stycken.	År.	Stycken.
1870	843	1876	999	1882	1 183	1888	1 401	1894	1 659
1871	868	1877	1 028	1883	1 217	1889	1 441	1895	1 706
1872	893	1878	1 057	1884	1 251	1890	1 482	1896	1 755
1873	918	1879	1 087	1885	1 288	1891	1 524	1897	1 805
1874	944	1880	1 118	1886	1 324	1892	1 568	1898	1 857
1875	971	1881	1 151	1887	1 362	1893	1 613	1899	1 907

Tryckt i det kungl. preussiska statslotteriet."

Till hvarje obligation höra 60 ränteqvitton eller kuponger utgörande tillsammans ett ark, hvaraf man afklipper en kupong, som lemnas i utbyte hvarje gång man uppbär en halfårsränta. Vi aftrycka här endast den första och sista kupongen.

"№ 1. **Den första räntekupongen.** № 1.

hörande till premieobligationen, som blifvit utfärdad af den svenska hypoteksföreningen mellan jordägare i Småland och andra provinser.

Ser. 218 № 4360

betalbar den 2 januari 1870.

Innehafvaren af denna kupong emottager den 2 januari 1870 halfårsräntan för den ofvan betecknade låneobligationen å två hundra mark hamburger banko med

fyra mark hamburger banko

för hypoteksföreningens räkning hos herr Paul Mendelssohn-Bartholdy i Hamburg eller i preussisk kurant till dagens kurs hos herrar Mendelssohn et C:o och herr H. C. Plaut i Berlin.

Wexiö, den 20 juli 1858.

(L. S.) *J. C. Key.* *C. Küijlenstjerna.* *G. M. Ohlson.*

Räntor, hvilka ej lyftas inom fyra år från den i kupongen utsatta betalningsdagen, tillfalla hypoteksföreningen".

"№ 60. **Den sextionde räntekupongen.** № 60.

— — — — — — — — — — — — — — —

Ser 218. № 4360.

betalbar den 1 juli 1899.

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —"

Vi öfvergå nu till beräkningen af värdet på en obligation för en gifven tidpunkt.

Antages den procent, som obligationsköparen erhåller på sina penningar vara $= p$,

och sätter man det värde 280, hvarmed obligationen inlöses, $= a$,

„ „ 4, hvarmed hvarje kupong inlöses, $= b$, och för korthets skull

$$\frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{2}}} = c,$$

samt

$$V_{99},\ V_{98},\ \ldots\ldots\ V_{70}$$

obligationens värden den 1 januari 1899, 1898, ... 1870 respektive, så får man obligationens värde den 1 juli 1899 $= b + a =$ kupongens + obligationsbrefvets värde $= 284$.

Vidare blifver

$$V_{99} = b(1+c) + ac$$

eller lika med värdet b af den kupong, för hvilken penningar lyftas genast den 2 januari 1899

+ det för $\frac{1}{2}$ år rabatterade värdet bc af den kupong, för hvilken penningar lyftas den 1 juli 1899

+ det för $\frac{1}{2}$ år rabatterade värdet ac af det obligationsbref a, för hvilken penningar lyftas den 1 juli 1899.

Derefter finner man

$$V_{98} = b(1+c) + \frac{1857}{3764}\,ac + \frac{1907}{3764}\,c^2\,V_{99},$$

d. v. s. = närvarande värdet af de båda kuponger, som utfalla den 2 januari och den 1 juli 1898

+ närvarande värdet ac af obligationen a multiplicerad med sannolikheten $\frac{1857}{3764}$ att denna obligations nummer utfaller vid lottningen den 2 januari 1898

+ närvarande värdet $c^2 . V_{99}$ (d. v. s. V_{99} rabatteradt tillbaka 2 halfår) af obligationens värde V_{99} den 1 januari 1899, multipliceradt med sannolikheten $\frac{1907}{3764}$ att obligationens nummer ej utkommer vid lottdragningen den 2 januari 1898.*

---

* Visste man med säkerhet, att obligationens nummer utkomme vid dragningen den 2 januari 1898, så vore

$$V_{98} = b(1+c) + ac,$$

visste man åter med säkerhet, att denna nummer vid nyssnämnda dragning ej kunde utkomma, så vore

$$V_{98} = b(1+c) + c^2\,V_{99}.$$

Nu vet man intetdera, derför måste man vid beräkningen af värdet V_{98} medtaga af så väl ac som af $c^2\,V_{99}$ så mycket som sannolikheten för inträffandet af hvardera bjuder.

Anm. Som bekant uttryckes sannolikheten för att en händelse A inträffar genom ett egentligt bråk, hvars täljare utgöres af antalet af för händelsen A gynsamma fall och hvars nämnare utgöres af antalet af alla för samma händelse möjliga fall, gynsamma och ogynsamma. Här visar sig af bifogade amorteringstabell, att antalet gynsamma fall för att obligationens nummer utkommer vid lottningen den 2 januari 1898 är 1857 samt att summan af alla då ej ännu (strax före dragningen) utkomna lotter utgöra $1857 + 1907 = 3764$.

På samma sätt erhålles med ledning af amorteringstabellen

$$V_{97} = b(1+c) + \frac{1805}{5569}ac + \frac{3764}{5569}c^2 V_{98},$$

$$V_{96} = b(1+c) + \frac{1755}{7324}ac + \frac{5569}{7324}c^2 V_{97},$$

$$V_{95} = b(1+c) + \frac{1706}{9030}ac + \frac{7324}{9030}c^2 V_{96},$$

$$V_{94} = b(1+c) + \frac{1659}{10689}ac + \frac{9030}{10689}c^2 V_{95},$$

$$V_{93} = b(1+c) + \frac{1613}{12302}ac + \frac{10689}{12302}c^2 V_{94},$$

$$V_{92} = b(1+c) + \frac{1568}{13870}ac + \frac{12302}{13870}c^2 V_{93},$$

$$V_{91} = b(1+c) + \frac{1524}{15394}ac + \frac{13870}{15394}c^2 V_{92},$$

$$V_{90} = b(1+c) + \frac{1482}{16876}ac + \frac{15394}{16876}c^2 V_{91},$$

$$V_{89} = b(1+c) + \frac{1441}{18317}ac + \frac{16876}{18317}c^2 V_{90},$$

$$V_{88} = b(1+c) + \frac{1401}{19718}ac + \frac{18317}{19718}c^2 V_{89},$$

$$V_{87} = b(1+c) + \frac{1362}{21080}ac + \frac{19718}{21080}c^2 V_{88},$$

$$V_{86} = b(1+c) + \frac{1324}{22404}ac + \frac{21080}{22404}c^2 V_{87},$$

$$V_{85} = b(1+c) + \frac{1288}{23692}ac + \frac{22404}{23692}c^2 V_{86},$$

$$V_{84} = b(1+c) + \frac{1251}{24943}ac + \frac{23692}{24943}c^2 V_{85},$$

$$V_{83} = b(1+c) + \frac{1217}{26160}ac + \frac{24943}{26160}c^2 V_{84},$$

$$V_{82} = b(1+c) + \frac{1183}{27343} ac + \frac{26160}{27343} c^2 V_{83},$$

$$V_{81} = b(1+c) + \frac{1151}{28494} ac + \frac{27343}{28494} c^2 V_{82},$$

$$V_{80} = b(1+c) + \frac{1118}{29612} ac + \frac{28494}{29612} c^2 V_{81},$$

$$V_{79} = b(1+c) + \frac{1087}{30699} ac + \frac{29612}{30699} c^2 V_{80},$$

$$V_{78} = b(1+c) + \frac{1057}{31756} ac + \frac{30699}{31756} c^2 V_{79},$$

$$V_{77} = b(1+c) + \frac{1028}{32784} ac + \frac{31756}{32784} c^2 V_{78},$$

$$V_{76} = b(1+c) + \frac{999}{33783} ac + \frac{32784}{33783} c^2 V_{77},$$

$$V_{75} = b(1+c) + \frac{971}{34754} ac + \frac{33783}{34754} c^2 V_{76}.$$

$$V_{74} = b(1+c) + \frac{944}{35698} ac + \frac{34754}{35698} c^2 V_{75},$$

$$V_{73} = b(1+c) + \frac{918}{36616} ac + \frac{35698}{36616} c^2 V_{74},$$

$$V_{72} = b(1+c) + \frac{893}{37509} ac + \frac{36616}{37509} c^2 V_{73},$$

$$V_{71} = b(1+c) + \frac{868}{38377} ac + \frac{37509}{38377} c^2 V_{72},$$

$$V_{70} = b(1+c) + \frac{843}{39220} ac + \frac{38377}{39220} c^2 V_{71},$$

Anm. Summan af två på samma rad stående sifferbråk utgör alltid 1, emedan det ena bråket uttrycker sannolikheten för att en händelse inträffar och det andra sannolikheten för att samma händelse icke inträffar. Det är anmärkningsvärdt att talen i täljarne af den första vertikalraden temligen nära bilda en aritmetisk serie af andra ordningen. Tager man successivt skilnaden mellan två på hvarandra följande täljare, uppstår nämligen en aritmetisk serie, hvars första term är 50 och sista term 25 (allt ungefärligen).

För åren 1860—9 finnas inga kuponger. Vid dessa år förekommer utom nummerdragningen den 2 januari, äfven en seriedragning den 1 oktober (dock ej år 1869). Men som texten till obligationen ej på något ställe gifver vid handen, hvarken huru många serier vid hvarje seriedragning skola utlottas, ej heller huru många nummer af hvarje serie vid nummerdragningen skola förekomma, är det ej möjligt att beräkna värdet för tidpunkten den 1 januari, utan välja vi derför under dessa år i stället tidpunkten den 1 juli och beteckna obligationens värden den 1 juli 1869—59 med respektive

$$V'_{69}, \; V'_{68}, \; \ldots . \; V'_{59}.$$

Med ledning af öfversigten på obligationens andra sida finner man

$$V'_{69} = c\, V_{70}$$

d. v. s. = obligationens värde den 1 januari 1870, reduceradt till den 1 juli 1869

$$V'_{68} = \frac{550000}{40380} \cdot c^2 + \frac{39220}{40380} c^2\, V'_{69}.$$

Anm. 550000 är = summan af de vinster, som utdelas 1869 den 1 juli.

39220 = antalet af den 1 juli 1869 ännu qvarstående outlottade obligationer.

40380 = 39220 + 1160 antalet af den 1 juli 1868 ännu qvarstående outlottade obligationer.

$$V'_{67} = \frac{550000}{41540} c^2 + \frac{40380}{41540} c^2\, V'_{68},$$

$$V'_{66} = \frac{550000}{42700} c^2 + \frac{41540}{42700} c^2\, V'_{67},$$

$$V'_{65} = \frac{550000}{43800} c^2 + \frac{42700}{43800} c^2\, V'_{66},$$

$$V'_{64} = \frac{550000}{44900} c^2 + \frac{43800}{44900} c^2\, V'_{65},$$

$$V'_{63} = \frac{550000}{46000} c^2 + \frac{44900}{46000} c^2\, V'_{64},$$

$$V'_{62} = \frac{550000}{47100} c^2 + \frac{46000}{47100} c^2\, V'_{63},$$

$$V'_{61} = \frac{550000}{48200} c^2 + \frac{47100}{48200} c^2\, V'_{62},$$

$$V'_{60} = \frac{500000}{49100} c^2 + \frac{48200}{49100} c^2\, V'_{61},$$

$$V'_{59} = \frac{500000}{50000} c^2 + \frac{49100}{50000} c^2\, V'_{60},$$

Efter verkställande af här tecknade räkningar finner man obligationens värde

	4 %.	5 %.	6 %.
1899 den 1 juli vara mark	284,00 —	284,00 —	284,00
1899 den 1 jan. „	282,48 —	281,16 —	279,85
1898 „ „	280,99 —	278,35 —	275,81
1897 „ „	279,53 —	275,64 —	271,90
1896 „ „	278,09 —	272,99 —	268,10
1895 „ „	276,67 —	270,40 —	264,40
1894 „ „	275,28 —	267,88 —	260,82
1893 „ „	274,44 —	265,90 —	257,82
1892 „ „	273,01 —	263,41 —	254,36
1891 „ „	271,63 —	260,98 —	251,02
1890 „ „	270,28 —	258,63 —	247,78
1889 „ „	268,97 —	256,34 —	244,64
1888 „ „	267,68 —	254,10 —	241,60
1887 „ „	266,41 —	251,92 —	238,65
1886 „ „	265,18 —	249,80 —	235,79
1885 „ „	263,97 —	247,73 —	233,02
1884 „ „	262,78 —	245,71 —	230,33
1883 „ „	261,61 —	244,25 —	227,72
1882 „ „	260,46 —	242,28 —	225,17
1881 „ „	259,35 —	240,37 —	222,25
1880 „ „	258,25 —	238,50 —	219,91
1879 „ „	257,17 —	236,68 —	217,63
1878 „ „	256,11 —	234,90 —	215,41
1877 „ „	255,08 —	233,17 —	213,26
1876 „ „	254,05 —	231,49 —	211,16
1875 „ „	253,06 —	229,84 —	209,13
1874 „ „	252,08 —	228,23 —	207,15
1873 „ „	251,11 —	226,66 —	205,49
1872 „ „	250,16 —	225,14 —	203,59
1871 „ „	249,24 —	223,65 —	201,76
1870 „ „	248,32 —	222,20 —	199,98
1869 den 1 juli „	243,49 —	216,85 —	194,24
1868 „ „	240,50 —	213,56 —	190,83
1867 „ „	237,53 —	210,32 —	187,49
1866 „ „	234,57 —	207,13 —	184,22
1865 „ „	231 97 —	204,27 —	181,28
1864 „ „	229,35 —	201,43 —	178,38
1863 „ „	226,75 —	198,64 —	175,54
1862 „ „	224,17 —	195,89 —	172,76
1861 „ „	221,60 —	193,17 —	170,02
1860 „ „	218,97 —	190,30 —	167,07
1859 „ „	216,38 —	187,50 —	164,20.

Antager man, att obligationen såldes den 1 juli 1859 för jemnt 200 mark, finner man genom interpolation, att den verkliga räntefoten är 4,543 procent. Tager man nämligen differenserna, finner man

$$\Delta\,(4\ \%) = -\,28{,}88$$

$$\Delta\,(5\ \%) = -\,23{,}30$$

och häraf

$$\Delta^2\,(4\ \%) = +\,5{,}58\,.$$

Enligt Newtons interpolationsformel

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\Delta^2 u_0 + \ldots$$

blir således

$$200 = 216{,}38 - 28{,}88\,n + \frac{n^2 - n}{2}\,.\,5{,}58\,,$$

eller efter hyfsning

$$n^2 - 11{,}352\,n + 5{,}871 = 0\,,$$

som gifver

$$n_1 = 0{,}543\,,\quad n_2 = 10{,}809\,.$$

Men som n här bör vara ett egentligt bråk, finner man procenten vara

$$= 4 + 0{,}543\,.\,(5-4) = 4{,}543.$$

Stockholm, den 21 december 1871.

F. W. Hultman.

Anmälan och granskning af böcker.

1. SEGERSTEDT, A., *Geometrien i folkskolan och för nybegynnare. Metodiska anvisningar.* Karlstad 1871. 51 sidor. Häftad. 50 öre.

Arbetet är indelt i tre kapitel. Det första innefattar en i öfverensstämmelse med Bergii «geometri och lineärteckning« metodiskt ordnad kurs i geometrisk åskådningslära. I det andra får man lära sig att beräkna ytan af en parallellogram, triangel, månghörning, cirkel, cylinder, kon och klot (dock utan bevis för klotet); att finna rymden af en parallelepiped, ett prisma, en cylinder, pyramid, kon och klot, äfvensom att lösa några dermed sammanhängande uppgifter. Det tredje kapitlet innehåller några af satserna i förra hälften af Euklides' första bok med stränga bevis. Boken, som till stor del är utgifven såsom en ledning för läraren, är enkelt och klart skrifven samt förråder mycken pedagogisk erfarenhet, hvarför den synes oss lämplig för sitt afsedda ändamål. Endast i några smärre punkter tillåta vi oss några anmärkningar.

Sid. 4. Här säger förf., att en lärjunge på frågan: «hvad kallas en yta, som inneslutes af en korda och en båge?« skall svara: «den yta, som inneslutes af en korda och en båge, kallas segment.« Rigtigare är det att svara helt enkelt: «ett segment«. Logiken fordrar nämligen, att svaret angifver det uttryck, som skall sättas i st. f. frågeordet.

Sid. 8. Författarens definition, att kantvinkel är rummet mellan två ytor, som skära hvarandra, öfverensstämmer ej med författarens definition på linievinkel («öppningen mellan tvenne linier«) och är dessutom svårfattlig, emedan det mellanliggande rummet är oändligt stort.

Sidd. 24 och 25. Här visar förf, huru ytan af en rektangel finnes endast då sidorna betyda hela tal, men låter sedermera icke desto mindre sidorna äfven få brutna talvärden. Samma anmärkning gäller författarens framstälning af sättet att beräkna rymden af en kub (sidd. 37 och 38).

Sid. 32. Näst sista raden. Framför «3,14« böra tillsättas orden «i det närmaste«.

Sid. 41. Referenten har ej lyckats förstå, (ehuru det möjligen bör vara ganska lätt,) huru förf. tänker sig en parallelepiped med qvadratisk bas sönderdelad i fem pyramider med samma höjd som pyramiden, af hvilka en har till bas parallelepipedens qvadratiska bas och de öfriga fyra hafva till baser rektanglar lika stora med halfva basen. Emedlertid möter det inga svårigheter att uppdela en parallelepiped hvilken som helst i tre lika stora pyramider, som till baser hafva tre af parallelepipedens bestämmande sidoplan och till spets en af parallelepipedens vinkelspetsar.

Förf:s arbete är värdt erkännande derför, att han på ett enkelt och klart sätt visar de vigtigaste af elementar-geometriens sanningar vid mätning af plana och solida figurer och derigenom tidigt inviger nybörjaren i elementar-geometriens kanske mest fängslande kapitel.

F. W. HULTMAN.

---

2. ALBR. SEGERSTEDT. *Hufvudräkningskurs för folkskolor och nybegynnare.* Utarbetad af A. Segerstedt, seminarie-adjunkt. Karlstad. 1871. *E. Kjellin.* 124 sidor. 8:o. Häft. Pris: 90 öre.

Det hör till vår tids företräden att hafva framalstrat läroböcker, der tillbörligt afseende blifvit fästadt på pedagogikens fordringar. Särskilt gäller detta i afseende på läroböcker för barn. Om å ena sidan intet synes lättare än att skrifva en lärobok för barn, alldenstund de derför erforderliga kunskaperna äro ganska obetydliga, så torde å andra sidan knappast något vara svårare, enär läroboksförfattaren skall kunna helt och hållet ställa sig på barnets ståndpunkt, göra sig fri från en mängd förutsättningar, som för honom synas axiomatiska, men som för barnet ej äro det, samt ytterst långsamt gå framåt. Den som ej handlagt barnaundervisning kan ej göra sig en föreställning om de oerhörda svårigheter barnaundervisaren har att bekämpa, så framt han ej har förmågan att uppfylla de här angifna fordringar. Vid felaktig barnaundervisning sättes lärarens tålamod på de hårdaste prof, för hvilka han mången gång dukar under, och i stället för att erkänna felet ligga i hans egen undervisning, händer det ofta, att han tilldelar barnet skymford, eller att han om barnet fäller nedsättande omdömen, sådana såsom t. ex. att det är dumt, enfaldigt o. s. v. Den som skrifver dugliga läroböcker för barn, gagnar således ej ensamt derför att han lägger en god grund till ett nyttigt vetande och derför att han meddelar lärarne sättet att göra undervisningen angenäm, han gagnar barnen äfven i moraliskt hänseende derigenom, att han besparar dem många till intet tjenande snäsor, befriar dem från mycket gnat och sålunda äfven från ingalunda efterföljansvärda föredömen. Han gifver barnet hvad detta tillhörer. Han visar detsamma den aktning, hvartill detsamma sås.m en Guds afbild är berättigadt. Han uppfostrar i viss mon barnalärarne, han utbreder humanitet i verlden.

Ett arbete i denna rigtning är i fråga varande hufvudräkningskurs af Segerstedt.

Segerstedts arbete är indeladt i 6 kapitel

Första	kapitlet	19	sidor	behandlar	talet	1—5,
andra	„	17	„	„	„	6—10,
tredje	„	17	„	„	„	11—15,
fjerde	„	18	„	„	„	16—20,
femte	„	28	„	„	„	21—100,
sjette	„	24	„	„	„	öfver 100 jämte sorters reduktion och tillämpning af de fyra räknesätten.

Redan af denna indelning visar sig en pedagogisk anordning.

Öfver halfva arbetet eller 71 sidor äro egnade åt talen 1—20, och af dessa 71 sidor är den drygare fjerdedelen afsedd för talen 1—5. Ser man närmare på innehållet, skall man äfven der finna pedagogikens fordringar tillgodosedda. Sålunda utgöres hvarje kapitels ena hälft af additions- och subtraktionsöfningar, andra hälften af multiplikations- och divisionsöfningar. På begge slagen af divisionsfrågorna förekomma exempel. Arbetet består till största delen af idel frågor rörande konkreta exempel i systematisk ordning vanligen utan svar. Som exempel på förf:s metod anföra vi några:

Sid. 5. «Uppskrif med siffror huru många fötter du har!
„ „ streck „ „ tår du har på hvarje fot!
„ „ siffror „ „ fötter en oxe har!
„ „ streck „ „ horn han har!
„ „ siffror „ „ horn en hund har!«

Sid. 7. «En bonde hade ett par hästar; deraf såldes 1, och 1 bortbyttes mot en annan häst, huru många hade han sedan?«

Sid. 10. «En svala förde till sina ungar 2 flugor, 1 humla och 1 geting; — då hon kom tillbaka, var blott en fluga qvar; huru många insekter hade ungarne uppätit?«

Sid. 21. «På ett tak sutto 6 foglar, både sparfvar och ärlor; huru många af hvardera slaget?«
(Bra påhittadt exempel!)

Sid. 27. «I en ask lågo 5 tändstickor; deraf användes 3 på morgonen och lika många på aftonen; huru många äro sedan qvar?«

Detta exempel är anmärkningsvärdt för dess sokratiska metod.

Särskilt erkännande förtjenar förf:s sätt att före räkningen med talen 21, 22, 23 .... räkna med talen 10, 20, 30, o. s. v., ehuru vi skulle önskat att förf. i allmänhet skarpare accentuerat vigten deraf, att sedan man räknat ett tiotal med enheter af lägre ordning, man bör öfva sig med enheter af högre ordning, innan man börjar att räkna med tal sammansatta af enheter af begge slagen.

Den pedagogiska gången synes oss böra vara följande:

1) räkning med talen 1, 2, 3, ... 9,
2) „ „ „ 10, 20, 30, ... 90,
3) „ „ „ 11, 12, 13, ... 99,
4) „ „ „ 100, 200, 300, ... 900,
5) „ „ „ 101. 102, 103, ... 999, o. s. v.

Vi gilla derför ej, att förf. ställt talet 100 i samma kapitel, der talen 21—99 stå.

Några andra små anmärkningar ha vi ock att göra:

Sid. 5. Sista raden Talet 5 är betecknadt med 6 streck.

„ 7. Ex. 17. Står: «den« och «en annan«; läs: «det« och «ett annat.«

„ 13. Förf. säger sig i slutet af § 2 erhålla 40 öfningar. Huru förf. kunnat få detta tal ha vi ej lyckats förstå.

Sidd. 15—18. Här förekomma de på detta stadium oegentliga uttrycken $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}$. Hvad menas med en en-del?

Sid. 26. Ex. 83. Här hade förf. bort anmärka, att en månad kan innehålla 28, 29, 30 eller 31 dagar och att således på frågan kan lemnas 4 olika svar.

„ 51. Ex. 78. «Låt mig få hälften af dina 15 äpplen«, sade en gosse till en annan, «min syster har ändå dubbelt så många som jag«. Huru många hade systern? För att barnet skall kunna besvara denna fråga, hade förf. äfven bort angifva, huru många äpplen den förstnämnde gossen hade från början.

„ 53. Ex. 28. Här bör stå, att käppens *längd* innehålles i trädets *längd*, ej att käppen innehålles i trädet. Man kunde annars tro, att frågan gäller kubikinnehållet.

„ 63. Ex. 10. Här tages ankare i en annan betydelse än i ex. 96 på sid. 60.

„ 83. Ex. 139. «Arvid låg sjuk i messling från och med den 17 till och med den 26 maj; hans syster sjuknade den 12 och låg dubbelt så lång tid; när blef således hon frisk? (den 30.).« Svaret bör bli: «den 1 juni«.

På sid. 113 lägger förf. en synnerlig vigt på att barnen säkert kunna uträkna sådane produkter, hvilkas faktorer äro mindre än 26. Huru har förf. fått just talet 26 och ej något annat?

Sid. 116. Då förf. säger en månad vara = 30 dagar, borde förf. tillagt att i vissa länder anses vid ränteberäkningar alla månader ha 30 dagar, äfven om de i verkligheten ej ha det. I England lär dock räntan räknas efter verkliga antalet dagar i månaden. Några af förf:s exempel på sid. 116 äro olämpliga, emedan förf. ej angifvit hvilka månader han menar.

Dessa små anmärkningar hindra oss icke från att anse förf:s arbete godt och motsvara sitt ändamål.

F. W. H.

---

3. P. E. BERGSTRAND. *Fem-siffrige Logaritmer till 11000 af P. E. Bergstrand*, författare till «Anteckningar i Fältmätningskonst«, «Anteckningar i Höjdmätningskonst«, m. m. Stockholm. **Iwar Hæggströms** Boktryckeri 1872. Pris: 50 öre.

Vid anmälan af böcker händer ofta, att man uraktlåter omtala hvem som tryckt arbetet. Om vi dertill stundom gjort oss skyldiga, ha vi tvertom denna gång ansett oss böra med fetstil utmärka boktryckarens namn. I fråga varande arbete anslår nämligen genast genom dess i alla afseenden eleganta utstyrsel och tryck. Hvarje sida är innesluten i en ram af fyra röda linier. Logaritmerna äro tryckta med svarta, tydliga typer, men talen sjelfva äro tryckta med röda typer. Vi ha hört sägas att i Sverige, ja kanske ingenstädes, ett arbete med dylikt tryck blifvit verkstäldt. Att inpassa röda siffror tätt under eller rätt öfver svarta siffror är ingen lätt sak. Tack vare emedlertid herr Iwar Hæggströms sätt att trycka, framstår emedlertid skilnaden mellan hvad som är tal och hvad som är logaritm ganska skarpt, ja nästan som en militär i paraduniform bredvid en svartklädd civil man. Detta lilla arbete är en tunn bok, ej större än att den hel och hållen kan stoppas i en plånbok, utan att denna deraf synes på något ovanligt sätt vara späckad.

Herr Bergstrands logaritmtabell liknar temligen den af oss i 1868 års årgång anmälde logaritmtabellen utgifven af Broch. Skilnaden mellan desse begge författares tabellverk är följande:

1. Brochs tabeller innehålla både tallogaritmer och logaritmer för trigonometriska funktioner,

   Bergstrands tabeller innehålla endast tallogaritmer.

2. Brochs tallogaritmer äro tryckta på *nio* öppningar, en för talen 1000—1999,
   en för talen 2000—2999,
   . . . .
   en för talen 9000—9999.

   Bergstrands tallogaritmer äro tryckta på *tio* öppningar. Han har näml. dessutom en öppning för talen 10000—10999.

3. Broch markerar skilnaden mellan talen och logaritmerna genom rubrikerna «tal« och «mantissor« skrifna öfverst på hvarje sida. Bergstrand markerar talen genom rubriken «tal« och, såsom vi förut nämnt, genom att trycka dem med röda typer, så att hela talkolumnen till venster på hvarje sida äfvensom siffrorna 0, 1, 2 .... 9 öfverst och underst på hvarje sida äro tryckta med röda typer.

4. Broch har proportionalparter till alla differenser. Det minskade utrymmet i Bergstrands logaritmtabell har gjort att han på den första sidan (dock endast der) nödgats utesluta några differenser jämte deras proportionalparter.

5. För ränteberäkningar har Broch i slutet af sin tabell tillsatt några logaritmer med 7 decimaler (från 1 till och med $5\frac{1}{4}$ procent). Om Bergstrand hade på den tionde öppningen försett sina mantissor med två decimaler till, hade äfven hans tabell varit användbar vid räkning af ränta på ränta på kapital under 1 till 100 år. De tabellverk, som ha logaritmer för 100000 till 108000, ha af denna anledning för dessa tal alltid åtminstone 1 decimal mer i mantissorna, Wackerbarths 5-siffriga tabellverk har på detta ställe 7 decimaler.

6. Hvarje sida i Brochs tabeller är ungefär 1 tum längre och 1 tum bredare än en sida i Bergstrands.

7. Bergstrands öfverträffar Brochs i elegans.

8. Brochs tabell kostar 30 öre svenskt, Bergstrands 50 öre.

Då författarens arbete är så utmärkt framför andra arbeten i afseende på dess vackra tryck, är det förvånande att se att förf:n ej också begagnar sig af senare tiders sätt att genom från- eller tillvaron af streck markera huruvida sista decimalen är för låg eller för hög, så mycket mer som i Sverige användas åtminstone fyra tabellverk, der sådan markering är iakttagen, näml. Schröns sjusiffriga, Schlömilchs och Gernerths femsiffriga samt Phragméns tresiffriga (i hans trigonometri). Antag t. ex. att man vill veta log. $\sqrt{2}$. Enligt Bergstrands tabell är den $= (\frac{1}{2} . 0{,}30103 =) \, 0{,}15052$ efter vanligt sätt att räkna, men enligt Schl. eller Gern. är den bestämdt $= 0{,}15051$, emedan sista siffran 3 i log. 2 är under- eller öfverstruken. På samma sätt blir log. $\sqrt{5} \, (= \frac{1}{2} . 0{,}69897) = 0{,}34949$ bestämdt, emedan i de nyssnämnda tabellerna streck saknas under eller på siffran 7 i log. 5. — — Som vid våra elementarläroverk logaritmer numera endast begagnas på reallinien, men der åter trigonometriska tabeller äro ytterst nödige, vore det önskligt att förf. kompletterade sina tabeller med dylika, såsom förf. i företalet också antydt vara hans afsigt.

Förf:ns eleganta, i en nätt och beqväm form utstyrda tabell rekommenderas. Särskilt anse vi oss böra ännu en gång egna boktryckaren herr Iwar Hæggström vår hyllning för hans förtjenstfulla åtgöranden i detta herr Bergstrands företag. F. W. H.

4. *Elementarkurs i Geometrisk formlära och teckning. För skolornas behof af J. E. B.* Helsingfors 1871. G W. Edlunds förlag. 12 sidor text och 26 sidor plancher. 4:o. Pris: 2 mark.

Detta arbete skiljer sig från Ekmans och Bergii förberedande arbeten till den egentligen vetenskapliga geometrien derigenom, att den upptager en afdelning ornamentik. Man indelar sidorna till en regulier månghörning i ett godtyckligt antal lika stora delar, sammanbinder sedan olika sidors delningspunkter på något sätt så, att en symmetrisk figur uppstår. Denna figur, ofta stjernformig, alltid sådan, att skönhetssinnet tilltalas, skall lärjungen beräkna till sitt ytinnehåll i förhållande till hufvudfiguren. I utlandet, förnämligast i Tyskland utgör den geometriska formläran med sin ornamentik ett särskilt läroämne före den vetenskapliga geometrien. Vi rekommendera detta arbete af Finlands utmärkte pedagog, professor Bergroth, bearbetaren af Mundts geometri, utgifvaren af en utmärkt algebra, af en god fysik, till svenska lärares synnerliga uppmärksamhet, förvissade att det geometriska studiet i vårt kära fosterland skall derigenom vinna betydligt.

Rithäften för lärjungarnes räkning hörande till denna kurs kunna reqvireras för 35 penni stycket hos G. W. Edlund i Helsingfors.

Furusund, 1871.

F. W. HULTMAN

---

5. FAB. WREDE. *Försök att theoretiskt bestämma krutets verkan i kanoner.* Med 8 taflor. 42 sidor. 4:o. (Ur kongl. svenska vetensk.-akademiens handlingar.) Stockh. 1871.

Liksom mikroskopet i stort för oss framstält en verld, om hvars tillvaro menniskan förut knappast haft en aning, emedan de i densamma förekommande varelserna varit så små, att menniskoögat ej kunnat märka dem, så framställas ock genom denna afhandling i stort en mängd företeelser, om hvilka man förut ej haft mycken kunskap, emedan tiden för deras fortvaro varit för liten för omedelbar iakttagelse, och emedan dessutom sjelfva iakttagelsen varit förenad med stora faror, ja nästan omöjlig i anseende till otillgängligheten af det rum, der företeelserna ske. Hela tiden, som förflyter från antändningen af ett skott i en kanon, tills kulan lemnar mynningen, utgör endast $\frac{1}{200}$ sekund. Det är företeelserna inom kanonen under denna lilla tid, som man genom Wredes afhandling får se i stort. Man får nämligen här, för ett ögonblick hvilket som helst under denna lilla tid, veta, hvar i kanonen kulan för tillfället är, hvilken hastighet hon då har, hvilket tryck som då verkar på henne; man får på en mängd taflor se, hvar trycket är störst, lagen för dess till- och aftagande, lagen för hastighetens tillvext, samt huru så väl tryck som hastighet variera allt efter krutkornens storlek och form, kulans storlek och laddningens vigt. Ej nog härmed. Förf. har också användt sina formler på en mängd preussiska med noggranhet verkstälda skjutförsök och derigenom lyckats bestämma den hastighet, hvarmed ett kruthorn af den sort, som dervid begagnades, i en kanon förbrinner. Han har funnit att på 1 sekund fortplantas i en kanon förbränningen i ett sådant krutstycke (gediget) 5,4 dec.-tum. Likaledes har han med samma metod funnit, att i en kanon fortgår antändningen af en krutmassa med en hastighet af 354 fot i sekunden. De bestämningar af dessa hastigheter som man förut gjort ha visat sig otillförlitliga.

Grundtanken, hvarur nästan alla resultat blifvit härledda, är den, att gasens tryck på kulan stadd i rörelse är så mycket mindre än trycket på kulan, tänkt såsom fast, som det tryck som erfordras för att framdrifva krutgasen i det bakom kulan uppkommande förökade rummet.

Ledd af denna tanke finner förf. accelerationen på kulan i ett ögonblick hvilket som helst vara

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k\left[a(b\theta)^{1+c\theta} - \theta\,.\,\frac{dx^2}{dt^2}\right],$$

der tätheten

$$\theta = \frac{mf(t)}{n + x + hf(t)}.$$

Här äro k, a, b, c, m, n, h konstanter,

x = kulans tillryggalagda väg i kanonen,

$f(t)$ = en af tiden t rationel funktion, som dock ändrar form tvänne gånger under t:s tillvext.

Denna invecklade differentialeqvation, hvilkens integrering öfverstiger analysens hjelpmedel, afskräcker dock ej förf. från att taga i tu med den. I st. f. att genom hypoteser söka förenkla eqvationen och derigenom få densamma lämplig för integrering, söker han för olika värden på t de motsvarande hastighetstillskotten och erhåller genom deras summering integralen, det vill här säga hastigheten i ett godtyckligt ögonblick, äfvensom tätheten m. m., hvilka beräkningar visas i en särskilt tabell.

Genom att studera de afhandlingen åtföljande 8 taflorna får man en hastig, klar och fullständig öfversigt af företeelserna inom kanonen under den lilla tidrymden af $\frac{1}{200}$ sekund. Bland lagar, som förf. funnit, förtjenar följande att framhållas:

«Om ur olika stora, men likformiga kanoner skjutas likformiga projektiler med likformiga laddningar, till hvilka begagnas krut, hvars korns diametrar äro proportionela mot kalibern (d. v. s. mynningens diameter), så blifva hastigheterna och trycken alldeles desamma i båda kanonerna, på samma i kaliber bestämda afstånd från kanalbottnarne.«

Enligt denna lag blir således hastigheten i en jättekanon och i en liten nyckelpipa desamma, om de sjelfva, projektilerna, laddningarna, krutkornen äro likformiga och i samma skala. —

Vi hembära förf. vår tacksamhet för hans i alla afseenden briljanta förevisning.

Stockholm, januari 1872.

F. W. Hultman.

Upplysning till svenska aritmetikens historia.

Vid framstälningen af Biörcks lärobok påträffade vi ett problem, hvars lösning ledde dertill att det var sammanskrifvet på Medardi dag. Vi yttrade då vår förvåning öfver ett så besynnerligt för oss dittils obekant namn. Med anledning deraf har prof. A. D. Wackerbarth sändt oss följande meddelande.

«I afseende på «tidskr. för mat. och fysik« jan.—mars 1871 pag. 8 radd. 2 och 3 vill jag underrätta, att S:t Medardus var biskop i Noyon på 6:te århundradet. Han vigdes af S:t Rémi (den samma biskop, som döpte Clovis) 530. Året för hans död är osäkert, somliga angifva 545 och andra 561. S:t Medardi dag är den 8:de juni. Den biskopsstol, till hvilken han egentligen blifvit vigd, var Augusta Veromanduorum, för närvarande en by kallad Vermand litet norr om Sommefloden, men då denna stad sköflades följande året af hunner och vandaler, flyttade han biskopssätet till Noyon såsom en befästad stad. Jag tror det var han, som flandrenserna hafva att tacka för kristendomens införande i deras land.«

Prisuppgifter för år 1871.

Å den ena så lydande:

"Om de räta linier BD och EA äro lika stora, hvilka dela midt itu tvänne vinklar EBA och BED, som ligga på samma sida om det gemensamma vinkelbenet BE, så äro desse lika stora"

ha geometriska lösningar inkommit, nämligen af —o—a, J. A—t, L. J. D.....n från Lidköping, en anonym från Upsala och en dylik från Köpenhamn. Priset har blifvit bestämdt åt den sistnämnda uppsatsen på grund af dess elegans och *naturliga* bevisningsmetod. Vid namnsedelns öppnande befanns författaren vara den genom sina uppsatser i dansk matematisk tidskrift för oss väl bekante *Anton Pullich*, adjunkt ved metropolitanskolen i Kjøbenhavn. Honom tillfaller det större priset för år 1871, näml. de tre första årgångarne af tidskrift för matematik och fysik. Med *utmärkt loford* må herr J. A—t:s eleganta lösning omnämnas.

Å den andra prisuppgiften så lydande:

"Att upprita en qvadrat så att dess fyra vinkelspetsar ligga på tre gifna obegränsade linier"

hafva fyra lösningar inkommit, näml. från studenten Carl Traaen i Kristiania, studenten L. Bygdén i Upsala, —o—o från Upsala samt från herr L. Knudsen, exam. polyt. Bland dessa lösningar har redaktionen bestämt priset åt herr *Knudsens*, såsom på en gång enkel, kort och fullständig. Honom tillfaller det mindre priset för år 1871, näml. Plane Trigonometry by J. Todhunter.

Fig. 18.

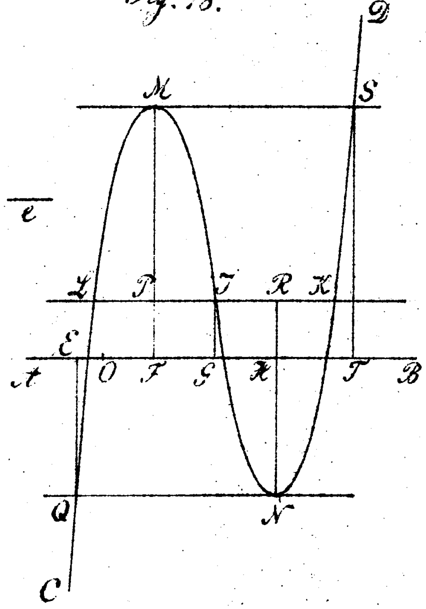


Fig. 19.

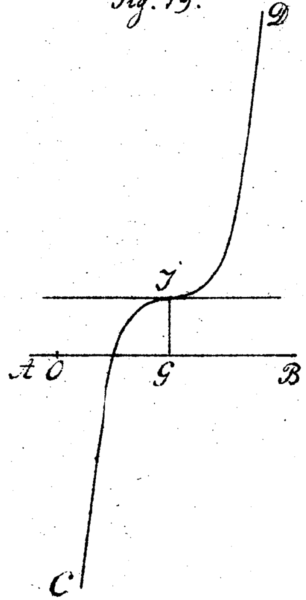


Fig. 20.

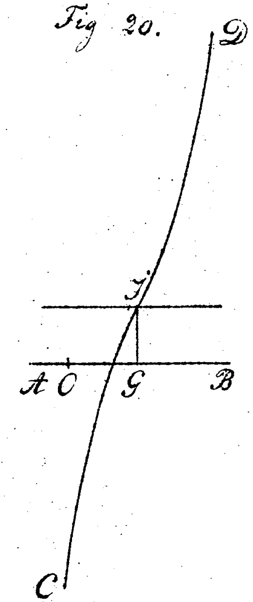


Fig. 21.

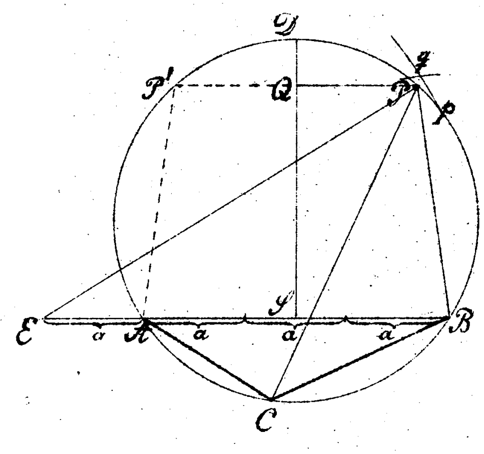


Fig. 22.

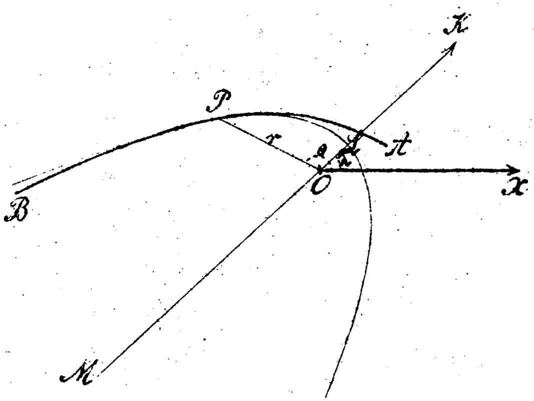


Fig. 23.

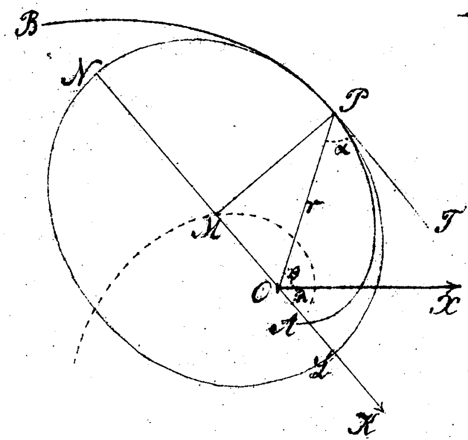


Fig. 24.