TIDSKRIFT

FÖR

MATEMATIK OCH FYSIK,

TILLEGNAD

DEN SVENSKA ELEMENTAR-UNDERVISNINGEN,

UTGIFVEN AF

D:R GÖRAN DILLNER
ADJUNKT I MATEMATIK VID UPSALA UNIVERSITET
(HUFVUDREDAKTÖR),

D:R FRANS W. HULTMAN
LEKTOR VID STOCKHOLMS HÖGRE ELEM.-LÄROVERK.

D:R T. ROB. THALÉN
ADJUNKT I FYSIK VID UPSALA UNIVERSITET

TREDJE ÅRGÅNGEN.

1870.

MED SEX TAFLOR.

UPSALA,
W. SCHULTZ.

UPSALA 1870,
AKADEMISKA BOKTRYCKERIET,
ED. BERLING.

Innehåll.

Afdelning I.

Afdelning II.

Afdelning III.

Afdelning IV.

AFDELNING I.

Schematisk framställning af läran om jemnlöpande (parallela) linier *.

Af Göran Dillner.

Förberedande satser **.

Definitioner och förklaringar.

Då vi här tala om punkter, linier och figurer, så underförstås alltid, att de ligga i samma plan.

* Läran om jemnlöpande linier har med afseende på den bekanta förutsättningen ("Euklids axiom") ständigt utgjort ett kors för den, som sökt systematicera den elementära geometriens satser. En hel literatur af mer eller mindre vidlyftiga arbeten har uppstått öfver detta, som det synes, enkla ämne; och de utmärktaste geometrer, såsom t. ex. Legendre, hafva deråt egnat tid och möda. Något fullt tillfridsställande resultat har dock, så vidt vi hafva oss bekant, hittills icke vunnits. Då ämnets elementära natur fordrar en utveckling, som icke allenast bör vara strängt logisk och systematisk, utan äfven nog enkel och lättfattlig för att motsvara sitt pedagogiska ändamål, så har det vanligen inträffat, att hvad som vunnits i det ena afseendet motsvarats af en förlust i det andra. Svårigheten synes, åtminstone ur pedagogisk synpunkt, bli väsendtligen modifierad, om man i stället för begreppet *vinkel* inför det mer ursprungliga begreppet *vridning* med sitt naturliga mått cirkelbågen; att vridning är det ursprungligare begreppet framgår deraf, att vinkelbegreppet, sådant det hör vara bestämdt för att vara *tjenligt* inom geometriens *alla* grenar, förutsätter för sin förklaring ("deskription") vridningen. I stället för "Euklids axiom" får man med denna utgångspunkt en ur rumåskådningen omedelbart framgående enkel grundsats, hvilken såsom *absolut enkel* icke kan bevisas. Ur denna grundsats låter läran om jemnlöpande linier lätt och enkelt utveckla sig.

** Vi upptaga här endast de satser, som äro oundgängligen nödvändiga för vårt ämnes utveckling, med uteslutande af alla sådana, hvilka från Euklides eller någon annan känd geometri kunna åberopas.

1. Då en rät linie ligger kongruent på en gifven rät linie med sin ene ändpunkt fäst och den andre rörlig, så kallas den rörelse, som beskrifves af en sådan linie, för *vridning;* den gifna linien kallas *grundlinie,* den rörliga *ben* och den mellan dessa linier bildade ytöppningen *vinkel.* Talar man om vridning utan vidare tillägg, så underförstås alltid, att hon sker *från höger till venster* eller *motsols;* är det på en gång fråga om tvenne eller flere vridningar, så underförstås, att de alla ha *lika* ben; förekommer uttrycket *successiva* vridningar, så förstås dermed, att den efterföljandes ben utgår från den föregåendes ben som grundlinie. Fästes icke något afseende vid, från hvilkendera linien vridningen sker, så kallas både grundlinien och benet med det gemensamma namnet *ben.*

2. En rät linies vridning mätes af den *cirkelbåge,* som beskrifves af hennes rörliga ändpunkt. *Likhet* mellan tvenne vridningar betyder således detsamma som likhet mellan deras bågar, och tvenne vridningars *summa* eller *skilnad* mätes af deras bågars summa eller skilnad.

Anm. Den af benet beskrifna bågen bestämmer tillika benets *rigtning* från grundliniens rigtning, då nämnligen dessa rigtningar anses gå från den fasta punkten till hvar sin af bågens ändpunkter.

Följdsatser.

a) *Det är för bedömandet af en rigtning eller vridnings storlek likgiltigt, från hvilken punkt af grundlinien benet utgår.*

b) *Lika vridningar göra de mellan benen inneslutna vinklarne lika*.*

3. En linie** är jemnlöpande med en rät linie, om

---

* Af cirkelns definition följer nämnligen, att bågar af samma eller lika cirklar täcka hvarandra, hvaraf omedelbart framgår kongruens mellan vinklarne.

** Man lägge märke till, att vi här säga linie utan vidare tillägg, hvilken således kan vara rät eller krokig; det gäller sedan att bevisa, att hon är rät. Man har på detta sätt i sjelfva definitionen inlagt ett hvarje hennes punkt är på lika afstånd* från den räta linien.

Följdsats.

a) *Två jemnlöpande linier träffas icke, om de tänkas oändligen utdragna.*

Grundsats**.

4. *Summan af två successiva vridningar är = hela den vridning, som den senares ben bildar med den förstas grundlinie.*

1:o. Antingen utgå de begge benen från samma punkt såsom i fig. 1, då summan af de två successiva vridningarna α och β omedelbart framgår såsom = hela vridningen γ.

2:o. Eller ock utgår den senare vridningens ben från någon punkt på den förstas ben såsom i fig. 2, då med

---

kriterium på jemnlöpning, hvilket lika väl låter tillämpa sig på den kortaste linie, hvilken icke på något sätt kan utdragas, som på den obegränsadt utdragna. För öfrigt har denna definition företrädet att vara fullt allmängiltig, så att hon gäller lika väl för de krokiga som de räta linierna.

* En punkts afstånd från en rät linie förutsätter definitionen på rät vinkel, som (i enlighet med Mundt) är en half "rak" vinkel, hvilken åter uppkommer, då benet vrides så, att det sammanfaller med grundlinien åt motsatt håll. Af denna bestämning på rak vinkel härledes omedelbart likhet mellan "vertikalvinklarne," hvilken sats vi snart komma att åberopa.

** Denna grundsats kan äfven uttalas under endera af följande former.

a) *Om genom tre successiva vridningar den sistas ben kommer att falla till hopa åt motsatt håll med den förstas grundlinie, så gör deras summa en rak vinkel.*

b) *Om genom tre successiva vridningar den sistas ben kommer att falla till hopa åt samma håll med den förstas grundlinie, så gör deras summa en hel omkrets.*

De två synpunkterna 1:o och 2:o tillämpas äfven här.

Med afseende på satsen b), sedd ur synpunkt 2:o, jfr Études géométriques sur la Theorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky, traduit par J. Hoüel, pag. 35.

stöd af § 2 a) summan af de två successiva vridningarna α och β måste vara = hela vridningen γ*.

Följdsatser.

a) *I en triangel är »yttre» vinkeln = summan af de två »inre.»*

Denna sats framgår omedelbart ur fig. 2, då β utbytes mot sin lika vertikalvinkel (jfr § 3, not*).

b) *I en triangel är summan af de tre vinklarne = en rak vinkel.*

Denna sats framgår omedelbart ur fig. 2, då man till den yttre vinkeln å ena sidan och till summan af de båda inre å den andra lägger fyllnadsvinkeln i en rak.

c) *I en fyrhörning är summan af de fyra vinklarne = 2 raka.*
Denna sats framgår omedelbart deraf, att fyrhörningen är uppdelbar i två trianglar.

---

* Det är satsen ur denna senare synpunkt, hvarpå parallel-teorien ytterst hänger. Såsom, koordinerad med denne (d. v. s. af den ene som grund framgår den andre som följd) ha vi följande sats: *om en rät linie flyttas öfver två fasta räta linier med fix rigtning i förhållande till den ena, så är ock hennes rigtning fix i förhållande till den andra.* Så t. ex. om OC i fig. 1 flyttas öfver de fasta linierna OA och OB till läget $O'C$ i fig. 2 med rigtningen β fix, så är ock rigtningen γ fix, och tvärtom (jfr förut cit. arbete pag. 37). Hvilken af dessa satser man än sätter som den förste, så är han absolut enkel och kan såsom sådan icke bli föremål för någon bevisning. Här har man att välja mellan 1:o att admittera såsom axiomatisk endera af desse enkla satser, eller ock 2:o att genom en mödosam omväg (till den sferiska triangeln och derifrån genom en limesöfvergång till den plana) söka träffa en grundsats för parallel-teorien. Om man ock ur pedagogisk synpunkt obetingadt måste välja det förra alternativet och det så mycket heldre, som den ene eller andre satsen kan *åskådliggöras* genom en rätt enkel undervisningsmateriel, så kan man å andra sidan icke underlåta att beundra den vetenskapliga rigorism, som ligger i det senare (se förut cit. arbete), äfven om man från den rigorösa synpunkten skulle hysa betänkligheter vid att genom en limesöfvergång öfverflytta den sferiska triangelns egenskaper på den plana, då nämnligen *aldrig* sferens yta kan identiskt sammanfalla med planet.

SATS I.

5. *Om en rät linie råkar två gifna räta linier och gör vinklarne på sin ena sida tillhopa = en rak, så gör ock hvarje annan råkande linie vinklarne på sin ena sida tillhopa = en rak.*

Vi låta AB (fig. 3) vara den råkande linien, som gör vinklarne $\alpha + \beta$ = en rak. Denna linie och den andra råkande linien bilda med de två gifna antingen en fyrhörning såsom $ABCD$ eller ock en triangel såsom ABE. I förra fallet följer beviset omedelbart ur § 4 c); i det senare fallet framgår beviset deraf, att $\alpha + \beta$ jemnte de tre vinklarne i triangeln göra till hopa två raka, då alltså, om vinklarne vid B tagas bort, de återstående vinklarne DAE och AEB göra tillhopa en rak.

Följdsats.

a) *Om en rät linie råkar två gifna räta linier och gör vinklarne på sin ena sida tillhopa = en rak, så gör denna äfvensom hvarje annan råkande rät linie »alternatvinklarne» lika.*

Denna sats följer omedelbart ur figuren.

SATS II.

6. *En linie, som är jemnlöpande med en rät linie, är sjelf rät.*

Vi taga tre punkter A, B, C (fig. 4) på den jemnlöpande linien och låta deras »fotpunkter» på den räta vara resp. a, b, c. Vi förena den medlerstes fotpunkt b med A och C, då trianglarne ABb och baA bli kongruenta [§ 5 a) och Eukl. I: 4*] och således vinkeln ABb rät. På samma

* Den här gjorda utvecklingen af läran om jemnlöpande linier förutsätter första och tredje fallet af trianglars kongruens, hvarför *hela* kongruensläran torde lämpligen böra ställas framför läran om jemnlöpande linier i följande system.

1:o) Kongruensfallet: *två sidor och mellanliggande vinkeln.*

Följdsatser.

a) *Basvinklarne i den likbenta* $\triangle$ *äro lika.* (Bevisas bäst genom kongruens mellan $\triangle ABC$ och den omvända $\triangle ACB$, då $\wedge B = \wedge C$ och $\wedge C = \wedge B$.

b) *Den vinkeln är större, som står mot en större sida.*

sätt bevisas, att den andra vinkeln vid B är rät, då alltså A, B, C ligga i rät linie, d. v. s. en tredje punkt alltid i rät linie med två och följaktligen alla punkterna i rät linie.

Följdsatser.

a) *En rät linie, som är vinkelrät mot en af två jemnlöpande räta linier, är ock vinkelrät mot den andra.*

b) *Om en rät linie råkar två jemnlöpande räta linier, så gör hon vinklarne på sin ena sida tillhopa = en rak och alternatvinklarne lika.*

Denna sats följer omedelbart ur a) med stöd af de båda satserna i § 5.

Sats III.

7. *Om en rät linie råkar två räta linier och gör vinklarne på sin ena sida tillhopa = en rak eller alternatvinklarne lika, så äro de två räta linierna jemnlöpande.*

Vi taga två punkter A och B (fig. 4) på den ena linien och låta a och b vara deras resp. fotpunkter på den andra. Genom att förena A och b, så fås kongruens mellan trianglarne Aab och bBA (§ 5 a) och Eukl. I: 26), då alltså $Aa = bB$, d. v. s. ett afstånd = ett annat, taget hvar som helst. Linierna äro följaktligen jemnlöpande.

2:o) Kongruensfallet: *tre sidor.*

3:o) Kongruensfallet: *två vinklar och en sida.*

Följdsatser.

a) *Om vinklarne vid basen äro lika, så är triangeln likbent.* (Bevisas direkt i enlighet med 1:o a)).

b) *Den sidan är större, som står emot en större vinkel.*

c) *Två sidor i en triangel är större än den tredje.*

d) *Af alla linier, som kunna dragas från en punkt till en rät linie, är den vinkelräta minst och sedan större ju aflägsnare från henne; blott tvenne lika kunna dragas, en på hvardera sidan om henne.*

4:o) Kongruensfallet: *två sidor och en icke mellanliggande vinkel samt den tredje vinkeln antingen spetsig eller icke spetsig i båda.*

Härefter följer läran om jemnlöpande linier och parallelogramen och sist (i enlighet med Mundt) konstruktionssatserna (problemen).

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 113, Årg. II).

6. ANDERS BURE.*

Denne man är den förste, som sökt införa tiodelningen i mått, mål och vigt i vårt land, och detta på en tid, då decimalräkningen knappt var känd. Visserligen har Anders Bure ej efterlemnat några tryckta skrifter angående denna fråga, men i J. T. Bures ** handskrifna collectanea

---

* Anders Engelbrektsson Bure föddes 1571 och dog 1646. Fadren var kyrkoherde i Själevad i Ångermanland. Anders Bure var en äldre broder till Olof Bure, för hvilken vi hafva redogjort i denna tidskrift, årgång I, sid. 148. Han blef kongl. sekr. år 1619, adlad 1624, Abgesandt till Ryssland vid Stolbovafredens afslutande. 1640 blef han assessor i krigskollegium. Hans ätt utgick med sonsonsonen Axel Eriksson Bure, som stupade i slaget vid Helsingborg 1710. Anders Bure, liksom många andra lärde på hans tid, var en mångsidig man. Så var han på en gång öfverste, arkitekt och generalmatematikus. Han har gjort sig känd genom utgifvande af de första någorlunda pålitliga kartor öfver Skandinavien.

Hans skrifter äro:

1. Orbis Arctoi inprimisque Regni Sueciæ nova et accurata descriptio. Stockholm 1626 fol., Lugd. Bat. 1633.

2. Tabula continens observationes in Linguam Suionicam et Fennicam.

Anm. Dessa uppgifter äro hemtade ur Biografiskt lexikon och ur Anreps Svenska Adelns ättartaflor. Enligt Biogr. lex. är Anders Bure yngre än Olof Bure, hvilken uppgift torde vara den rigtiga.

** Johan Thomæ Bureus föddes 1568 i Åkerby, der fadren var kyrkoherde. Johan Bureus var Gustaf Adolfs lärare. Han innehade nå-på Stockholms K. Bibliotek finna vi tabeller med öfverskrift *Andr. Burei räkning 1637*, hvilka utvisa huru många

kannor motsvara	$\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, . . .	$\frac{99}{100}$	af en	öltunna (= 48 kannor),
kannor och stop	$\frac{1}{100}$ . . .	$\frac{99}{100}$	„ „	åm (= 60 kannor),
fjerdingar och fat . . .	$\frac{1}{100}$ . . .	$\frac{99}{100}$	„ „	tunna (= 8 fjd = 40 fat),
qvintin, ort och ass . .	$\frac{1}{100}$ . . .	$\frac{99}{100}$	„	ett lod (= 4 qv. = 16 ort = 320 ass),
qvintin, ort och ass . .	$\frac{1}{100}$ . . .	$\frac{99}{100}$	„ „	skålpund (= 32 lod),
lispund och mark . . .	$\frac{1}{100}$ . . .	$\frac{99}{100}$	„ „	skeppund (= 20 lisp. = 400 mark).

Det är anmärkningsvärdt, att denna idé af Anders Bure att indela mått, mål och vigt i Sverige blef realiserad först år 1855 eller 218 år efteråt, och ändock är Sverige ett bland de land, som först tillegnat sig denna fördel.

7. Henrik Olofsson Hortulanus.

Dennes räknebok bär titeln: »Arithmetica. Eller Een kort Reknekunst, Hwarvthinnan the högste och förnämste Reglor finnas, som i Räkningen brwkas plägha. Medh sine Quatuor Speciebus bådhe i heela och brwtne taal, så wäl vthi Regula de Tri, som andre ther hoos biföliande Capittel och sköne Reglor i sigh sielff, med thess Explicationer och vthydningar förklarade äro. Alla unga Personer som härtil lust haffua ganska nyttigh. Item. Finnes widh Enden om Mynt- och Jord-Räkning, Wicht, Mått, och annat meer, effter som thet nw hos oss brwklighit är. Kortte-

---

gon tid en språklektion i Strengnäs. Blef sedermera riksarkivarie och K. Bibliotekets förste bibliotekarie. Har utgifvit «Konunga-Styrelse«. Öfverlemnade sig mot slutet af sin lefnad åt stora kabalistiska griller. Hans biograf säger om hans rastlösa verksamhet, att man dervid påminnes om Leontinus Gorgias och den pytiske Apollo. Han afled på sin gård Wårdsätra 1652, 84 år gammal. Biogr. Lexikon.

Vi begagna detta tillfälle att tacka bibliotekarierne Styffe och Högman för det de gjort oss uppmärksamma på tillvaron af A. Bures handskrifna tabell öfver mått och vigt.

ligen Sammansatt, och uppå Trycket vthgången. Aff Henrico Olai Hortulano Nycop. Strengnäs 1638.»

Utom denna upplaga förekomma på Stockholms K. Bibliotek ännu 3 andra upplagor, nämnl. en tryckt i Nyköping 1646 och tvenne i Göteborg af åren 1670 och 1674. Alla upplagorna äro i det närmaste oförändrade.

Hortulanus var regementsskrifvare vid Södermanlands infanteri och synes varit innerligt fästad vid sitt regemente. Derom vittna dels de krigiska exemplen i hans räknebok, dels hans tillegnan af den första upplagan. Han har nämnligen tillegnat denna åt landshöfdingen öfver Nyköpings län samt åt öfversten, öfverstlöjtnanten, majoren, qvartermästaren och alla närvarande kaptener vid regementet. Soldater och underofficerare har han visserligen glömt i sin tillegnan, men han kommer ihåg dem i exemplen.

De många upplagorna äfvensom ett uttryck * af förläggaren i upplagan af år 1670 bevisa, att Hortulani räknebok varit använd såsom lärobok i skolorna. Liksom Aurelius bevisar äfven Hortulanus räkningens gagn ur bibeln. Så säger H. i företalet, att aritmetiken är nyttig, emedan man medelst den kan åtskilja böcker, kapitel och verser i bi-

* Detta uttryck har följande lydelse: «Anno 1646 är denna Arithmetica, tillika med dess bifogade bokhålleri första gången hos mig tryckt uti Nyköping, och nu efter mångas begäran andra gången tryckt här uti Göteborg 1670.« Denna uppgift i förening med den omständigheten, att de 2 första upplagorna hafva tillegnan, hvilket de båda senare deremot sakna, visa, att Hortulanus aflidit mellan åren 1646 och 1670. Detta är nästan det enda, som vi lyckats få reda på angående Hortulani lif.

Anmärkningsvärdt är att samtidigt med denne Henrik Olofsson lefde i Södermanland en annan Henrik Olofsson (Theng), inskrifven i Södermanlands nation i Upsala 1599, sedermera pastor Vintrosensis, hvilken blef fader till en på den tiden ansedd matematiker («in mathematicis præcipue eximius«), Mag. Georg Vintrosensis, lektor i Strengnäs. Denna uppgift ha vi erhållit från Södermanlands och Nerikes förste kurator herr E. Widlund. Någon annan Henrik Olofsson finnes ej i Södermanlands nations matrikel.

beln, medelst den kan med ledning af profeterna beräkna verldens ålder. »Den som vill bygga ett torn, sitter han icke först och öfverlägger bekostningen, om han hafver det han behöfver till att fullborda med? Hvad konung vill begifva sig till örlig och strida emot en annan konung, sitter han icke först och räknar, om han må med 10000 möta honom, som kommer med 20000? Lukas 14 kap. 28 och 31 v.

Hortulani räknebok liknar i det närmaste Aurelii, Gothi och Ublenii räkneböcker. Räkningarna utföras liksom hos desse dels med siffror, dels med räknepenningar. Intet spår till decimalbråk eller tecken finnes. För öfrigt karakteriseras Hortulani arbete bäst genom några exempel. Vi anföra endast fyra.

Ex. 1. En fältöfverste gifver sine officerer, som de 4000 man gemene soldater kommendera skulle, till månadsbesoldning, nämnligen

1 kapten	36	daler,
2 löjtnanter och fänriker .	36	»
2 sargianter	20	»
4 underbefäl	20	»
6 korporaler	18	»
3 trumslagare och pipare .	6	»

huru mycket är hela summan?

Ex. 2. Man läser uti första mose boks 21 kapitel, att patriarken Abrahams son, Isak, blef född anno mundi 2049, men ifrån den tiden och intill dess Abraham sände sin tjenare att fria åt sin son Isak, hvilket skedde anno 2089, förflöto åtskilliga år. Huru månge år blefvo imellertid aflupne? Facit 40 år.

Ex. 3. En herre låter uppbygga och af nyo förfärdiga en byggning, den som är fyra våningar hög. I hvar våning åtta kamrar, i hvar kammar är try kantor. I hvart kantor 16 lådiker. Om desse lådiker voro så stort tillgripne, att i hvar lådika kunde rymmas 32 pungar, i hvar pung 45 riksdaler, och hvar riksdaler för det pris, som nu invarandes år taxeradt är, till 48 öre hvitt mynt, och hvart öre eller runstycke räknadt uppå fyra fyrkar. Nu frågas, huru många fyrkar deruti voro. Facit 424 673 280 fyrkar.

Ex. 4. Om 4 grannar bo uti en by tillsamman och äro skattlagde efter den gamla jordrefningen, den ene gården 5 öres land, den andre 2 öres land, den tredje 4 öres land, den fjerde 7 öres land. Men nu, när den nya landtmätningen hölls, finnes på hele byen 76958 qvadratalnar. Huru mycket bör då för hvars och ens gård tillordnas, så att dermed lagligen och rigtigt sker, betraktandes rättvisans framgång.

Hortulani bok slutar med en tafla öfver mått, mål och vigt, hvilken tabells sista rader lyda som följer: »Uppå guld och riksdaler kan intet visst pris sättas, efter dess värde dagligen förändras. Hvilken dess värde veta vill, han finner det väl med tiden.»

(Forts.)

Prisuppgiften för 1869.

På en godtycklig triangels sidor a, b, c uppritas qvadrater utåt. Dessa qvadraters yttre spetsar förenas genom räta linier a_1, b_1, c_1 så, att ingen qvadrat skäres af dem. På de så erhållna linierna a_1, b_1, c_1 uppritas åter qvadrater utåt, hvilkas yttre spetsar förenas genom räta linier a_2, b_2, c_2 så, att ingen af dessa linier skär qvadraterna. På a_2, b_2, c_2 uppritas nya qvadrater. Sålunda fortsättes enligt samma lag.

Man kan då bevisa, att

1:o. $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2:o. $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2)$.

Om undersökningen vidare fortsättes, hvad är summan *af nästa tretal qvadrater? Hvad är summan af det* $n^{\underline{te}}$ *tretalet?*

Hvilka egenskaper hafva de mellan qvadraterna liggande trapezierna?

På denna prisuppgift hafva inkommit 8 lösningar. Angående en af dem hade dess författare, herr X, uttryckt en bestämd önskan, att på den intet afseende skulle fästas vid prisutdelningen. Han hade nämnligen löst uppgiften endast för att angenämt fördrifva några timmar och derefter till redaktionen insändt denna sin lösning.

Innan vi gå att redogöra för dessa lösningar, vilja vi förklara de i det följande förekommande beteckningarna.

Vi teckna

$$
\begin{aligned}
S_0^2 &= a^2 + b^2 + c^2 , \\
S_1^2 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 , \\
S_2^2 &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 , \\
&\ldots\ldots\ldots \\
S_n^2 &= a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 .
\end{aligned}
$$

Vidare förstå vi med

T_0 den ursprungliga triangeln,

T_1	ett af trapezierna mellan	a	och	a_2,	eller mellan	b	och	b_2,
					»	c	»	c_2,
T_2	» » »	a_1	»	a_3,	»	b_1	»	b_3,
					»	c_1	»	c_3,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
T_n	» » »	a_{n-1}	»	a_{n+1},	»	b_{n-1}	»	b_{n+1},
					»	c_{n-1}	»	c_{n+1}.

Härefter öfvergå vi till vår redogörelse för de åtta lösningarna.

1.

Lösningen är åtföljd af en namnsedel utan någon sentens. I vapnet af sigillet synes en metkrok i blått och gult fält ofvanför ett haf i uppror, med underskrift: *non cedo tempori.* Ofvanför hjertvapnet spejar ett öga.

Förf. bevisar först, att

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= 3S_0^2 \\ S_2^2 &= 16S_0^2 \\ S_3^2 &= 75S_0^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Vidare lär han, att de tre trapezierna i ett system hvilket som helst äro sinsemellan lika stora paralleltrapezier. Dessutom bevisar han, att

$$\frac{a_{2n}}{a} = \frac{b_{2n}}{b} = \frac{c_{2n}}{c} = t_{2n} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

och att

$$\frac{a_{2n-1}}{a_1} = \frac{b_{2n-1}}{b_1} = \frac{c_{2n-1}}{c_1} = t_{2n-1} \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Han har derigenom inskränkt problemet till att finna t_{2n} och t_{2n-1}.

Förf:s eget framställningssätt medgifver att steg för steg beräkna S_4^2, S_5^2 o. s. v.

För trapezierna angifver författaren hans på induktionens väg funna rigtiga formel

$$T_{n-1} = t_{2n-1} \,.\, T_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Denna förmåga hos förf. att likt en siare se resultatet, långt innan han medelst den stränga bevisningens långsamma väg hunnit dit, beundra vi.

2. Herr X.

På ett klart sätt visar förf., att trapezierna

T_1	(eller trapeziet	mellan	t. ex.	a	och	a_2),
T_2	(eller	»	»	a_2	»	a_4),
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
T_{2n-1}	(eller	»	»	a_{2n-2}	»	a_{2n})

alla kunna sammansättas till ett enda paralleltrapezium, hvarest a och a_{2n} utgöra parallela sidor. Fogas den gifna triangeln intill detta så bildade trapezium på det sätt, att sidan a blir gemensam, och om derefter de icke parallela sidorna af trapeziet utdragas, så råkas dessa i triangelns tyngdpunkt. Härigenom uppstår en triangel, som till spets har triangelns tyngdpunkt, till bas sidan a_{2n} och till öfriga sidor

$$\tfrac{1}{3} c_1 + c_1 + c_3 + c_5 + \ldots + c_{2n-1}$$

och

$$\tfrac{1}{3} b_1 + b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2n-1}\,.$$

På samma sätt visar herr X, att man kan passa tillsammans paralleltrapezierna T_0 (triangeln mellan vinkelspetsen A af den ursprungliga triangeln och a_1), T_2, T_4, $\ldots T_{2n}$ till en enda triangel, som till spets har punkten A af den ursprungliga triangeln ABC och till bas sidan a_{2n} och till öfriga sidor

$$b + b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n-1}$$

och

$$c + c_2 + c_4 + \ldots + c_{2n-1}\,.$$

Med tillhjelp af de likformiga trianglar, hvaraf dessa stora trianglar äro sammansatta, leder förf. sig till relationerna

$$\frac{a_{2n}}{a} = \frac{b_{2n}}{b} = \frac{c_{2n}}{c} = t_{2n} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{a_{2n-1}}{a_1} = \frac{b_{2n-1}}{b_1} = \frac{c_{2n-1}}{c_1} = t_{2n-1} \quad \ldots \quad (3)$$

samt

$$t_n = 5t_{n-2} - t_{n-4} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Relationerna (2) och (3) i förening med 1 gifva:

$$\left.\begin{aligned} S_{2n}^2 &= t_{2n}^2 \,.\, S_0^2 \\ S_{2n-1}^2 &= 3t_{2n-1}^2 \,.\, S_0^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

och

Herr X's lösning utmärker sig genom en synnerlig elegans och enkelhet.

3. J. Mattsson,

elev vid Teknologiska institutet i Stockholm.

Sedan M. funnit relationerna 1, 2 och 3, visar han sammanhanget mellan 3 omedelbart på hvarandra följande t genom de begge likheterna

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= 3t_{2n-1} + t_{2n-2} \\ \text{och} \quad & \\ t_{2n+1} &= t_{2n} + t_{2n-1} \end{aligned}\right\}{}^{*} \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Härur leder sig M. på ett skarpsinnigt sätt till de båda serierna:

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= 3^{n} + (2n-1)_1 3^{n-1} + (2n-2)_2 3^{n-2} + (2n-3)_3 3^{n-3} + \ldots \\ \text{och} \quad & \\ t_{2n-1} &= 3^{n-1} + (2n-2)_1 3^{n-2} + (2n-3)_2 3^{n-3} + (2n-4)_3 3^{n-4} + \ldots \end{aligned}\right\} (8)$$

Med beteckningen k_r förstå vi som vanligt

$$k_r = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,r}.$$

Serierna (7) stadna, då man kommer till en binomialkoefficient k_r, som blir $= 0$.

Härefter bestämmes med yttersta lätthet S^2_{2n} och S^2_{2n-1} direkt i S^2_0 med tillhjelp af (6).

Man studerar med intresse den lyckliga metod, medelst hvilken M. arbetar sig fram till sina begge serier (8), hvilka innehålla lagen för storleken af summan af det n:te tretalet qvadrater.

M:s lösning visar, att M. är en man, som reder sig utan att behöfva hjelp af den matematiska literaturen.

4. O. J. Fjörtoft,

student i Kristiania år 1869.

Fj. börjar med att bilda en mängd trianglar, som innesluta den ene den andre, temligen öfverensstämmande med herr X. Så bildar han

* Att formlerna (7) skilja sig från (5) är helt naturligt, alldenstund formeln (5) angifver sambandet mellan 3 på hvarandra följande t med *endast jemna* eller *endast udda* indices.

af a_1, b_1, c_1 en triangel,
» a_3, b_3, c_3 en annan,
. . . .
» a_{2n-1}, b_{2n-1}, c_{2n-1} en annan.

Derefter ställer han dessa trianglar så, att

$$a_1 \parallel a_3 \parallel a_5 \parallel \ldots \parallel a_{2n-1},$$

hvarigenom inträffar, att äfven

$$b_1 \parallel b_3 \parallel b_5 \parallel \ldots \parallel b_{2n-1}$$

och att

$$c_1 \parallel c_3 \parallel c_5 \parallel \ldots \parallel c_{2n-1}.$$

De äro tillika stälda så, att motsvariga vinkelspetsar komma att ligga på en rät linie. På samma sätt bildar han trianglar af de sidor, som ha jemna indices.

Genom denna med herr X:s temligen närbeslägtade metod kommer han till följande nätta relation mellan tre på hvarandra följande trapezier:

$$T_n = 5T_{n-1} - T_{n-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Denna formel kan, som man lätt finner, härledas ur formlerna (2), (3), (4) och (5). Medelst formeln (9) leder sig Fj. till följande formel, som gifver T_n uttryckt omedelbart i T_0:

$$\frac{T_n}{T_0} = t_{2n-1} = 5^{n-1} - (n-2)_1 5^{n-3} + (n-3)_2 5^{n-5} - (n-4)_3 5^{n-7}$$
$$+ \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \left(\frac{n-1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} \quad . \; . \; . \; (10).$$

Här är n förutsatt vara udda. Skulle n vara jemnt, utbytes sista termen emot följande:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . \left(\frac{n}{2}\right)_{\frac{n}{2}} . 5 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

För ett system af tre på hvarandra följande tretal qvadrater finner han följande enkla formel

$$S_n^2 = 5S_{n-1}^2 - S_{n-2}^2 + (-1)^n . 2S_0^2 \quad . \; . \; . \; (12),$$

hvilken formel, såsom han visar, låter skrifva sig på följande sätt:

$$S_n^2 = S_{n-2}^2 + 3S_0^2 \cdot \frac{T_n}{T_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Medelst denna formel i förening med (10) leder han sig till följande sluteqvation:

$$S_n^2 = 3S_0^2 \cdot \{5^{n-1} - [(n-2)_1 - 1]5^{n-3} + [(n-3)_2 - (n-4)_1 + 1]5^{n-5}$$
$$- [(n-4)_3 - (n-5)_2 + (n-6)_1 - 1)5^{n-7} + \ldots\} \; . \; . \; (14).$$

Serien afbrytes, när man kommer till en potens af 5 med negativ exponent. Är n jemnt, skall man öka det genom (14) erhållna värdet med S_0^2.

I Fjörtofts afhandling röjer sig en *karakter*, som stadigt och säkert går framåt med blicken oaflåtligt fästad på sitt mål.

5. O. J. Stenborg, student.

Sedan Stenborg framtagit formeln (5) eller

$$t_n = 5t_{n-2} - t_{n-4}$$

och deraf härledt serien (10) eller

$$t_{2n-1} = 5^{n-1} - (n-2)_1 5^{n-3} + (n-3)_2 5^{n-5} - \ldots$$

samt formeln (7) eller

$$t_{2n} = t_{2n+1} - t_{2n-1},$$

drager han härur en praktisk formel för beräkningen af a_n på grund af (2) och (3). Han finner nämnligen

$$a_n = m_{(r)} \cdot a_{n-2^{r+1}} - a_{n-2^{r+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

hvarest 2^{r+2} är den högsta dignitet af 2, som ej öfverstiger n och hvarest

$$m_{(1)} = 5^2 - 2 = 23,$$
$$m_{(2)} = (23)^2 - 2 = 527,$$
$$m_{(3)} = (527)^2 - 2 = 277727,$$

och i allmänhet

$$m_{(r)} = m_{(r-1)}^2 - 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Medelst denna tabell finnas med yttersta lätthet värdena på a_n för olika värden på n.

För ett system af 5 på hvarandra följande tretal af qvadrater har förf. funnit följande märkvärdiga egenskap:

$$S_n^2 = 3S_{n-1}^2 + 8S_{n-2}^2 + 3S_{n-3}^2 - S_{n-4}^2 \quad . \quad . \quad (17).$$

Trapeziernas beräkning grundar han på formeln (9), hvarur han sedan härleder serien (10). För att praktiskt beräkna summan af ett tretal trapezier hvilket som helst använder han formeln:

$$T_n = m_{(r)} T_{n-2^r} - T_{n-2^{r+1}},$$

hvarest r och $m_{(r)}$ ha den förut omtalade betydelsen.

Relationen (17) är af ingen annan insändare anmärkt. För upptäckten af denna relation äfvensom för författarens enkla praktiska reglor samt för förf:ns i öfrigt väl genomarbetade afhandling bringa vi honom vår hyllning.

6. Ernst Pfannenstiehl, student.

Förf. härleder först, liksom Stenborg, den vanliga differenseqvationen (5), den deraf utvecklade serien (10), samt den senare af eqvationerna (7). Han uttrycker lagen för serien (10) medelst en symbolisk differentialeqvation, efter hvars integrering han finner

$$t_{2n-1} = \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \left[\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right] \ldots (18).$$

Häraf erhålles sedan följande vackra independenta bestämning af S^2 med udda indices:

$$S_{2n-1}^2 = \frac{S_0^2}{7} \cdot \left[\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right]^2 \quad . \quad . \quad (19).$$

Summan S_{2n}^2 finner han härur medelst anlitande af (7).

Trapezierna bestämmer han sedan medelst följande af honom härledda formler:

$$\left.\begin{aligned} T_{2n-1} &= \frac{S_{2n}^2 - S_{2n-2}^2}{S_2^2 - S_0^2} \,.\, T_1 \\ \text{och} \qquad T_{2n} &= \frac{S_{2n+1}^2 - S_{2n-1}^2}{S_3^2 - S_1^2} \,.\, T_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21).$$

Herr Pf:s lösning angifver, att han är en man, som har i sin magt matematikens kraftiga hjelpmedel på olika områden och som vet att begagna sig af dem för att komma fram till det åsyftade målet.

7. V. H. O. Madsen,

premierlöjtnant af artilleriet. Kjöbenhavn.

"Die Kunst is lang, und kurz ist unser Leben."

I likhet med herr X. visar Madsen egenskaperna hos trapezierna och den gifne triangelns tyngdpunkt samt härleder deraf relationen (5)

$$a_n = 5a_{n-2} - a_{n-4}.$$

Genom att integrera denna lineära differenseqvation af andra ordningen finner han:

$$\frac{S_{2n}}{S_0} = \frac{3+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \frac{3-\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} \cdot \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n \quad . \; . \; (22)$$

och

$$\frac{S_{2n-1}}{S_0} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \left[\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right] \quad . \; . \; . \quad (19).$$

Den senare eqvationen öfverensstämmer med den af herr Pfannenstiehl funna. Deraf finner han omedelbart för trapezierna formeln (18) på grund af formeln (4)

$$\frac{T_{n-1}}{T_0} = t_{2n-1} = \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \frac{S_{2n-1}}{S_1} = \frac{S_{2n-1}}{S_0\sqrt{3}} = \text{formeln (18).}$$

Madsens afhandling utmärker sig för sin elegans och enkelhet. Man igenkänner öfverallt mästaren. Det förvånade oss derför ej, då vi vid öppnandet af hans namnsedel igenkände namnet på författaren till en mängd lösningar och uppgifter i Tychsens tidskrift och till en deri förekommande afhandling i partiela differentialeqvationer.

8. F. OSSBAHR, student.

Ossbahrs differenseqvation har följande utseende:

$$S_n - S_{n-1}\sqrt{3} - S_{n-2} = 0.$$

Af slägtskapen mellan venstra ledet i denna likhet och uttrycket

$$1 - x\sqrt{3} - x^2,$$

leder han sig till att man genom att dividera täljaren med nämnaren i bråket

$$\frac{S_0}{1 - x\sqrt{3} - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

skall erhålla en qvot, der de stigande digniteterna af x få till koefficienter successivt

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ldots$$

också är

$$\frac{S_0}{1 - x\sqrt{3} - x^2} = S_0 + S_0\sqrt{3}\,.\,x + S_0 4x^2 + S_0\,.\,5\sqrt{3}\,.\,x^3$$
$$+ S_0\,.\,19x^4 + S_0\,.\,24\sqrt{3}\,.\,x^5 + \ldots$$

Här är

$$S_1^2 = (S_0\sqrt{3})^2 = 3S_0^2,$$
$$S_2^2 = (S_0\,.\,4)^2 = 16S_0^2,$$
$$S_3^2 = (S_0 5\sqrt{3}) = 75S_0^2,$$

o. s. v.

Som man ser, erhållas dessa värden med yttersta lätthet. Det erfordras blott en enkel division med derpå följande qvadrering. Bråket (23) sönderdelas derpå i 2 bråk, hvilkas nämnare äro af första graden. Härigenom erhålles:

$$\frac{S_0}{1 - x\sqrt{3} - x^2} = \frac{S_0}{2\sqrt{7}}\,.\left[\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\,.\,x} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\,.\,x}\right].$$

Verkställes här den tecknade divisionen inom parentesen och termerna ordnas efter stigande digniteter af x, får man som koefficient S_n för x^n:

$$S_n = \frac{S_0}{\sqrt{7}} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

en formel, som i sig innefattar båda formlerna (22) och (19).

För trapezierna finner Ossbahr härur relationen:

$$T_n = \frac{S_{2n+1}}{S_1} T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{21}} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)} - \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)}\right].$$

Det bråk, genom hvars division af täljaren med nämnaren man erhåller till koefficienter successivt termerna

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \ldots,$$

finner han ur relationen

$$T_n - 5T_{n-1} + T_{n-2} = 0$$

vara

$$\frac{T_0}{1 - 5x + x^2} = T_0 . [1 + 5x + 24x^2 + 115x^3 + 551x^4 + \ldots],$$

hvaraf man får

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0, \\ T_2 &= 5T_0, \\ T_3 &= 24T_0, \\ T_4 &= 115T_0, \\ T_5 &= 551T_0, \end{aligned}$$

o. s. v.

Ossbahr stadnar dock ej härmed. Han summerar nämnligen alla trapezier från och med det första tretalet till och med det $n^{\underline{te}}$, likaså alla qvadrater från och med det första till och med det $n^{\underline{te}}$. Han erhåller såsom värden på dessa summor

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \frac{S_{2n+2} - S_2}{3S_0} T_0$$

och

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2 = \frac{S_n S_{n+1}}{\sqrt{3}} - S_0^2.$$

Ossbahrs lösning är lättläst och fullständig.

Af föregående sammanställning visar sig, att MATTSSON, FJÖRTOFT, STENBORG, PFANNENSTIEHL, MADSEN och OSSBAHR alla bestämt summan af ett hvilket som helst tretal qvadrater eller trapezier uttryckt omedelbart i det första tretalet, att de 4 första (M., F., S. och Pf.) uttryckt denna summa i serier, att de 3 sista (Pf., M. och O.) angifvit denna summa i en qvadrat på skilnaden mellan 2 termer. Ossbahr har dessutom summerat samtliga så väl qvadraterna som trapezierna från och med det första till och med det $n^{\underline{te}}$ tretalet. Stenborg och Ossbahr hafva praktiska formler för beräkningen af qvadraterna och trapezierna. Alla 8 hafva lemnat formler för sammanhanget mellan 3 på hvarandra följande system af qvadrater eller trapezier. Stenborg har dessutom visat ett sammanhang mellan 5 omedelbart på hvarandra följande system af qvadrater hvilka som helst.

Efter att hafva tagit i skärskådande alla afhandlingar med undantag af herr X. (som ej insändt sin afhandling för detta ändamål) och jemnfört dem i afseende på elegans, grundlighet och fullständighet, har redaktionen bestämt

det *större priset*:

TODHUNTER'S HISTORY OF THE PROBABILITY åt

premierlöjtnant V. H. O. MADSEN

och det *mindre priset:*

TODHUNTER'S HISTORY OF THE CALCULUS OF VARIATIONS åt

student F. OSSBAHR.

Dessutom loforda vi alla de öfriga för deras omsorgsfullt utarbetade värderika afhandlingar öfver i fråga varande prisproblem.

Anm. Liksom i fjol, komma äfven i år de utmärktaste lösningarna af prisproblemet att tryckas och särskildt säljas mot lämplig afgift.

Prisuppgifter för 1870.

1. *Om de räta linier BD och EA äro lika stora, hvilka dela midt i tu tvänne vinklar ABE och DEB med ett gemensamt ben BE, så äro dessa vinklar lika stora.*

2. *Om två trianglar hafva gemensam midtellinie* och den enes halfva bas är bissekerande medelproportional ** till den andres omfattande sidor, så är ock dennes halfva bas bissekerande medelproportional till den förres omfattande sidor.*

Det större priset är: ALGEBRA BY I. TODHUNTER.

Det mindre priset är: PLAN TRIGONOMETRY BY I. TODHUNTER.

Lösningarna böra vara insända till lektor HULTMAN före den 1 Januari 1871.

---

* Den linie, som drages från en triangelspets till motstående sidans (basens) midtpunkt; omfattande sidor bli då de öfriga två sidorna.

** Den linie, som är medelproportional mellan de två linierna och på samma gång parallel med bissektricen till deras vinkel.

AFDELNING II.

Ogsaa en Methode til Integration af

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 2f(x^2+y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

1. I dette Tidsskrifts anden Aargang Side 69 har Landshøvding *Malmsten* leveret en interessant Integration af ovenstaaende Differentialligning, som han allerede tidligere har behandlet i Kgl. Svenska Akad. Handl. Ny Följd 3 B. 1859—60, Stockholm 1862. Ved Læsningen af denne sidste Afhandling faldt jeg paa en anden Integration, som maaske ogsaa kan have sin Interesse og i ethvert Tilfælde synes mig at føre temmelig hurtigt til Maalet.

Sættes $\frac{dy}{dx} = p$, faaer man

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 2f(x^2+y^2),$$

som omskrives paa følgende to Maader

$$\frac{d\,.\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = 2f(x^2+y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$-\frac{d\,.\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = 2pf(x^2+y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Multipliceres (2) og (3) henholdsvis med x og y og adderes, faaes

$$x \frac{d \cdot \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} - y \frac{d \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = 2f(x^2+y^2)(x+py)$$

eller

$$\frac{d \cdot \dfrac{px-y}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = 2f(x^2+y^2)(x+py) \quad \ldots \quad (4).$$

Nu integreres (4), saa at man faaer, i det $x^2+y^2 = r^2$

$$\frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}} = \int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1 \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Denne Ligning qvadreret og draget fra $x^2+y^2 = r^2$ giver

$$\frac{(py+x)^2}{1+p^2} = r^2 - [\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1]^2$$

eller

$$\frac{py+x}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{r^2 - [\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1]^2} \quad \ldots \quad (6).$$

Nu behøver man blat at dividere (5) med (6) for at faae et integrabelt Resultat; thi i

$$\frac{px-y}{py+x} = \frac{\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1}{\sqrt{r^2-[\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1]^2}}$$

er den venstre Side let at ændre formedelst

$$\frac{d\,.\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \dfrac{y}{x}\right)}{dx} = \frac{px-y}{r^2},$$

$$\frac{d\,.\,r^2}{dx} = 2(py+x),$$

saa at man faaer

$$\frac{px-y}{py+x} = 2r^2 \frac{d\,.\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \dfrac{y}{x}\right)}{d\,.\,r^2} = \frac{\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1}{\sqrt{r^2-[\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1]^2}}.$$

Heraf erholdes endelig

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{(\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1)^2 d\,.\,r^2}{r^2\sqrt{r^2 - (\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1)^2}} + C_2$$

stemmende med *Malmstens* Resultat.

2. Differentialligningen (5) har ført mig til en Egenskab ved Omdrejningsflader, som jeg tillader mig ved denne Lejlighed at fremhæve.

Som bekjendt bestemmes nemlig Retningslinierne for konstant Fald λ paa en Flade, given i retvinklede Koordinater, ved Hjælp af deres Projektioner paa xy planen ved Differentialligningen

$$\frac{p + q\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \text{tg}\,\lambda,$$

i det x, y, z ere Koordinaterne, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ udrykte ved x og y formedelst Fladens Ligning i x, y, z, og $\alpha = \frac{dy}{dx}$.

Er Fladen en Omdrejningsflade, har man

$$z = \varphi(x^2 + y^2), \quad p = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad q = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

og dermed

$$\frac{x + y\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{\text{tg}\,\lambda}{2\varphi'(x^2 + y^2)}.$$

Søges hertil de orthogonale Trajektorier, i det man sætter

$$\alpha p + 1 = 0, \qquad \alpha = -\frac{1}{p},$$

hvor da $p = \frac{dy}{dx}$ betyder Differentialkoefficienten af Trajektoriens Ordinat med Hensyn til Abscissen, saa faaes med r^2 for $x^2 + y^2$,

$$\frac{px - y}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\text{tg}\,\lambda}{2\varphi'(r^2)}.$$

Sammenlignes denne Ligning med (5), faaes til Bestemmelse af $f(r^2)$

$$\int f(r^2)d\,.\,r^2 + C_1 = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{2\varphi'(r^2)}$$

altsaa

$$f(r^2) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\lambda\,\frac{\varphi''(r^2)}{\varphi'^2(r^2)}.$$

Herved udledes af den forelagte Differentialligning, idet Krumningsradius betegnes ved ϱ,

$$\varrho = \cot\lambda\,\frac{\varphi'^2(r^2)}{\varphi''(r^2)},$$

i det Fortegnet udelades som overflødigt, hvor der ikke er Tale om nogen bestemt Retning. Herved er da bevist, at

Retningslinierne for konstant Fald (λ) *paa enhver Omdrejningsflade* $z = \varphi(x^2+y^2)$ *med Hensyn til en Plan vinkelret paa Axen have orthogonale Trajektorier til deres Projektioner paa denne Plan, hvis Krumningsradier* ϱ *ere Funktioner af Punkternes Afstande* r *fra Axen paa følgende Maade*

$$\varrho = \cot\lambda\,\frac{\varphi'^2(r^2)}{\varphi''(r^2)}.$$

$\lambda = 0$ giver $\varrho = \infty$, som er rigtigt, da de orthogonale Trajektorier til koncentriske Cirkler ere rette Linier igjennem deres Centrum.

Omdrejningskeglen har $z = ar$, $\varphi(r^2) = a\sqrt{r^2}$, $\varphi'(r^2) = a$, $\varphi''(r^2) = 0$, altsaa atter $\varrho = \infty$.

Frederiksberg ved Kjøbenhavn d. 19 Decbr 1869.

ADOLPH STEEN.

Integration af differentialeqvationen

$$f(x^2+y^2) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Af G. MITTAG LEFFLER.

Ifrågavarande differentialeqvation låter lätt integrera sig, om man ger geometrisk betydelse åt alla de ingående qvantiteterna.

Om x och y äro de rätvinkliga koordinaterna till en punkt belägen på en viss kroklinie, så är $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\alpha}{ds}$ = krökningen i denna punkt, om α är den vinkel, som perpendikeln mot tangenten bildar med positiva rigtningen af x-axeln och ds är differentialen af bågelementet. Vidare är $x^2+y^2=r^2$, om r är radius vector.

Vår differentialeqvation kan således skrifvas:

$$f(r^2) = \frac{d\alpha}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Låt $ABCF$ (fig. 11) vara den kroklinie, hvars differentialeqvation är (1). BD är tangenten i punkten B, $BCGE$ det rätlinigt förlängda bågelementet BC, $OD=p$ och OE äro perpendiklar nedfällda från O mot tangenterna BD och BE. Vidare är $OB=r$ och om OA är den positiva rigtningen af x-axeln, så är vinkeln $AOD=\alpha$. Vinkeln AOB, som radius vector bildar med x-axeln kalla vi φ.

Om E och D förenas med en rät linie, så är vinkeln EDO = vinkeln EBO, men i limes är $\operatorname{tg}(EDO) = \frac{EG}{GD} = \frac{p\,d\alpha}{dp}$ och $\operatorname{tg} EBO = \operatorname{Sin} EBO \,.\, \operatorname{Sek} EBO = \frac{p}{r} \cdot \frac{ds}{dr}$, och således är

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dp}{r\,dr} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Likheten (1) transformeras härigenom till

$$dp = f(r^2) r\,dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

eller, då $d(r^2) = 2r\,dr$, till

$$p = \tfrac{1}{2}\int f(r^2)d(r^2) = F(r^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Men nu är $\operatorname{tg} DBO = \dfrac{p}{\sqrt{r^2 - p^2}}$ samt till sitt numeriska värde $= \dfrac{r\,d\varphi}{dr}$ och således är:

$$d\varphi = \pm \frac{p\,dr}{r\sqrt{r^2 - p^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eller om man inför värdet på p samt integrerar:

$$\varphi = \pm \frac{1}{2}\int \frac{F(r^2)d(r^2)}{r^2\sqrt{r^2 - \overline{F(r^2)}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

De två arbiträra konstanterna finnas i de tecknade integrationerna (4) och (6).

Denna integrationsmetod är endast en geometrisk tolkning utaf den i häftet 2, Årg. II af denna tidskrift af Statsrådet Malmsten framstälda. Variabeln $u = r(r'^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}$, som der införes är nämnligen ingenting annat än perpendikeln från origo mot tangenten, hvilken vi i det föregående hafva betecknat med p.

Den generellare eqvationen

$$\frac{y''}{(a + 2by' + cy'^2)^{\frac{3}{2}}} = f(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + g) \text{ * } . \quad . \quad . \quad (7)$$

låter, som man lätt kan finna, genom substitutionerna:

$$\left.\begin{aligned} u &= bx + cy + f \\ v &= \sqrt{ac - b^2}\,.\,x + \frac{ec - bf}{\sqrt{ac - b^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

reducera sig till formen

$$\frac{u''}{(1 + u'^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi(u^2 + v^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

och är sålunda äfven integrabel.

* Se Vetenskaps-Akademiens Handlingar för år 1859 och afhandlingen «Om Differentialeqvationers Integrering« af C. J. Malmsten.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. DILLNER.

(Forts. fr. sid. 159, Årg. II).

Tillämpning af förut afhandlade enkla räkneformer.

A) Betydelsen af åtskilliga enkla räkneuttryck.

112. Vi införa följande beteckningar.

Om vi med OA beteckna en från punkten O till punkten A rigtad rät linie, så betyder $\overline{OA}$ liniens längd eller modyl och $\widehat{OA}$ den båge eller argument, som liniens rigtning bildar med grundrigtningen; eller kortare uttryckt:

$$\overline{OA} = \mathbf{M}^{*}(OA) \quad \text{och} \quad \widehat{OA} = \mathbf{A}(OA).$$

113. Om OA och OB beteckna sidor i en triangel OAB, så utmärker $OA+OB$ diagonalen från O i den på OA och OB konstruerade parallelogramen eller, som är det samma, 2 gånger den från O dragna midtellinien i triangeln OAB; skilnaden $OA-OB$ åter utmärker den andre diagonalen, dragen från B eller, som är det samma, sidan BA i triangeln OAB.

Anm. Det aritmetiska mediet $\frac{1}{2}(OA+OB)$ utgör således midtellinie mellan sidorna OA och OB i triangeln OAB; det aritmetiska mediet $\frac{1}{2}(OA+OB_\pi)$ åter utgör halfva basen BA i samma triangel.

114. Afsättes från ändpunkten af OA linierna AB och $AB' = AB_\pi$, så utmärker summan $OA+AB$ och skilnaden $OA-AB$ resp. de omfattande sidorna OB och OB' till OA som midtellinie i triangeln OBB'.

* Vi teckna nu och fortfarande M för mod och A för arg.

115. Vi antaga likheten

$$\frac{OA}{OB} = q_v.$$

Med stöd af § 80 är $\overline{OA} : \overline{OB} = q$ och $\widehat{OA} - \widehat{OB} = v$, då följaktligen triangeln OAB är till *formen* fullt bestämd, så snart q_v är känd, samt till både *form* och *storlek* bestämd, så snart OA och OB äro hvar för sig kända.

Triangeln OAB får derför sitt räkneuttryck i qvoten

$$\frac{OA}{OB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27),$$

så att i stället för att säga triangeln OAB säga vi triangeln OA *genom* OB. Linien OB kallas *grundlinie*, linien OA *ben* och den tredje linien BA betraktas som bas.

116. Likheten

$$\frac{OA}{OB} = \frac{O'A'}{O'B'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

såsom sönderfallande i likheterna $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{O'A'} : \overline{O'B'}$ $\widehat{OA} - \widehat{OB} = \widehat{O'A'} - \widehat{O'B'}$, innebär alltså (Eukl. VI: 6), *att triangeln OAB är likformig med triangeln $O'A'B'$.*

Anm. 1. Betydelsen af "sammansätta", "fördela", "alternera" etc. "termerna" i "analogien" (28) framgår omedelbart ur det föreg. utan vidare förklaring.

Anm. 2. Om tre af de fyra komplexerna i (28) äro gifna, så konstrueras den fjerde omedelbart genom begagnande af likheterna $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{O'A'} : \overline{O'B'}$ och $\widehat{OA} - \widehat{OB} = \widehat{O'A'} - \widehat{O'B'}$.

117. Af likheten

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

framgår omedelbart, enär $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OC}$ och $\widehat{OA} - \widehat{OB} = \widehat{OB} - \widehat{OC}$, *att OB är till storleken medelproportional mellan längderna $\overline{OA}$ och $\overline{OC}$ och till rigtningen bisssektrice* *till vinkeln* mellan dessa liniers rigtningar.* Vi kalla derför *OB bissekerande medelproportional* till *OA* och *OC* eller med en enklare benämning "*geometriska mediet*" mellan *OA* och *OC*.

Anm. Att konstruera ett geometriskt medium mellan två komplexer sammanfaller derför med att på bissektricen till deras vinkel afsätta en medelproportional mellan deras längder.

118. Om den i (27) uttryckta triangeln $\frac{OA}{OB} = q_v$ jemnföres med triangeln $\frac{O'A'}{O'B'} = q_{-v}$, så framstå de såsom *likformiga och omvändt stälda* (d. v. s. genom att svänga den enes plan 180° bli de likformiga och "lika stälda"). Sådana trianglar sägas vara hvarandras *konjugattrianglar.*

119. Om triangeln $\frac{OA}{OB} = q_v + q'_{v'}$, så utmärker denna likhet, att triangeln $\frac{OA}{OB}$ är likformig med triangeln $\frac{q_v + q'_{v'}}{1}$, d. v. s. den triangel, hvars grundlinie är $= 1$ och hvars ben är $= q_v + q'_{v'}$. Enligt denna sats kunna vi således konstruera en triangel, som är likformig med summan af två eller flere gifna trianglar genom att uttrycka hvar och en af dessa under formen q_v (jfr § 115).

120. Om triangeln $\frac{OA}{OB} = q_v . q'_{v'}$, så utmärker denna likhet, att triangeln $\frac{OA}{OB}$ är likformig med triangeln $\frac{q_v . q'_{v'}}{1}$, d. v. s. den triangel, hvars grundlinie är $= 1$ och hvars ben är $=$ produkten $q_v . q'_{v'}$. Enligt denna sats kan man således konstruera en triangel, som är likformig med produkten af två eller flere gifna trianglar genom att uttrycka

* Då vi tala om vinkel mellan tvänne i en qvot ingående komplexer, så förstå vi alltid den vinkel, som «täljarens« rigtning bildar med «nämnarens« rigtning som grundrigtning.

hvar och en af dem under formen q_v. Eller ock ega vi att förfara på följande sätt. Om vi hafva att konstruera en triangel, som är likformig med produkten af två gifna trianglar $\frac{OA}{OM} \cdot \frac{PQ}{PR}$, så konstruera vi OX i analogien $\frac{PQ}{PR} = \frac{OM}{OX}$, då $\frac{OA}{OX}$ blir den sökta triangeln. På enahanda sätt förfares, om produkten innehåller flere än två trianglar.

121. Af (29) följer omedelbart, att $\frac{OA}{OC} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$, då följaktligen qvadraten på triangeln $\frac{OA}{OB}$ är likformig med triangeln $\frac{OA}{OC}$. Häraf framgår således sättet att konstruera en triangel, som är likformig med en gifven triangels qvadrat (äfvensom qvadratrot). På enahånda sätt kunna vi leda oss till konstruktionen af en triangel, som är likformig med en gifven triangels kub, biqvadrat o. s. v.

122. Om vi hafva likheten

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}\right) = \frac{1}{OB} \quad \ldots\ldots \quad (30),$$

d. v. s. OB = "*det harmoniska mediet*" mellan OA och OC, så visar sig enligt § 116, enär (30) kan sättas under formen

$$\frac{\frac{1}{2}(OA + OC)}{OA} = \frac{OC}{OB},$$

att midtellinien mellan OA och OC bildar med OA en triangel, som är likformig med den af OC och OB bildade. De fyra "*harmoniska punkterna*" O, A, B och C ligga alltså på en cirkelperiferi, och att konstruera ett harmoniskt medium mellan två komplexer OA och OC sammanfaller derför med att omkring triangeln OAC omskrifva en cirkel och sedan in uti triangeln draga OB till periferien, så att OC bildar lika vinkel med OB som midtellinien från O bildar med OA.

B) Satser, härledda ur geometriska identiteter.

123. Om i identiteten

$$(a_\alpha)^2-(b_\beta)^2=(a_\alpha+b_\beta)(a_\alpha-b_\beta),$$

efter utbrytning af 1_α ur hvardera faktorn till höger, modylerna tagas å ömse sidor, så erhålles

$$a^4+b^4-2a^2b^2 \operatorname{Cos} 2(\beta-\alpha)=\{\mathbf{M}(a+b_{\beta-\alpha}).\mathbf{M}(a-b_{\beta-\alpha})\}^2 \quad . . (31),$$

hvilken sats utsäges: *om i triangeln OBB' midtellinien $OA=a$ bildar med halfva basen $AB=b$ vinkeln $\beta-\alpha$, så är summan af dessa liniers biqvadrater — dubbla produkten af deras qvadrater $\times$ Cos för deras dubbla vinkel = qvadraten på produkten af de omfattande sidorna OB och OB'* (jfr § 114).

Genom att konstruera en medelproportional till OB och OB' finna vi således *en linie, hvars biqvadrat är = det anförda trinomet.*

Specifikationer.

1:o $\beta-\alpha=0$ $\therefore$ $a^2-b^2=\overline{OB}.\overline{OB'}$, jfr Eukl. II: 5.

2:o $\beta-\alpha=\frac{1}{2}\pi$ $\therefore$ $a^2+b^2=\overline{OB}.\overline{OB'}$, jfr Eukl. I: 47.

3:o $\beta-\alpha=\frac{1}{4}\pi$ $\therefore$ $a^4+b^4=\{\overline{OB}.\overline{OB'}\}^2=\overline{OC}^4$, då nämnligen OC är medelproportional till OB och OB'.

Har man således att konstruera en linie, hvars biqvadrat är = summan af två gifna liniers biqvadrater, så behöfver man blott sätta de gifna linierna under 45°, då medelproportionalen till OB och OB' blir den sökta linien. Satsen utsträckes med lätthet till det fall, då man har att konstruera en linie, hvars biqvadrat är = summan af tre eller flere liniers biqvadrater.

Anm. Satser sådane som denne böra icke sakna nyttig användning inom geometrien. Så t. ex. om på OA, AB och OC konstrueras likformiga plana figurer, betecknade med resp. $[OA]$, $[AB]$ och $[OC]$, så är $a^2[OA]+b^2[AB]=c^2[OC]$, då nämnligen a, b och c äro de tre liniernas talvärden; likaså om vi på de tre linierna konstruera likformiga solida figurer, betecknade med resp. $[[OA]]$, $[[AB]]$ och $[[OC]]$, så är $a[[OA]] + b[[AB]] = c[[OC]]$.

4:o $\beta-\alpha = \frac{1}{6}\pi \therefore a^4+b^4-a^2b^2 = \{\overline{OB}\,.\,\overline{OB'}\}^2 = \overline{OC}^4$, då nämnligen OC är medelproportional till OB och OB'.

Genom att låta a och b stå i hop under 30^0 och konstruera en medelproportional till OB och OB' finner man således en linie, hvars biqvadrat är $=$ summan af två gifna liniers biqvadrater $-$ produkten af deras qvadrater.

5:o $\beta-\alpha = \frac{1}{3}\pi \therefore a^4+b^4+a^2b^2 = \{\overline{OB}\,.\,\overline{OB'}\}^2 = \overline{OC}^4$, då nämnligen OC är medelproportional till OB och OB'.

Om således a och b stå i hop under 60^0, erhålles i medelproportionalen till OB och OB' en linie, hvars biqvadrat är $=$ summan af två gifna liniers biqvadrater $+$ produkten af deras qvadrater.

124. Om i identiteten

$$(a_\alpha)^3-(b_\beta)^3 = (a_\alpha-b_\beta)[a_\alpha+b_\beta+(a_\alpha\,.\,b_\beta)^{\frac{1}{2}}][a_\alpha+b_\beta-(a_\alpha\,.\,b_\beta)^{\frac{1}{2}}],$$

efter utbrytning af 1_α ur hvardera faktorn till höger, modylerna tagas å ömse sidor, så erhålles

$$a^6+b^6-2a^3b^3 \operatorname{Cos} 3(\beta-\alpha)$$

$$=\{\mathbf{M}(a-b_{\beta-\alpha}).\mathbf{M}[a+b_{\beta-\alpha}+(ab)^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}].\mathbf{M}[a+b_{\beta-\alpha}-(ab)^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}]\}^2 \quad (32),$$

hvilken sats utsäges: *om i triangeln OBB'* (fig. 5) *midtellinien $OA = a$ bildar med halfva basen $AB = b$ vinkeln $\beta-\alpha$, så är summan af dessa liniers sjette digniteter $-$ dubbla produkten af deras kuber $\times$ Cos för deras vinkels trefald $=$ qvadraten på produkten af de tre linierna OB', OC och OC', då nämnligen OC och OC' äro omfattande sidor i triangeln OCC', der OB är midtellinie och BC eller halfva basen är bissekerande medelproportional till OA och AB.*

I enlighet med föreg. § kunna vi för $\beta-\alpha = 0$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{9}\pi$, $\frac{2}{9}\pi$ utföra särskilda specifikationer, hvilka dock äro af jemnförelsevis mindre intresse, enär vi sakna en elementär metod för konstruktionen af det geometriska mediet mellan tre gifna linier OB', OC och OC'.

125. Om i identiteten

$$(a_\alpha)^4-(b_\beta)^4 = (a_\alpha+b_\beta)(a_\alpha-b_\beta)(a_\alpha+b_{\beta+\frac{1}{2}\pi})(a_\alpha-b_{\beta+\frac{1}{2}\pi}),$$

efter utbrytning af 1_α ur hvarje faktor till höger, modylerna tagas å ömse sidor, så fås

$$a^8+b^8-2a^4b^4 \operatorname{Cos} 4(\beta-\alpha)$$
$$= \{\mathbf{M}(a+b_{\beta-\alpha}).\mathbf{M}(a-b_{\beta-\alpha}).\mathbf{M}(a+b_{\beta-\alpha+\frac{1}{2}\pi}).\mathbf{M}(a-b_{\beta-\alpha+\frac{1}{2}\pi})\}^2 \quad (33),$$

hvilken sats utsäges: *om i triangeln* OBB' (fig. 6) *midtellinien* $OA = a$ *bildar med halfva basen* $AB = b$ *vinkeln* $\beta-\alpha$, *så är summan af dessa liniers åttonde digniteter — dubbla produkten af deras biqvadrater* × *Cos för deras vinkels fyrfald = qvadraten på produkten af de fyra linierna* OB, OB', OC *och* OC', *då nämnligen* OC *och* OC' *äro omfattande sidor i triangeln* OCC', *der* OA *är midtellinie och halfva basen* AC *är* $= b$ *och bildar* $\wedge$ *90° med* AB.

Genom att konstuera medelproportionaler, en mellan OB och OB', en mellan OC och OC' samt vidare en mellan dessa tvänne, erhålla vi således *en linie, hvars åttonde dignitet är = det anförda trinomet.*

Specifikationer.

1:o $\beta-\alpha=0$, då $a^4-b^4 = \overline{OB}.\overline{OB'}.\overline{OC}.\overline{OC'}$, hvilken sats är en kombination af 1:o och 2:o i § 123.

2:o $\beta-\alpha = \frac{1}{4}\pi$, då $a^4+b^4 = \overline{OB}.\overline{OB'}.\overline{OC}.\overline{OC'}$, hvilken sats sammanfaller med § 123, 3:o.

3:o $\beta-\alpha = \frac{1}{8}\pi$, då $a^8+b^8 = \{\overline{OB}.\overline{OB'}.\overline{OC}.\overline{OC'}\}^2$ eller = åttonde digniteten af medelproportionalen till de två medelproportionalerna mellan OB och OB' samt mellan OC och OC'.

Genom att låta a och b stå i hop under $22\frac{1}{2}°$ och konstruera en medelproportional till de två medelproportionalerna mellan OB och OB' samt OC och OC' finner man således en linie, hvars åttonde dignitet är = summan af två gifna liniers åttonde digniteter.

Satsen utsträckes med lätthet till det fall, då man har att konstruera en linie, hvars åttonde dignitet är = summan af tre eller flere gifna liniers åttonde digniteter.

Vi förbigå de mot § 123, 4:o och 5:o svarande specifikationer såsom egande en med dessa öfverensstämmande form.

På enahanda sätt förfares vid uppdelning af $(a_\alpha)^8-(b_\beta)^8$ i faktorer, då man bland annat lär sig att konstruera en linie, hvars 16:de dignitet är = två gifna liniers 16:de digniteter, o. s. v.

126. Om vi utgå från identiteten

$$\left(\frac{1}{a_\alpha}-\frac{1}{b_\beta}\right)+\left(\frac{1}{b_\beta}-\frac{1}{c_\gamma}\right)+\left(\frac{1}{c_\gamma}-\frac{1}{a_\alpha}\right)=0,$$

eller, som är detsamma, då OA, OB och OC införas för resp. a_α, b_β och c_γ (jfr § 113):

$$c_\gamma\,.\,AB+a_\alpha\,.\,BC=b_\beta\,.\,AC\,*.$$

Genom att taga modylerna å ömse sidor fås

$$(c.\overline{AB})^2+(a.\overline{BC})^2+2c.\overline{AB}.a.\overline{BC}\operatorname{Cos}(\gamma-\alpha+\widehat{AB}-\widehat{BC})=\{b.\overline{AC}\}^2 \quad (34),$$

då följaktligen, om O, A, B, C äro i ordning en fyrsidings hörnpunkter, så är det modyltrinom, som bildas af de motstående sidornas produkter, = qvadraten på produkten af de två diagonalerna.

Specifikationer.

1:o Om de fyra punkterna ligga på en cirkelperiferi (fig. 7), så är $(\gamma-\alpha)+(\widehat{AB}-\widehat{BC})=0$, då således

$$c\,.\,\overline{AB}+a\,.\,\overline{BC}=b\,.\,\overline{AC},$$

* Denna sats är behandlad af Bellavitis; jfr J. Hoüels Calcul des équipollences i Nouvelles Annales de Mathématiques, 1869.

d. v. s. *de två rektanglarne, som bildas af de motstående sidorna, äro till hopa = rektangeln af diagonalerna*, — en känd sats.

2:o Om de fyra punkterna ligga så, att en cirkel omskrifven om OAB (fig. 8) ger med BC en sådan skärningspunkt C', att $\wedge\, COC' = 90^{\circ}$, så är

$$\{c\,.\,\overline{AB}\}^2 + \{a\,.\,\overline{BC}\}^2 = \{b\,.\,\overline{AC}\}^2,$$

d. v. s. *summan af qvadraterne på de motstående sidornas produkter är = qvadraten på diagonalernas produkt.*

3:o Om i fig. 8 $\wedge\, COC'$ är $= 60^{\circ}$, så erhålles

$$\{c\,.\,\overline{AB}\}^2 + \{a\,.\,\overline{BC}\}^2 + c\,.\,\overline{AB}\,.\,a\,.\,\overline{BC} = \{b\,.\,\overline{AC}\}^2,$$

d. v. s. *summan af qvadraterna på de motstående sidornas produkter + produkten af alla fyra sidorna är = qvadraten på diagonalernas produkt.*

4:o Om i fig. 8 $\wedge\, COC'$ är $= 120^{\circ}$, så erhålles

$$\{c\,.\,\overline{AB}\}^2 + \{a\,.\,\overline{BC}\}^2 - c\,.\,\overline{AB}\,.\,a\,.\,\overline{BC} = \{b\,.\,\overline{AC}\}^2,$$

d. v. s. *summan af qvadraterna på de motstående sidornas produkter — produkten af alla fyra sidorna är = qvadraten på diagonalernas produkt.*

127. Om vi utgå från identiteten

$$\left(\frac{1}{a_\alpha} - \frac{1}{b_\beta}\right) + \left(\frac{1}{b_\beta} - \frac{1}{c_\gamma}\right) + \left(\frac{1}{c_\gamma} - \frac{1}{d_\delta}\right) + \left(\frac{1}{d_\delta} - \frac{1}{a_\alpha}\right) = 0,$$

så fås efter liknämniggöring och införande af OA, OB, OC och OD för resp. a_α, b_β, c_γ och d_δ följande identitet:

$$c_\gamma\,.\,d_\delta\,.\,AB + a_\alpha\,.\,d_\delta\,.\,BC + a_\alpha\,.\,b_\beta\,.\,CD = b_\beta\,.\,c_\gamma\,.\,AD\,.$$

Genom att enligt § 40 taga modylerna å ömse sidor erhålles för det speciela fall, att de fem punkterna O, A, B, C, D ligga på en cirkelperiferi:

$$c\,.\,d\,.\,\overline{AB} + a\,.\,d\,.\,\overline{BC} + a\,.\,b\,.\,\overline{CD} = b\,.\,c\,.\,\overline{AD},$$

hvilken sats utsäges: *om O, A, B, C, D* (fig. 9) *äro i ordning de fem hörnpunkterna af en i en cirkel inskrifven* *femhörning och vi taga i betraktande de från O till A, B, C, D utgående fyra linierna, så är summan af de tre stycken trelediga produkter, som bildas genom att taga två af dessa fyra jemnte en sida i femhörningen, som förenar de öfriga två, = produkten af de två medlersta och de ytterstas föreningslinie.*

Anm. Vi förbigå öfriga specifikationer af denna identitet såsom på detta ställe ledande till nog stor vidlyftighet. — De i föreg. §§ 123—127 gjorda utvecklingar lemna en antydan om den outtömliga rikedom på geometriska satser, hvilka kunna härledas ur identiteter, vare sig dessa äro identiteter utan alla inskränkningar (såsom de ofvan afhandlade) eller med vissa sådana. Dessa satser, som inom den geometriska kalkylen ha så ytterst enkla förutsättningar och viga härledningar, skulle i allmänhet taget erbjuda oöfvervinneliga svårigheter att på annan väg utveckla. Den tillökning i satser, som den elementära geometrien på detta sätt ernår, bör bli af nyttig användning vid lösning af flere geometriska frågor.

C) Lösning af geometriska likheter.

128. Vid lösning af likketer beteckna vi för vighetens skull komplexer med enkla bokstäfver såsom a, b, x, y o. s. v., hvarvid i enlighet med § 112 de resp. modylerna utmärkas med $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$ och argumenten med $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{x}$, $\widehat{y}$.

Såsom belysande exempel framställa vi till lösning följande problem.

129. *Midtellinien a och bissekerande medelproportionalen b till de omfattande sidorna x och y i en triangel äro gifna; bestäm dessa till storlek och rigtning.*

I enlighet med §§ 113 och 117 fås uppställningen:

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = a \quad \text{och} \quad (xy)^{\frac{1}{2}} = b\,,$$

hvaraf framgå följande värden på x och y:

$$x = a + \{(a+b)(a-b)\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{och} \quad y = a - \{(a+b)(a-b)\}^{\frac{1}{2}},$$

hvilka lätteligen konstrueras sålunda. Med $a = OA$ (fig. 10) som midtellinie och $b = AB$ som half bas uppritas $\triangle OBB'$; från A afsättes bissekerande medelproportionalen AX till de omfattande sidorna OB och OB', hvarpå med a som midtellinie och AX som half bas konstrueras $\triangle OXY$, då OX och OY bli de sökta värdena på resp. x och y.

Följdsatser.

1:o. *Om två trianglar ha gemensam midtellinie och den enes halfva bas är bissekerande medelproportional till den andres omfattande sidor, så är ock dennes halfva bas bissekerande medelproportional till den förstes omfattande sidor.*

2:o. *Emedan x och y äro rötter till eqvationen $u^2-2au+b^2=0$, så kunna vi enligt fig. 10 konstruera rotpunkterna X och Y till hvarje hyfsad qvadratisk eqvation.*

130. *En triangel $\frac{a}{b}$ är gifven; bestäm till formen den triangel $\frac{x}{y}$, hvars midtellinie och bissekerande medelproportional bilda en triangel, som är likformig med den gifna.*

Af uppställningen

$$\frac{\frac{1}{2}(x+y)}{(xy)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b},$$

följa svaren

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a \pm [(a+b)(a-b)]^{\frac{1}{2}}}{b},$$

hvilka enligt föreg. § fig. 10 representera hvar sin af trianglarne $\frac{OX}{OC}$ och $\frac{OY}{OC}$, då nämnligen $OC \# AB$. Qvadraten på hvardera af dessa trianglar (jfr § 121) är triangeln $\frac{OX}{OY}$ eller ock $\frac{OY}{OX}$, hvilken då blir den sökta triangeln $\frac{x}{y}$.

131. *En triangel* $\frac{a}{b}$ *är gifven; bestäm till formen den triangel* $\frac{x+y}{x-y}$, *hvars bissekerande medelproportional bildar med bissekerande medelproportionalen till midtellinien* x *och halfva basen* y *en triangel, som är likformig med den gifna.*

Af uppställningen

$$\frac{\{(x+y)(x-y)\}^{\frac{1}{2}}}{(xy)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$$

fås svaren

$$\frac{x}{y} = \frac{a \pm [(a+2c_{\frac{1}{2}\pi})(a-2c_{\frac{1}{2}\pi})]^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

då $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{c}$, d. v. s. c = tredje proportionalen till a och b. Med $a = OA$ (fig. 10) som midtellinie och $2c_{\frac{1}{2}\pi} = AB$ som half bas konstrueras $\triangle\, OBB'$; med a som midtellinie och bissekerande medelproportionalen AX till OB och OB' som half bas konstrueras vidare $\triangle\, OXY$; trianglarne $\frac{OX}{OD}$ och $\frac{OY}{OD}$ representera då de funna svaren, då nämnligen $OD = 2c$; och $\frac{OX+OD}{OX-OD}$ eller $\frac{OY+OD}{OY-OD}$ blir den sökta triangeln.

132. *Midtellinien* a *och det harmoniska mediet* b *till de omfattande sidorna* x *och* y *i en triangel äro gifna; bestäm dessa till storlek och rigtning.*

Af uppställningen

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = a \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{b}$$

framgå svaren

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a \pm [a(a-b)]^{\frac{1}{2}},$$

hvilka konstrueras sålunda. Vi låta a och b utmärkas med resp. OA och OB*. Med OA som midtellinie och bissekerande proportionalen AX till OA och $OA-OB$ eller BA som half bas tecknas $\triangle\, OXY$, då OX och OY bli de sökta x och y. — De fyra harmoniska punkterna O, X, B, Y ligga nu på en cirkelperiferi, och bissekerande medelproportionalen till OA och OB är äfven bissekerande medelproportional till OX och OY.

133. *Tre räta linier a, b och c äro till storlek och rigtning gifna; det begäres att med a och b som midtellinier konstruera två trianglar, som hafva parallela och lika stora baser och som dertill äro så beskaffade, att de bissekerande medelproportionalerna till deras omfattande sidor bilda en väg, som utgör sidor i en tredje triangel med c som bas.*

Om halfva basen i de två trianglarna utmärkes med x, så blir uppställningen följande:

$$\{(a+x)(a-x)\}^{\frac{1}{2}} + \{(b+x)(b-x)\}^{\frac{1}{2}} = c,$$

hvaraf fås lösningen

$$2cx = \{(\overline{a+b}+c)(\overline{a+b}-c)(c+\overline{a-b})(c-\overline{a-b})\}^{\frac{1}{2}},$$

då x således blir fjerde proportionalen till $2c$ och de två bissekerande medelproportionalerna till de två första och de två sista faktorerna under rotmärket.

Anm. Vid lösning af eqvationer, der den obekante förekommer under rotmärke, eger man lika litet att i förväg göra inskränkande bestämmelser i den sökta komplexens argument som i hennes modyl. Om man derför vid uppställning af en dylik eqvation skulle inskränka en radikals argument till ett enda fixt värde, så skulle man riskera att få svar, som icke satisfierade eqvationen: *argumentet lika väl som modylen må derför obetingadt få sitt eller sina värden genom uträkningen ensam.* Denna enkla anmärk-

* Fig. behagade läsaren sjelf teckna.

ning är tillräcklig att häfva de svårigheter, som bruka framträda vid lösning af roteqvationer.

134. De i föreg. §§ gifna exempel lemna en kort antydan om eqvationslärans betydelse inom den geometriska kalkylen. En problemsamling inom detta område blir till betydelsen sammanfallande med en samling af konstruktions uppgifter, hvilka med afseende på sin egendomliga karakter och svåråtkomlighet på annan väg böra erbjuda ett mer än vanligt intresse. (Forts.)

Prisuppgift för 1870.

En samling väl valda konstruktionsuppgifter såsom tillämpning på enkla och qvadratiska komplexeqvationer samt på sådana, hvilka kunna till qvadratisk form reduceras.

(Jfr föreg. §§ 128—133 samt Bellavitis' Calcul des équipollences i tidskriften Nouvelles Annales de Mathématiques, 1869).

Priset är: Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral par I. Bertrand.
Calcul Intégral (eller senare delen).

Lösningarna böra vara inlemnade till adjunkt Dillner före den 1 Januari 1871.

AFDELNING IV.

Nogle Bemærkninger om Integration af Differentialligninger.

I dette Tidsskrifts anden Aargang Side 253 findes nogle Undersøgelser af D—g om Differentialligningers Integration ved Substitution, som give Anledning til nogle Bemærkninger, der maaske torde have nogen Interesse for Læserne af dette Tidsskrift.

Hr D—g har tilsigtet en mere rationel Fremstilling af Integrationen ved Substitution end der sædvanlig følges. Men om end den Fremgangsmaade, han fremsætter, fortjener Opmærksomhed, saa troer jeg dog, at den lider af den Mangel ikke at føre til nogenlunde almindelige Resultater, men hver gang den skal bringes till Udførelse at kræve Forsøg, der ikke altid falde heldigt ud. Dersom man nærmere betragter hans Exempler, vil man ogsaa finde, dels at de ingenlunde pege hen til almindelige Regler, dels at de paa et nær alle lettere behandles ved en anden Methode. Det ene, som jeg undtager er den sædvanlige homogene Differentialligning, for hvilken han finder Substitutionen $\frac{y}{x} = z$ ad rationel Vej. Derimod har han ikke fundet andre Substitutioner for visse andre Ligninger, som paa en rationel Maade kunne efterspores. Jeg tillader mig i den anledning at henvise Læseren til Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selsk. Forhandl. for 1864 Side 45, hvor jeg har meddelt nogle Undersøgelser derom.

Men betragter man dernæst hans Methode nærmere saa vil man finde, at det egentlig er *den Lagrangeske Variation af den arbitrære Konstant*, der er bragt i Anvendelse. Denne Methode plejer man kun at bruge ved de lineære Differentialligninger, hvortil den ogsaa først er skabt, men den fortjener visselig mere Opmærksomhed. Vist er det i alle Tilfælde, at Integrationen af den lineære Differentialligning af første Orden

$$\frac{dy}{dx} + F(x)y + F_1(x) = 0$$

kun fremviser en speciel Anvendelse af Methoden. Man ser, at

$$\frac{dy}{dx} + F(x)y = 0$$

har til primitiv Ligning

$$y = c\, e^{-\int F(x)\, dx};$$

man lader derpaa c variere og indsætter i dem givne, saa findes det bekjendte Resultat. I Almindelighed maskerer man dette ved Substitutionen $y = uv$ o. s. v. Men Hr D—gs Beregninger falde ganske sammen med det her antydede.

Hvad dernæst angaaer hans 3:o, 4:o, 6:o Exempel, saa ere de ganske af samme Beskaffenhed, idet Bernoulles Differentialligning (Ex. 3) føres tilbage til den lineære, det fjerde Exempel

$$x - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

er lineært med Hensyn til y^2, og det sjette

$$e^x + xe^x + e^y + xe^y \frac{dy}{dx} = 0$$

er lineært med Hensyn til e^y, saa at henholdsvis Substitutionen

$$y^2 = z \quad \text{og} \quad e^y = z$$

gjøre dem linæere.

Ex. 5 har for mig været det interessanteste, fordi jeg ved første Øjekast troede, at det kunde henføres under et af de af mig paa ovennævnte Sted anførte Tilfælde, enten

$$x^2 \frac{dy}{dx} = f(xy)$$

eller

$$x^2 \frac{dy}{dx} = Xf(xy) - xy,$$

og, da jeg ikke kunde gjennemføre Andringen dertil, troede mig i uventet Besiddelse af en ny almindelig Form, der ligesom de nævnte lad sig integrere ved $xy = z$. Paa en Maade er dette vel ogsaa Tilfældet; men Formen er dog for speciel til at høre herhid. Ogsaa den maa behandles ved den arbitrære Konstants Variation.

Har man næmlig

$$[xy - f(xy)] \frac{dy}{dx} + y^2 - axyf(xy) = 0,$$

saa bemærkes strax, at

$$xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

har Integralet

$$xy = c.$$

Lader man nu c variere, faaes af den forelagte, idet

$$y = \frac{c}{x}, \quad x\frac{dy}{dx} + y = \frac{dc}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x^2}.$$

først

$$\frac{c}{x}\frac{dc}{dx} = f(c)\left(\frac{1}{x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x^2}\right) + acf(c)$$

og dernæst

$$\frac{c-f(c)}{cf(c)}\frac{dc}{dx} = ax - \frac{1}{x},$$

hvis Integration giver

$$\int\frac{dc}{f(c)} - l.c = \frac{a}{2}x^2 - l.x + C$$

hvor C er den endelige arbitrære Konstant. For c maa dernæst sættes xy, saa at man efter behørig Reduktion faaer

$$\int\frac{d.xy}{f(xy)} - l.y = \frac{a}{2}x^2 + C.$$

Sætter man her $a = z$, $f(xy) = 1$, faaes Hr D—g's exempel.

Ser man endelig hen til de Exempler, Hr D—g anfører paa Virkningen af hans Methodes Gjentagelse, saa viser det sig tilfulde, at hvis man *bruger den arbitrære Konstants Variation, saa behøves der ingen Gjentagelse.*

Hans første Exempel er

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{dP}{dx} + P^2.$$

Men dette ses umiddelbart at have et partikulært Integral

$$y = P.$$

Mere almindeligt vil $y = P + c$ tilfredsstille

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{dP}{dx} + P^2 + 2cP + c^2.$$

Sættes nu det variable z for det konstante c, altsaa

$$y = P + z,$$

søges z bestemt saaledes, at den givne Ligning tilfredsstilles. Man faaer

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + 2Pz = 0.$$

som er Bernoulli's Differentialligning.

Det sidste Exempel

$$\left(by - \frac{a^3}{x}\right) - ay\frac{dy}{dx} = 0,$$

behandles ligeledes, idet man først integrerer

$$b - a\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ved} \quad bx - ay = c$$

og derpaa lader c variere. Man faaer da først

$$\frac{bx - c}{a}\,\frac{dc}{dx} = \frac{a^3}{x},$$

som omskrevet til

$$a^4\,\frac{dx}{dc} + cx = bx^2$$

ligeledes ses at være Bernoulli's Differentialligning. Dens Integration giver

$$\frac{1}{x} = e^{\frac{c^2}{2a^4x}}\left[C - \frac{b}{a^4}\int e^{-\frac{c^2}{2a^4x}}\,dc\right]$$

eller, naar $c = bx - ay$ indføres

$$\frac{1}{x} = e^{\frac{(bx-ay)^2}{2a^4x}}\left[C - \frac{b}{a^4}\int e^{-\frac{(bx-ay)}{2a^4x}}\,d.(bx - ay)\right].$$

Men skjønt Hr D—g's Methode hidtil ikke har vist sig synderlig frugtbar, tør man dog ikke kaste Vrag paa den. Differentialligningernes Integration ligger desværre endnu i et Chaos og det mindste Bidrag til Ordning fortjener Opmærksomhed.

Frederiksberg ved Kjøbenhavn d. 21 Decbr 1869.

ADOLPH STEEN.

Anmäld Skrift.

BERGIUS, A. T. *Elementarkurs i räknekonsten.* Tredje upplagan. Stockholm 1868. Norstedt & söner.

Först och främst vilja vi egna vår hyllning åt förf., derför att han varit bland de förste*, som utgifvit en räknebok uppstäld så, att eleven skall förstå räknelagarne.

Förtjensterna af förf:ns arbete bestå hufvudsaknigen deri, att han anlitat åskådningen, der den kan komma i fråga (t. ex. vid multiplikationstabellen och vid läran om bråk), att han låtit hufvudräkningen utgöra en vigtig del, att han låtit hvarje regel framkomma såsom ett resultat af eller uttryck för det förfaringssätt, som begagnats vid hufvudräkningen.

* Hans båda föregångare voro *Otterström* och *Nyström.*

Förf. börjar sin bok med addition och subtraktion af små tal (talen 1—10). Man finner här bland annat ett intressant problem, hvilket består i att upplösa tal *. Derefter följa addition och subtraktion af talen 1—100. Först derefter komma läsning och uppskrifning af större tal och deras behandling med de fyra räknesätten. Omedelbart efter läran om hela tal låter förf. läran om decimaler ** följa. Att förf. äfven i denna upplaga låter läran om decimaler föregå läran om allmänna bråk, är lärorikt nog. Det visar nämnligen, att förf. och de lärare, som begagnat förf:ns bok, med framgång kunnat följa denna ordning. Vid det nyss hållna läraremötet i Uppsala voro åsigterna i denna punkt delade.

Förf:ns bok är skrifven så, att den kan vara afslutad med läran om bråk, ty exempel under rubriken sorter och regula de tri i andra läroböcker finnas här upptagna på vederbörliga ställen såsom användning af läran om hela tal och bråk. Dock har förf. ej stadnat härmed. Han har näml. derjämte lemnat en redogörelse för raka, omvända och sammansatta förhållanden, han har på ett enkelt sätt bevisat satsen, att produkten af de yttre termerna i en analogi är lika med produkten af de inre. Han visar, huru exempel under regula de tri, rabatt-, bolags- och kedjeräkning skola behandlas så väl medelst analogier som medelst att gå till enheten.

Exemplen äro praktiska och rätt räknade. I ex. 30 sid 180 har dock förf. gjort en blunder, då han säger den specifika vigten af al vara 0,5, oaktadt det visar sig af det gifna i samma exempel att den är $= \frac{3}{7}$.

Att såsom förf. börja sin räknebok med en liten kurs för små tal anse vi förträffligt; men vi förstå icke, hvarför författaren ej utsträckt kursen äfven till multiplikation och division, såsom Siljeström gjort i sin lärobok. — Läran om division sid. 43 börjar förf. med en förberedelse. I hvad sammanhang denna står med läran om division sid. 46 ha vi ej kunnat fatta.

Förf. har ej varit trogen sin grundsats — att ej gifva regel för något räknesätt, så framt ej det först blifvit fullt förstådt — då förf. underlåtit förklara sin lära om tals delbarhet och om störste gemensamme divisorn.

Vi sluta med att rekommendera förf:ns bok såsom bygd på goda pedagogiska grunder.

---

* Exempel. Att upplösa 5. Lösning. $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; således inalles 6 sätt. Detta gifver oss anledning till följande fråga:

På huru många sätt kan man man upplösa ett gifvet helt tal i hela tal?

** Förf. undviker med flit ordet decimal*bråk*, emedan den uppfattningen, att räkning med decimaler i sjelfva verket är detsamma som som räkning med hela tal, derigenom försvåras.

Tidskrift för Matematik och Fysik. Årg. 3.

Fig. 1.

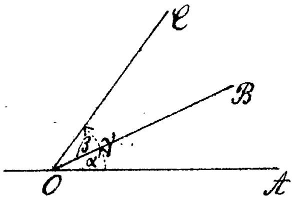


Fig. 2.

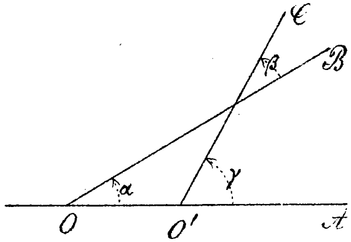


Fig. 3.

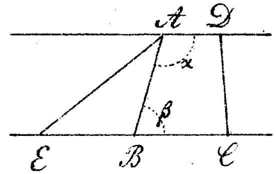


Fig. 4.

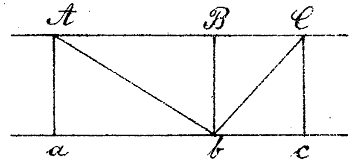


Fig. 5.

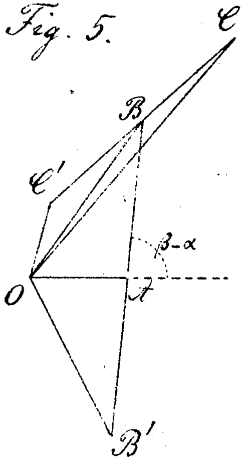


Fig. 6.

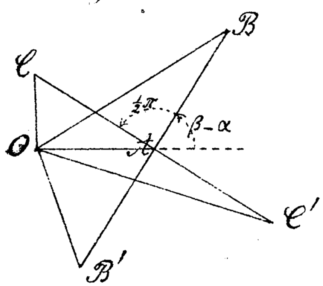


Fig. 7.

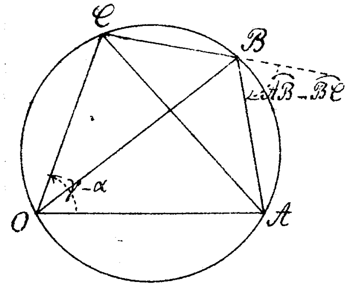


Fig. 8.

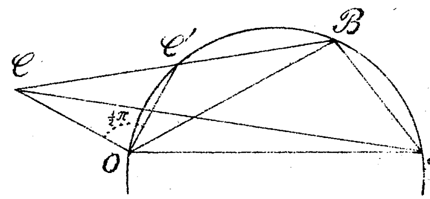


Fig. 9.

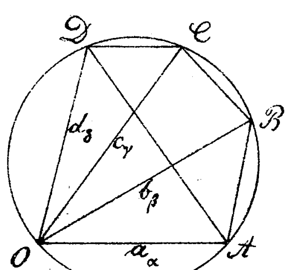


Fig. 10.

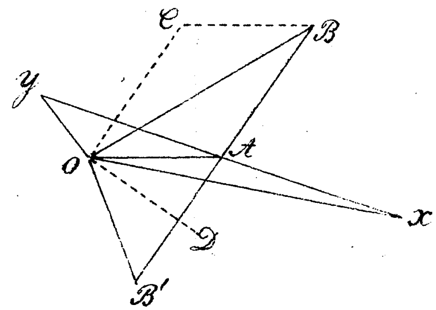
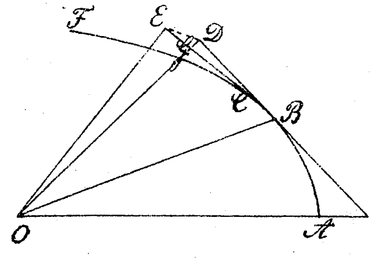


Fig. 11.



AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 11).

8. GEORG STJERNHJELM.

Georg Stjernhjelm är för svenska allmänheten väl bekant såsom svenska skaldekonstens fader. Hvad han varit på det matematiska området, är deremot mindre kändt. Detta är också icke underligt, då af hans matematiska arbeten hittills endast hans Archimedes reformatus, Holmiæ 1644, och en tabell: mensuræ regni Suethiæ, Holm. 1664, finnas utgifne. Vi komma derföre att vid redogörelsen för Stjernhjelm blifva något utförliga, för att härigenom fylla en lucka i den bild, som förut af Hammarsköld i hans Georg Stjernhjelms Vitterhetsarbeten och i Biografiskt lexikon finnes tecknad, och för att tillika lemna ett bidrag till den matematiska kulturhistorien på 1600-talet.

A. **Lefnadsteckning.**

Georg Stjernhjelm eller, såsom han under förra hälften af sin lefnad hette, Göran Lilje, föddes 1598 i Vika socken i Dalarne. Efter slutad skolgång fortsatte han sina studier i Upsala. Som yngling vistades han mycket hos Joh. Thomæ Bureus, hvilken värderade honom för hans ypperliga hufvud och för hans vetgirighet. Genom umgänget med denne lärde fornforskare insöp han kärlek för språk och svensk fornforskning. Efter slutade studier besökte han 1625 Tyskland, Holland, England, Frankrike och Italien. I England väckte han sådan uppmärksamhet, att han blef den förste svenske ledamot af den nyss instiftade vetenskapssocieteten. Under denna resa utgaf han i Greifswald år 1625 en afhandling: *de ornatu reipublicæ.* Samma år utnämndes han till lektor i etik i Westerås, men kallades strax derefter till en lika beställning vid det i Stockholm inrättade gymnasium illustre, hvilken plats han fylde till ungdomens synnerliga gagn och tillfredsställelse. Oaktadt Lilje ej var jurist, gjorde honom dock Gustaf, i förlitande på hans utmärkta snille, till assessor vid Dorpats hofrätt år 1630. Konungen misstog sig ej. Lilje satte sig så in i sin nya verksamhet, att konungen såsom en belöning för hans förtjenster för honom år 1631 utfärdade ett adelsbref, i hvilket han utbytte hans namn till Stjernhjelm och förlänade honom Stjernlunds och Wasula gods i Lifland. År 1639 blef han landtråd i Lifland, hvarvid han tillika tjenstgjorde som medlem af Dorpats öfverkonsistorium. Under denna tid synes han flitigt ha studerat matematik. Bland hans efterlemnade handskrifter finnes nämnligen en uppsats öfver *Quadratura circuli*, skrifven $1633\frac{28}{10}$, vidare en *algebra suethica*, skrifven till stor del i Westerås $1639\frac{2}{2}$ *. År $1642\frac{26}{3}$ afslutade han i Wasula sin *arithmetica mnemonica universalis.* Samma år kallades Stjernhjelm till ledamot i lagkommissionen i Stockholm angående *processen.* Af detta uppdrag var han upptagen äfven under året 1643. Hindrad dels af ledamotskapet i denna kommission, dels af oroligheterna i Lifland, vistades han större delen af denna tid i Stockholm. Hans juridiska studier afbröto dock ingalunda hans matematiska

* Att Stj. var öfver till Sverige på en längre tid, vintern 1638—9, synes dels deraf, att han i Westerås skref en algebra, dels deraf, att han år $1639\frac{5}{3}$ för rikskansleren presenterade i Örebro ett handskrifvet arbete, kalladt Adel-runa.

studier. Vissa ur *Herigons* * algebra tagna exempel äro nämnligen inskrifna i hans algebra suethica $1642\frac{12}{9}$. Vidare utgaf han år $1644\frac{4}{1}$ i Stockholm sin *Archimedes reformatus*, ett arbete, der han bestämt åtskilliga ämnens egentliga vigt, hvarigenom han lade grunden till sina så fruktbärande studier om alla länders mått, mål och vigt. Från denna tid kom han i beröring med en mängd lärde, som drottning Kristina samlade omkring sig. Samtidigt torde han ock ha sammanträffat med professorn i matematik vid Upsala universitet *Benedictus Hedræus* **. Derom vittna en bland Stjernhjelms handskrifter befintlig trigonometri af Hedræus och ett citat i Stj:s arithmometria linealis, deri han nämner, att Hedræus gjort en kopparskifva för att noga dela en linie i ett gifvet förhållande. År 1648 blef Stjernhjelm antiqvarie efter Joh. Thomæ Bureus. Samma år blef han president i Dorpts hofrätt. Under kriget i Lifland blef han plundrad på en stor del af sin förmögenhet och begaf sig derföre till Stockholm. På återresan förstördes genom skeppsbrott återstoden af hans förmögenhet, hvarvid flere af hans folk omkommo. Vid drottning Kristinas hof kom han i beröring med *Cartesius* ***

---

* *Petrus Herigon*, Cartesii förelöpare, var en framstående matematiker i Paris, hvarom man numera intet närmare känner. Stj. citerar honom ofta i sina matematiska skrifter. Han har skrifvit *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus.* 6 tomer. Paris 1644. (Poggendorff).

** *Hedræus* har utgifvit: Astrolabii geometrici structura, nec non quadrantis astronomici Lgd. B. 1643. Hedræus var sannolikt prof. i matematik till år 1650, då *Johan Bureus* emottog denna professur, hvilken han innehade till år 1664. Johan Bureus och hans bror juris professorn Nils Burenskjöld voro söner till prof. och biskopen Jakob Bureus, hvilken åter var kusin till de begge i vår historik omnämnde bröderna Olof och Anders Bure. Johan Bureus var syssling till Stjernhjelms hustru Cecilia Bure, hvilken var dotter af kyrkoherden i Gråmunkekloster i Stockholm Laurentius Engelberti samt brordotter till Olof och Anders Bure. (Anrep och Biogr. lex.).

*** *Descartes* (Cartesius), *René du Perron.* Son af ett parlamentsråd, föddes 1596 i en liten by emellan Tours och Poitiers. Han uppfostrades i katolska religionen i jesuiterkollegiet i La Flèche 1604—12.

(Okt. 1649—Mars 1650). Hans matematik vittnar dock ej om någon bekantskap med Cartesii arbeten. Stjernhjelms likhetstecken (||) efter år 1642 har han dock gemensamt med Cartesius. Stj:s matematiska insigter äro betydligt underlägsna Cartesii. Stjernhjelms beteckningssätt är helt olika med Cartesii. Stjernhjelm står på den *Vieta**—

Från 1617—22 tjenade han som frivillig i holländska, bäjerska och österrikiska krigstjensten, hvarunder han emellanåt vistats i Frankrike samt gjort flere resor till Schweiz och Italien. Han stadnade i Holland 1629 och lefde der i olika städer till 1649 i Okt., då han på drottning Kristinas kallelse kom till Stockholm för att undervisa henne i filosofi. Dessa lektioner fortgingo endast en månad kl. 5 hvarje morgon. Cartesius fann nämnligen ej hos Kristina det allvar han väntat. Han dog i Stockholm kort derefter Mars 1650. — Redan år 1618 väckte Cartesius uppseende i Breda hos Beekmann genom lösning af ett matematiskt problem. Samma år utgaf han under titeln Parnassus ett fragment öfver algebran. Hvad han skrifvit finnes i följande verk:

1. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences; plus la dioptrique, les météores et la géométrie. Leyde 1637. I detta verk förekommer den honom med orätt tillskrifna refraktionslagen, hvilken han otvifvelaktigt lånat af Willebrod Snell, men först bragt i den nu framstälda bättre formen samt först användt på regnbågens teori. Sista kapitlet innehåller den analytiska geometrien, hvars grundläggare Cartesius är.

2. Compendium musicæ. Ultraj. 1650, redan 1618 författad, men först efter hans död utgifven.

3. Lettres de R. Descartes, où sont traitées les plus belles questions touchant la morale, la physique, la médécine et les mathématiques. 3 vol. Paris 1667. (Här förekommer bref till drottning Kristina från Cartesius).

4. Renati Descartes' Opuscula posthuma, Amstel. 1701. (Poggendorff och Firmin Didot).

* *Viète* (Vieta), François. Född 1540 i Fontenay, protestant, var till 1567 advokat i sin fädernestad, derpå råd i Bretagnerparlamentet. Senare kom han med Henrik IV till Paris och blef der medlem af enskildta rådet. Han dog 1603 i Paris. Vieta är den förste, som i algebran infört symboler (species) eller bokstäfver för att uttrycka så väl obekanta som bekanta storheter. Han kallade derföre algebran för logistica speciosa (räkning med symboler). Hans uppträdande gör en epok inom analysen. Hans skrifter äro, säger Montucla, svårlästa dels för

Stevinska * ståndpunkten. Kanhända berodde bristen på anknytningspunkter mellan Stjernhjelm och Cartesius ej

---

hans med grekiska uttryck uppfylda språk, dels för hans beteckningssätt så olika den närvarande tidens. I stället för hans beteckningar hafva efterföljarne *Stevin*, *Girard* och deras skola begagnat förnuftigare. Den senare af desse citeras aldrig af Stjernhjelm, men så mycket mer den förre *Stevin*, ja vi våga påstå, att Stjernhjelms matematiska kunskaper äro frukten af ett flitigt studerande af Stevins arbeten. Vieta dref först beräkningen af talet π till 11 decimaler.

Vietas matematiska arbeten äro utgifna af v. Schooten i Lugd. Batavorum 1646. De innehålla bland annat:

1. Isagoge in artem analyticam.
2. Ad logisticam speciosam notæ.
3. De æquationum recognitione et emendatione, först utgifna af Alex. Anderson. Paris 1615.
4. De numerosa potestatum purarum atque affectarum ad exegesin resolutione tractatus.
5. Apollonius gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergæi περὶ ἐπαφῶν (om tangering) geometria. Genom detta arbete har Vieta återstält ett af de gamles arbeten, som gått förloradt.

Dessutom har Vieta sjelf utgifvit Canon mathematicus, Lutetiæ 1579. Detta är en trigonometrisk tabell, der han beräknar de båda kateterna i en rätvinklig triangel, då hypotenusan är antagen till 100000. På detta sätt får han våra sinus och kosinus. Vidare uträknar han en tabell för hypotenusan och den närliggande kateten i en rätvinklig triangel, då vinkelns motstående katet är antagen vara 100000. På detta sätt får han våra kosekanter och kotangenter. Slutligen har han en tabell, der vinkelns närliggande katet är antagen vara 100000. Denna tabell gifver våra tangenter och sekanter. (Montucla, Poggendorff, Firmin Didot).

* *Stevin*, *Simon*, ryktbar holländsk matematiker, någongång kallad Simon från Bruges, föddes 1548 i Bruges och dog 1620 i Haag. Kom tidigt att blifva bokhållare hos en af de rikaste köpmännen i Antverpen. Utbytte sedan denna befattning emot förvaltningen af finanserna i Bruges i Frankrike. Då han ej erhöll tillåtelse att i Bruges inrätta en ättikfabrik, började han fara verlden omkring. Han talar i sina arbeten om sina iakttagelser i Danmark, Norige, *Sverige* och Polen. Man har anmärkt, att han endast besökte länder, der samvetsfriheten var känd. Denna brist på renlärighet förskaffade honom talrika fiender. Ännu 1845 var det med möda, som man i Bruges ville uppresa en minnesstod åt en man, hvars renlärighet var tvifvelaktig. — Sedan 2000 år var meka-

allenast på olikheten i deras matematiska ståndpunkt utan äfven på olikheten i deras religion. Cartesius var en ifrig

---

niken stationär. Stevin är efter Arkimedes den förste, som gifvit lösning åt de problem, som hämmade framstegen. Han är far till den moderna statiken. Han har framstält alla de grundsatser, som i dag utgöra vetenskapen om fasta kroppars jemnvigt. Han har funnit teorien för lutande planet. Han har upptäckt kraftparallelogrammen och i tydliga ordalag uttryckt denna grund för mekaniken, hvilken sedermera blef ansedd såsom en upptäckt af Varignon. Han har af hydrostatiken gjort en vetenskap alldeles skild och oberoende af statiken. Han har först till de af Arkimedes gjorda upptäckterna lagt och bevisat såsom en hufvudegenskap hos vätskors jemnvigt, att en vätska kan på bottnen af ett kärl utöfva ett tryck större än dess egen vigt, en princip känd under namnet af den hydrostatiska paradoxen, för hvilken Pascal fått äran. Han har upptäckt lagen för vätskors tryck på väggarne af ett kärl. Han har i sina matematiska undersökningar användt konstgrepp, som man kan betrakta som ett första steg till infinitesimalkalkylen. *Han har först infört bruket af decimaler*, ehuru *Regiomontanus* hade gjort ett stort steg härtill, och ehuru till och med Ramus indirekt hade användt dem. Han har skrifvit en af de bästa afhandlingar om konsten att segla. Han har angifvit medlen att af geologien göra en vetenskap. Han inrättade en vagn med vingar, som gick fortare än en häst. År 1617 utnämndes han till lägerutstickare åt armén i Nederländerna. Hans arbeten äro:

1. Pratique d'arithmetique. Anvers 1585
2. Problematum geometricorum lib. V. Ib. 1585.
3. Principes de statique et d'hydrostatique. Leyde 1586.
4. Système nouveau de fortification. Ib. 1586.
5. De motu cœli. Ib. 1589.
6. Traité de navigation. Ib. 1599. (På latin öfversatt af Grotius).
7. Limen heureticon, seu portuum investigandorum ratio. Leyde 1624.

Alla hans arbeten, från början skrifna på flamländska, äro samlade i Leyden 2 voll. Största delen är på latin öfversatt af W. Snell (Hypomnemata, Leyde) och på franska af Girard. (Firmin Didot).

Anm. *Girard, Albert*, berömd holländsk matematiker, dog i armod år 1633. Han har utgifvit:

1. Tables de sinus, tangentes et secantes avec un traité succinct de la trigonométrie. Haye 1626.
2. Fortification ou architecture militaire. Amsterdam 1627.
3. Géométrie contenant la théorie et pratique d'icelle. Ib. 1627.

katolik. Vi ha tyckt oss märka, att de främmande män, med hvilka Stjernhjelm brefvexlade, varit ifriga protestanter och till större delen bördiga från Holland. — Omkring år 1650 kom Stjernhjelm i följd af sin frispråkighet i onåd hos drottningen och blef af henne genast kommenderad tillbaka till Lifland. Här finna vi honom på sina gods Stjernlund och Wasula sysselsatt med sina vetenskapliga arbeten och sina barns uppfostran. Så t. ex. visa hans handskrifter, att han år 1652 $\frac{12}{12}$ på Stjernlund konstruerat en proportionalcirkel, förmedelst hvilken han geometriskt konstruerade fram resultaten i alligationsräkning och vid öfriga proportioneringar (1653 $\frac{20}{1}$). Vidare författade han 1653 $\frac{25}{1}$ en större afhandling om quadratura circuli och duplicatio spheræ. År 1654 $\frac{2}{2}$ inskref han i Upsala i sin algebra suethica åtskilliga ur Diofanti algebra tagna exempel. På Stjernlund hade han inrättat ett litet särskildt observatorium, der han bestämde Stjernlunds polhöjd till 60° 0′. Han sysselsatte sig också med höjdmätningar och konstruktioner af åtskilliga astronomiska instrument (en sjelfregistrerande glob, en vattenkonst, som spelade med käflingar $\frac{29}{5}$, tympanum azimuthale et almucantharale, rota canonica), dervid understödd af hans gode vän kandidat Megalinus. År 1654 $\frac{2}{7}$ och $\frac{28}{10}$ skref han på Stjernlund planimetriska problem ledande till andra grads eqvationer. År 1655 finna vi honom i Wasula sysselsatt med matematiska studier. En algebra, som förekommer i samma band som hans arithmetica mnemonica universalis

---

4. Invention nouvelle en algèbre 1629. (Girard har infört negativa storheter äfvensom negativa rötter i analysen. Se inledn. af Agardhs algebra, Carlstad 1846).

5. Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin. Leyde 1634. (Utgifna efter Girards död. (Poggendorff).

I detta sista arbete säger Girard sig ha funnit lösningen till Euklides' porismer. Hans arbete häröfver utkom dock aldrig. Som bekant ha dessa porismer genom Simson blifvit till en del och i våra dagar genom Chasles fullkomligt återstälda.

är skrifven i Wasula detta år. Likaledes har han samma år $\frac{27}{11}$ skrifvit en särskild algebra för sina söner (Gustaf och Georg Otto). Dessa arbeten finnas ännu på Stockholms k. bibliotek. Stjernhjelm lärer varit den förste, som i Sverige infört mikroskop och solglas. Äfven Wasulas polhöjd bestämde han och fann den vara 58° 19′ 5″. Dorpats polhöjd säger han vara 58° 15′. Under denna tid umgicks han sannolikt med matheseos prof. *Schelenius* * i Dorpat. Han citerar honom ett par gånger (angående medelproportionalen och trigonometria sphærica). År 1656 blef hans egendom Wasula af de härjande ryssarne uppbränd och han sjelf måste med de sina fly öfver till Sverige. (Han beskref i Wasula 1656 $\frac{6}{6}$ dessa härjningar). Från Stockholm skref han $\frac{29}{11}$ 1656 till sin vän kandidat Megalinus i Wexiö på latin ett bref, som ännu finnes qvar på Stockholms k. bibliotek. Brefvet innehåller en numerisk lösning på problemet: att dela en rät linie så, att rektangeln af hela linien och ena delen är lika stor med qvadraten på den andra delen. »Mera nöjsamt skall jag meddela, så framt Gud låter mig lefva och ej hungern drifver mig i främmande land att söka bröd, hvilket jag förutser skola inträffa, så framt ej en Deus ex machina kommer och hjelper.» Också måste Stjernhjelm vid återkomsten till Sverige i början lefva af enskildt och allmänt understöd, tills han efter Roeskildska freden 1658 blef landtdomare öfver Trondhjems län i Norge; men denna tjenst måste han snart lemna och var snart lika fattig som förut. År 1660 insattes han i reduktionskollegiet, men afsade sig snart denna för honom obehagliga befattning. År 1661 blef han krigsråd; men han erhöll tillika en angenämare sysselsättning, då i anledning af ett till hans regering ingifvet memorial honom uppdrogs att närmare bestämma ri-

---

* *Schelenius, Joachim*, professor i matematik vid universitetet i Dorpat omkring 1659, född 1612 i Treptow i Pommern, död 1673 i Dorpat. Har utgifvit:

1. Cursus mathematicus, 4 voll. 1665.
2. Rhabdologia seu computatio per virgulas.

kets mått, mål och vigt samt uppfinna en tillförlitligare allmän mätare för dem. För detta ändamål undersökte han Juli 1661 i Stockholm engelsmannen Gravii pes statilianus. År 1663 $\frac{31}{10}$ gjorde Stjernhjelm ett utdrag ur Cenalis' arbete om måttens verkliga förhållanden. År 1664 utkom det praktiska resultatet af hans måttbestämningar i en halfarkstabell, kallad mensuræ regni Suethiæ, autoritate regia ordinatæ per Georg Stjernhjelm, S. R. M. Consil. milit. Här får man se så väl hans trefaldiga linea carolina som hans normalbestämning af den svensk-romerska foten. Graveringen är gjord af Georg Otto Stjernhjelm. Året derpå 1665 blef genom kongl. majestäts »placat om mått och vigt» Stjernhjelms bestämningar om mått och vigt genom lag påbjudna till antagande. Denna lag blef gällande till 1737. Af år 1664 hafva vi af Stjernhjelm enklare planimetriska problem ledande till eqvationer af andra graden, skrifna i Stockholm. År 1667 utnämndes Stjernhjelm till styresman för antiqvitetskollegium i Stockholm med titeln riksantiqvarius. Detta kollegium hade året förut blifvit inrättadt af Magnus Gabriel de la Gardie i Upsala, men sedan blifvit flyttadt till Stockholm. År 1669 $\frac{27}{4}$ redigerade han sin Archimedes practicus per lineam carolinam.

Stjernhjelm var lång och reslig, brukade eget hår, kort pipskägg och bekymrade sig ej mycket, huru han gick klädd, hade alltid ett gladt sinne, försatte heldre sina angelägnaste sysslor än han försummade ett roligt sällskap; var arbetsam och hade ganska mycket för sig, hvilket merendels stannade i blotta förslag. Han var frispråkig i religiösa ämnen mera än tiderna tilläto och blef af lifländska presterskapet exkommunicerad såsom ateist. Han absolverades ej, förrän han uti en oration i Dorpat hade redogjort för sin trosbekännelse om Gud och hans under i naturen. Stjernhjelm dog 1672 $\frac{22}{11}$ och begrafdes i Klara kyrka. Enligt Anrep gifte sig Stjernhjelm omkring 1640 med Cecilia Bure, dotter af kyrkoherden i Gråmunkekloster i Stockholm Laurentius Engelberti samt brordotter till Olof, Jonas och Anders Bure, af hvilka vi i vår historik redogjort för Anders och Olof. Med Cecilia hade han 4 barn: Johan Marqvard, sedermera kapten, Georg Otto, assessor i Bergskollegium ett år efter fadren, Gustaf bortryckt i sin ungdom och Kristina gift 1686 med lagman Silvius.

Stjernhjelm har utgifvit *Musæ suethizantes*, det är sånggudinnor nu först lärande dikta och spela på svenska, tedde i några små verk och dikter. Stockholm 1668. (Här förekommer hans bekanta Herkules). Dessutom har han utgifvit åtskilliga filologiska, juridiska och matematiska arbeten. Vi upptaga här endast hans matematiska arbeten:

A. Tryckta arbeten.

1. *Archimedes reformatus*, Holmiæ 1644.
2. *Mensuræ regni Suethiæ*, auctoritate regiæ ordinatæ per Georg Stjernhjelm, S. R. M. Consil. milit, Sthlm 1664, en kopparstickstabell på ett halft ark.

B. Handskrifter.

1. *Computus decimalis* och *arithmetica decimalis* (18 qvartsidor på olika tider). Något årtal finnes icke.
2. *Arithmetica mnemonica universalis* in Wasula conscripta 1642. Senare delen utgöres af en *algebra*, skrifven i Wasula 1655 $\frac{28}{2}$.
3. *Algebra suethica* * (på svenska) skrifven dels i Westerås 1639 $\frac{2}{2}$, dels i Stockholm 1643 $\frac{12}{12}$, dels i Upsala 1654 $\frac{2}{2}$, efter hvad anteckningarne i bräd-

* *Algebra suethica* och *Lineæ Carolinæ constitutio* finnas på Upsala bibliotek (Carolina rediviva). Der finnes ock en senare upplaga af sistnämnde arbete, kalladt Carls-stafven. Vi begagna här tillfället att till bibliotekarien *Styffe* och öfriga tjenstemän vid universitetsbiblioteket i Upsala framföra vår hjertliga tacksägelse för deras uppoffrande välvilja att hålla biblioteket öppet för oss på extra-timmar.

Alla öfriga här nämnda handskrifter finnas på kongl. biblioteket. Vi tacka bibliotekarien *Klemming* och öfriga tjenstemän vid kongl. biblioteket och vid Vetenskapsakademiens bibliotek för deras städse tillmötesgående välvilja.

den upplysa. Denna algebra är af Stjernhjelm på ålderdomen öfversedd. Senare hälften af denna bok är en afskrift af algebran i förra hälften.

4. *Algebra retecta*, conscripta in usum filiorum Gustavi et Georgi Ottonis Stjernhjelmiorum. In Wasula die 27 Nov. 1655. Utanskriften heter Problemata stereometrica, metallica et similia enligt Herigone. Samma bok innehåller äfven Propositiones arithmeticæ ex exercitat. arithmeticis Franc. a Schooten *, en arithmometria linealis (här nämner han huru Hedræus gjort en kopparskifva), samt en trigonometri.
5. *Regula alligationis* in lineis et circino proportionali. Harpa analogiæ. Regula societatis, Regula falsi in lineis. Problemata arithmometrica. Stjernlund 1652 $\frac{12}{12}$. Divisio testamenti Caroli Magni per meum cribrum mathematicum. Demonstratio Joh. Megalini 1657 $\frac{9}{12}$ in Forssa.
6. *Geometria practica* (till en del enligt Stevinus). Stjernlund 1654 $\frac{28}{10}$, Wasula 1655 $\frac{21}{12}$, Stockholm 1664 $\frac{7}{2}$.
7. *Trigonometrica* dels af honom sjelf, dels af prof. Hedræus. I slutet af hans algebra retecta förekommer en trigonometri. I slutet af hans algebra suethica finner man också en trigonometri enligt Pitiscus.
8. *Quadratura circuli* 1633 $\frac{28}{10}$ och 1653 $\frac{25}{1}$ samt *sphæra duplicanda*.
9. *Notæ astronomicæ*. Globus se ipsum rectificans per

---

* *Schooten, Frans van*, son af professorn i Leyden Fr. van Schooten, hvilken uträknat tabulæ sinuum. F. Schooten jun. var extra ordin. prof. i Leyden, dog år 1661. Han har utgifvit:

1. Principia matheseos universalis 1651.
2. Exercitationum mathematicorum libri quinque 1667.

Dessutom har han utgifvit *Descartes'* geometri med anmärkningar. Likaledes har han utgifvit *Vietas* arbeten.

automaton $\frac{27}{5}$. Vattenkonst, som spelar med käflingar. Tympanum azimuthale et almucantharale 1653 (af Joh. Megalinus). Geografiska bestämningar och höjdmätningar, Stjernlund 1654. Rota canonica. En kort beskrifning om ett säjerverk.

10. *Progressio musica* (ett ark). I arithm. mnemonica förekommer också studier i musiken.

11. Notabiliora quædam ex libris geometrica *Alberti Dureri* *. (Ritning af spiraler och ägg medelst cirklar).

12. Usus *lineæ Carolinæ* Carolo Gustavo dedicatæ. Gothoburgi 1657. Stockholm 1661.

Samma arbete, fullständigare och tydligare skrifvet.

Lineæ Carolinæ hydro-metro-staticæ constitutio et usus, skrifven för k. Carl Gustaf 1657 **.

Baculus Carolinus, sereniss. Regi Suethiæ Carolo XI consecratus 1663.

Constitutio et usus pedis Stockholmensis.

En mängd lösa hithörande papper.

Archimedes practicus per lineam carolinam. Stockholm 1669 $\frac{27}{4}$. Synes vara skrifven för att tryckas.

B. **Decimalräkningen.**

Läran om decimalräkning behandlar Stjernhjelm i sin arithmetica mnemonica universalis (Wasula 1642), i sin computus decimalis och i sin arithmetica decimalis. I sin algebra suethica af år 1639 talar Stjernhjelm om decima-

---

* *Dürer, Albert*, den store målaren, föddes 1471 i Nürnberg och dog i samma stad 1528. Han har skrifvit:

1. Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und ganzen Körpern. Nürnberg 1625.

2. Unterricht zur Befestigung der Stedte, Schlosse und Flecken. Nürnberg 1527. Detta arbete innehåller bland annat 4 böcker om de menskliga proportionerna.

** Jfr sid. 58, not. *.

ler såsom om något allmänt kändt, ty han inför derstädes på de obekantas digniteter beteckningar, som skilja sig något från de af Stevin begagnade för att, som han säger, skilja dem från decimaler. Detta häntyder på att Stjernhjelm långt före 1639 (troligtvis sedan sin utländska resa 1625) räknat med decimaler. I sina undersökningar om mått, mål och vigt vid slutet af sin lefnad använder han decimalräkningen ofta. Af Firmin Didots' lefnadsteckning öfver Stevin visar sig, att *Stevin* är den som först* infört bruket af decimaler (sannolikt i hans Pratique d'arithmétique, Anvers 1585). Det förflöt således omkring 40 år mellan decimalernas upptäckt och kännedomen af dem i Sverige. Öfver 200 år förflöto (till början af 1800-talet), innan decimalerna blefvo mera allmänt införda i våra räkneböcker; ty om de kapitel angående decimalräkningen, som t. ex. *Björks, Kexleri* och *Celsii* läroböcker innehålla,

---

* Detta motsäges af *Björk*, en framstående svensk aritmetiker, för hvilken vi skola redogöra närmast efter Stjernhjelm. Han yttrar i sin lärobok, att decimalerna äro uppfunna af *Johann Hartmann Beyer* (från Bayern). Som Stevin var 20 år äldre än Hartmann, är det dock sannolikare, att Stevin varit uppfinnaren.

Hartmann, Johann, tysk kemist, född i Amberg i Pfalz 1568. Professor i retorik och matematik i Marburg 1592, medecine doktor derstädes 1606, blef professor i kemi vid samma universitet 1609 (den förste kemiska lärostol i Europa). Han älskade kemien med passion och bidrog mer än andra att borttaga sina samtidas smak för alkemien. Var lifmedikus hos dåvarande landtgrefven af Hessen-Kassel. Han dog 1631 i Kassel. Har utgifvit:

1. Logistica decimalis et stereometria.
2. Praxis chymiatrica.
3. 25 disputationer i medicinsk kemi.
4. Miscellanea medico-chymica.
5. Stereometriæ inanium nova et facilis ratio geometricis demonstrationibus confirmata. Frankfurt 1603. (Inledningen i detta arbete innehåller läran om decimalräkningen).
6. Ein newe und schöne Art der vollkommenen Visierkunst. Frankfurt 1603.

Hans opera omnia medico-chymica utkommo 1690 i Frankfurt.

Jöcher (Gelehrten Lexicon) och Firmin Didot (Biogr. générale).

hafva flertalet af läroboksförfattarne under 16- och 1700-talet ej tagit någon kännedom. Anmärkningsvärdt är ock att först i våra dagar genom *Wrede*, *Bergius* och *Smedberg* läran om decimaler blifvit satt i sammanhang med läran om hela tal — i öfverensstämmelse med deras ursprungliga bestämmelse. »Tiondetalsräkningen är» nämnligen, säger Stjernhjelm i sin arithmetica decimalis, »uppfunnen för att undfly bråk och brukas isynnerhet i landtmätning och i mål och foträkning.»

Stjernhjelms beteckningar äro följande:

⓪ eller ^{0} (en nolla ofvanför sista siffran) betyder *hela*,

① eller ` betyder tiondedelar,

② eller `` » hundradedelar,

③ eller ``` » tusendedelar, o. s. v.

Den förra beteckningen (siffror omgifna af cirklar använder Stjernhjelm i sina tidigare arbeten, den senare beteckningen (kommata, lutande åt venster, satta såsom våra exponenter efter sista siffran af talet) i sina senare skrifter. Beteckningen med exponentkommata hafva vi återfunnit hos *Joh. Hartmann* i hans stereometriæ ratio. 1603.

Talet 5,076 betecknas af Stjernhjelm antingen 5076 ③ eller 5076```.

24 hela skrifver han 24 eller 24 ⓪ eller $\overset{0}{24}$ eller 240 ① eller 2400 ②.

Addition.

Följande exempel enligt vårt nuvarande beteckningssätt

$$532 + 0{,}07 + 0{,}56 + 0{,}0345$$

skrifver han

532 ⓪ 7 ② 56 ② 345 ④

och uträknar på följande sätt

⓪	①	②	③	④
532	.	.	.	.
	.	7	.	.
	5	6	.	.
		3	4	5
532	6	6	4	5 ④

eller

532^{0}	`	``	```	````
	.	.	.	.
	.	7	.	.
	5	6	.	.
		3	4	5
532	6	6	4	5````

Subtraktion.

Skilnaden 5,7034 – 4,863 finner han sålunda:

57034 ④
48630 ④
8404 ④.

Multiplikation.

Produkten 5,076 . 4,58 beräknar han på följande sätt:

5076 ③
458 ②
40608
25380
20304
2324808 ⑤

Vid produkten sättes summan af faktorernas tecken.

Division.

Regel. Man subtraherar divisorns tecken från dividendens; men om dividendens tecken är mindre, ökar man först dividenden med så många nollor, att han får antingen samma eller större tecken.

Ex. Fyra hela ddivideradt med 0,02 utför Stjernhjelm sålunda:

400 ② 2② (200 ⓪, d. v. s. 2 ② rymmes i 400 ② 200 ggr,

eller sålunda:

$400^{\prime\prime}\ 2^{\prime\prime})\ (200^{0}$.

Anledningen till decimalernas uppkomst är att söka i bemödandet att finna lämplig indelning för längdmått, ytmått och rymdmått. Stjernhjelm har i detta hänseende gjort sig mycket förtjent af vår tacksamhet. Hans bestämningar af längdmåtten äro de samma, som vi ännu i dag hafva. Genom följande exempel blifva Stjernhjelms åtgöranden i detta hänseende tydliga:

Talet 157,32097 eller 15732097 ⑤ bör utläsas på följande sätt:

I longimetrien.

157 perticæ (stänger)* 3 pedes (fot) 2 digiti (finger) 0 gran 9 ferul. 7 puncta (arithm. univers. mnemon.) eller

157 stänger 3 fot 2 tumbar (tum, toll) 0 gran 9 linier 7 punkter (arithm. decimalis).

I planimetrien.

157 qu. perticæ 3 zonæ 2 qu.pedes 0 palmulæ 9 qu. digiti 7 strigæ (arithm. univ. mnemon.) eller

1 podisma 5 plethra 7 qvadr.stänger 3 bälten 2 qv.fot 0 lister 9 qv.finger 7 remsor 0 korn (grana). [Arithm. decim.].

I stereometrien.

157 cub.perticæ 3 scutal. 2 trabes 0 cub.pedes 9 quadræ 7 taleæ (arithm. univ. mnemon.) eller

157 kub.stänger 3 skifvor 2 pelare 0 kub.fot 9 taflor 7 torn 0 finger (tessela digitalis) 0 filum 0 granum 0 festuca, 0 scrupulus vel punctum (arithm. decim.).

Som vi se, står Stjernhjelm i afseende på namn för ytmått och rymdmått framom oss ännu i dag, i det han liksom fransmännen har särskildt namn äfven på tiondedelar och hundradedelar af yt- och rymdmåtten. Hans förmåga att bilda namn är verkligen förvånande.

Slutligen bör anmärkas, att Stjernhjelm vet att förvandla vanliga bråk till decimaler och tvärtom. Se här

* 10 stänger utgjorde ett plethrum (vårt nu varande ref, se sid. 94).

ett af hans exempel i arithm. univ. mnem. på den senare händelsen, hvilket är lärorikt, emedan det visar, att han kände teorien för närmebråk.

3428 ③ är, säger han, lika med $3\frac{428}{1000}$ eller i det närmaste $3\frac{3}{7}$.

Märk. Närmevärdena till 0,428 äro $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{107}{250}$.

C. Algebra.

Stjernhjelms algebraiska arbeten utgöras, såsom nämndt är, af

1. *Algebra suethica*, skrifven i Westerås 1639, Stockholm 1643 och Upsala 1654.
2. *Arithmetica mnemonica universalis*, skrifven i Wasula 1642 (renskrifven i Dorpat under tillfrisknandet efter en sjukdom) och 1655. I den förra delen begagnar han liksom Cardan * och öfrige geo-

---

* *Cardano, Geronimo*, medecine doktor, praktiserande läkare och professor i matematik i Milano (1534—59), derpå prof. i medicin först i Pavia och derpå i Bologna (1562—70), hvarifrån han flyttade till Rom och lefde der af en påflig pension. Han föddes 1501 i Pavia och dog 1576 i Rom. Har utgifvit:

1. Practica arithmeticæ generalis et mensurandi singularis. Mediol. 1539.
2. Computus minor. Ibid. 1539.
3. Artis magnæ sive de regulis algebræ liber unus. Ib. 1545. Här offentliggjorde han den honom af Tartaglia år 1539 meddelade regeln till lösning af tredje gradens eqvationer mot dennes vilja.
4. De revolutione annorum, mensium et dierum ad dies criticos. Nuremb. 1547.
5. De temporum et motuum erraticorum restitutione. Ib. 1547.
6. Aphorismorum astronomicorum segmenta septem. Ib. 1547.
7. De subtilitate. Ib. 1550.
8. Claudii Ptolemæi Pelusiensis libri IV de astrorum judiciis. Basel 1554.
9. De septem erraticis stellis. Ib. 1554.
10. De rerum varietate. Ib. 1557.

metrer före Viète endast sifferräkning. I den senare hälften deremot begagnar han liksom Viète bokstafsräkningen med stora alfabetet.

3. *Algebra retecta*, skrifven för sönerna Gustaf och Georg Otto i Wasula 1655.

Följande redogörelse grundar sig förnämligast på studier af de 2 förstnämnda arbetena.

Emedan första digniteten af den obekanta kan beteckna en linie, den andra en qvadrat och den tredje en kub, kallade Stjernhjelm de olika digniteterna af den obekanta för *geometriska tal.* Dessa betecknades af de äldre geometrerna t. o. m. Viète sålunda:

N	(numerus, tal) . . . . . . betyder	x^0 eller 1.
R	(radix, rot eller sida)	x,
z	(zensus eller quadratus)	x^2,
c	(cubus)	x^3,
zz	(zensi-zensus eller quadrati-quadratus) .	x^4,
∫∫	(sur-solidus)	x^5,
zc	eller cz (zensi-cubus eller cubi-qvadratus)	x^6,
B∫∫	(sur-solidus secundus)	x^7,
zzz	(zensi-zensi-zensus)	x^8,
cc	(cubi-cubus)	x^9,
z∫∫	(sur-solidi-quadratus)	x^{10},
C∫∫	(sur-solidus tertius)	x^{11},
zzc	(zensi-zenzi-cubus)	x^{12},
D∫∫	(sur-solidus quartus)	x^{13},
zB∫∫	(zenzi-sur-solidus secundus)	x^{14},

o. s. v.

Som vi se, utmärkas de olika digniteter, som ha primtalsexponenter öfver 4 med tecknen:

---

11. Liber de vitali aqua seu de ethere. Ib. 1566.
12. De regula aliza libellus. Ib. 1570.
13. Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum etc. Ib. 1570.
14. Encomium geometriæ recitatum. 1535.

Allt är samladt i Cardani opera. Lugd. 1663. Poggendorff.

ſſ, Bſſ, Cſſ, Dſſ, Eſſ, Fſſ o. s. v.,
hvilka betyda respektive:

x^5, x^7, x^{11}, x^{13}, x^{17}, x^{19} o. s. v.

»Men efter denna beteckning är mödosam, har jag — säger Stjernhjelm — funnit för godt att efter Stevin och Bombelli * bruka nya tecken. Stevin använder cirklar, men för att skilja dem från decimaler begagnar jag heldre fyrkanter.» Se här Stjernhjelms beteckningar.

$\boxed{0}$ eller N betyder talet 1,
$\boxed{1}$ eller ⊢⊣ . . . . . . x,
$\boxed{2}$ . . . . x^2,
$\boxed{3}$ . . . . x^3,
o. s. v.

Hos Stjernhjelm påträffa vi för första gången i en svensk lärobok tecknen + och —**, hvilket senare han

---

* *Bombelli, Rafaëllo*, ingeniör. Född i Bologna. År 1572 utgaf han en algebra med titel: L'algebra parte maggiore dell arithmetica divisa in tre libri; nuovamente posta in luce. Bologna 1572. Han visar här för första gången realiteten af de tre rötterna i en kubisk eqvation vid casus irreductibilis. Poggendorff och Libri.

** Dessa tecken hafva först i tryck blifvit begagnade af *Stiefel*. Men de ha blifvit uppfunna af den verldsberömde målaren *Leonardo da Vinci*. Denne man är i många hänseenden märkvärdig, ja ett af de kolossalaste snillen, som lefvat på jorden. Så studerade han mekaniken och fysiken med tillhjelp af algebran och geometrien. I sina algebraiska undersökningar och i applikationerna betjenade han sig af *bokstäfver*. Han har framstält teorien för lutande planet, tyngdpunkten för pyramiden (genom att dela upp den i skifvor parallela med basen), teorien för kroppars stöt. Han har infört i mekaniken teorien för friktion. Han känner omöjligheten af perpetuum mobile, uppfann dynamometern för att beräkna verkan af maskiner och han bestämde maximum af djurs kraft genom att kombinera deras vigt med deras muskelstyrka. Han konstruerade en flygmaskin, uppfann en mängd maskiner för att göra cylindrar, sågar, skrufvar, kläde, hammare för att stämpla guld. Han konstruerade eldstäder, som värmde både uppåt och nedåt, lampor med dubbel luftström. Geometrien använde han på perspektiven och på teorien för skuggor. Utkastade först grunderna till undulationsteorien. Han ville kanalisera Arno. Det var dock blott Lombardiet och Frankrike, som i skrifver $\div$ (liksom engelsmännens divisionstecken) för att skilja det från $\vdash\!\!\dashv$, som hos Stjernhjelm betyder den obekanta (x eller cosa, die Cosse).

Ex. $3\,\boxed{4} + 5\,\boxed{3} \div 1\,\boxed{2} \div 5 \vdash\!\!\dashv + 24$

utsäges:

3 qvadrat-qvadrater, mer 5 kuber, mindre 1 qvadrat, mindre 5 linier, mer 24.

Om linien är 2, blir nämnda uttryck

$$48 + 40 \div 4 \div 10 + 24 \text{ det är } 98.$$

Addition af geometriska eller cossiska tal.

Ex.	$4\,\boxed{2} \div 3 \vdash\!\!\dashv + 2$	eller, enl. nuvarande beteckning,	$4x^2 - 3x + 2$
	$2\,\boxed{2} + 2 \vdash\!\!\dashv \div 4$		$2x^2 + 2x - 4$
Summa	$6\,\boxed{2} \div 1 \vdash\!\!\dashv \div 2$	Summa	$6x^2 - x - 2.$

---

detta hänseende fingo njuta frukten af hans upptäckter. Han är den förste, som med omsorg observerat fossila djur och vexter samt beskrifvit dem. Till ebb och flod, åskan, magneten, stjernornas dallring, månens askfärgade ljus, till allt har han sökt gifva förklaring. Upptäckte kapillariteten och diffraktionen, luftens motstånd, förtätning och vigt, stoftfigurerna på svängande ytor, stående vattenvågor, m. m.

Leonardo da Vinci föddes 1452 i byn Vinci nära Florens, lefde 1482—99 i tjenst hos Lodov. Maria Sforza i Mailand, derpå i Florens och Rom, kallades 1516 af konung Frans till Frankrike, der han lefde till sin död. Han dog 1519 i slottet Cloux nära Amboise.

Intet af hans verk har direkt kommit till oss, men af enstaka handskriftsnoter och kapitel hafva senare följande arbeten blifvit sammansatta och tryckta:

1. Trattato della pittura. 1651 och 1817.
2. Trattato del moto e misura del aqua. Bologna 1828.

Hans handskrifter i pariser-biblioteket innehålla ännu en stor skatt af matematiskt, fysikaliskt och annat innehåll.

Han omtalas såsom sin tids skönaste och starkaste man.

Libri (Hist. des sciences mathém. en Italie).

Subtraktion.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Ex.} & 400 + 0\,\boxed{2} + 0\,\vdash\!\dashv & \text{d. v. s.}\quad 400 \\
 & 250 + 1\,\boxed{2} \div 42\,\vdash\!\dashv & \quad -[250 + x^2 - 42x] \\
\hline
\text{Rest} & 150 \div 1\,\boxed{2} + 42\,\vdash\!\dashv & \text{Rest}\quad 150 - x^2 + 42x.
\end{array}
$$

Här citerar han sina anteckningar i kanten hos Stevin, sid. 64.

Multiplikation.

»Lika tecken gifva plus, men olika minus».

$$
\begin{array}{llll}
\text{Ex.} & 2\,\vdash\!\dashv + 3 & \text{d. v. s.} & 2x + 3 \\
 & 2\,\vdash\!\dashv \div 3 & & 2x - 3 \\
\hline
 & \div 6\,\vdash\!\dashv \div 9 & & -6x - 9 \\
 & 4\,\boxed{2} + 6\,\vdash\!\dashv & & 4x^2 + 6x \\
\hline
 & 4\,\boxed{2} \div 0\,\vdash\!\dashv \div 9 & & 4x^2 \qquad - 9.
\end{array}
$$

Division.

$$\frac{9\,\boxed{2} + 15\,\vdash\!\dashv}{3} \text{ blir } 3\,\boxed{2} + 5\,\vdash\!\dashv, \text{ d. v. s. } \frac{9x^2 + 15x}{3} = 3x^2 + 5x.$$

Cossiska bråk eller brutna tal.

Förkortning. $$\frac{16\,\boxed{3}}{24\,\boxed{4}} \text{ blir } \frac{2}{3\,\vdash\!\dashv}, \text{ d. v. s. } \frac{16x^3}{24x^4} = \frac{2}{3x}.$$

Addition.

$$\frac{9\,\vdash\!\dashv + 2\,\boxed{2}}{6\,\vdash\!\dashv} \text{ till } \frac{21\,\boxed{3} \div 8\,\boxed{2}}{6\,\vdash\!\dashv}$$

$$\text{blir } \frac{21\,\boxed{3} \div 6\,\boxed{2} + 9\,\vdash\!\dashv}{6\,\vdash\!\dashv} \text{ eller } \frac{7\,\boxed{2} \div 2\,\vdash\!\dashv + 3}{2}$$

d. v. s.

$$\frac{9x + 2x^2}{6x} + \frac{21x^3 - 8x^2}{6x} = \frac{21x^3 - 6x^2 + 9x}{6x} = \frac{7x^2 - 2x + 3}{2}.$$

Subtraktion.

$$\frac{5 \vdash\!\dashv \div 7}{3\,\boxed{2} \div 5} \text{ från } \frac{4 \vdash\!\dashv + 10}{3\,\boxed{2} \div 5} \text{ blir } \frac{17 \div 1 \vdash\!\dashv}{3\,\boxed{2} \div 5},$$

d. v. s.

$$\frac{4x + 10}{3x^2 - 5} - \frac{5x - 7}{3x^2 - 5} = \frac{17 - x}{3x^2 - 5}.$$

Multiplikation.

$$\frac{5\,\boxed{2} + 4\,\boxed{4}}{3 \vdash\!\dashv \div 5} \text{ med } \frac{2 \vdash\!\dashv \div 4}{4\,\boxed{2}} \text{ blir } \frac{8\,\boxed{5} \div 16\,\boxed{4} + 10\,\boxed{3} \div 20\,\boxed{2}}{12\,\boxed{3} \div 20\,\boxed{2}}$$

d. v. s. $$\frac{5x^2+4x^4}{3x-5} \cdot \frac{2x-4}{4x^2} = \frac{8x^5 - 16x^4 + 10x^3 - 20x^2}{12x^3 - 20x^2}.$$

Division.

$$\frac{8 \vdash\!\dashv}{9\,\boxed{2}} \text{ med } \frac{2}{3 \vdash\!\dashv} \text{ blir } \frac{24\,\boxed{2}}{18\,\boxed{2}}$$

d. v. s. $$\frac{8x}{9x^2} : \frac{2}{3x} = \frac{24x^2}{18x^2}.$$

Rotutdragning.

Rotutdragning utför Stjernhjelm medelst begagnande af 2 tabeller, den ena utvisande de 9 första digniteterna på talen 1, 2, 3 . . . . 9, den andra (»tabula mirifica») binomialkoefficienterna.

Se här hans *tabula mirifica.*

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{2} & 2 & & & & & \\
\boxed{3} & 3 & 3 & & & & \\
\boxed{4} & 4 & 6 & 4 & & & \\
\boxed{5} & 5 & 10 & 10 & 5 & & \\
\boxed{6} & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & \\
\boxed{7} & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7
\end{array}$$

o. s. v. ända till och med $\boxed{10}$.

Som exempel anföra vi endast ett på qvadratrotsutdragning och ett på sjunderotsutdragning.

Ex. 1. $\sqrt{\boxed{2}}\ \dot{2}7\ 8\dot{9}\ 4\dot{6}\ 8\dot{4}\ (5281\frac{5723}{10563}$

$2\ldots\ldots$

$85\ldots\ldots$

$62\ldots$

$57\ldots$

eller, enligt nuvarande sätt:

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{27894684} = 5281 \\
 & 25 \\
\hline
 & 289 \\
102 & 204 \\
\hline
 & 8546 \\
1048 & 8384 \\
\hline
 & 16284 \\
 & 10561 \\
\hline
 & 5723
\end{array}
$$

Anm. Nämnaren $10563 = 2 \,.\, 5281 + 1$.

Ex. 2. $\sqrt{\boxed{7}}\ 35216\dot{1}460620\dot{8}\ (62$

$$
\begin{array}{r}
279936 \\
\hline
722254606208 \\
722254606208
\end{array}
$$

Mirifica.

$\boxed{6}$ 46656 .	7000000 .	2	gör	653 184 000 000
$\boxed{5}$ 7777 .	2100000 .	4	»	65 318 400 000
$\boxed{4}$ 1296 .	350000 .	8	»	3 628 800 000
$\boxed{3}$ 216 .	35000 .	16	»	120 960 000
$\boxed{2}$ 36 .	2100 .	32	»	2 419 200
6 .	70 .	64	»	26 880
		$\boxed{7}$	»	128
				722 254 606 208.

Den sökta sjunderoten var således 62.

Stjernhjelm förstår ock att approximera genom decimaler. Så t. ex. finner han $\sqrt{226576\ (3)}$ att vara 15052 (3) eller i längd 15 stänger 0 fot 5 finger 2 gran.

Reduktion med radikaler.

Ex. 1. $\sqrt{\boxed{3}}\,56 + \sqrt{\boxed{3}}\,7$ gör $2\sqrt{\boxed{3}}\,7$ och $\sqrt{\boxed{3}}\,.\,7$ eller $3\sqrt{\boxed{3}}\,.\,7$ eller $\sqrt{\boxed{3}}\,189$ d. v. s. enligt vårt beteckningssätt:

$$\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{7} = 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{189}.$$

Ex. 2. $\sqrt{\boxed{4}}\,10$ gånger $\sqrt{\boxed{4}}\,9$ gör $\sqrt{\boxed{4}}\,90$, eller

$$\sqrt[4]{10}\,.\,\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{90}.$$

Ex. 3. $\sqrt{27 + \sqrt{200}}$ är $\sqrt{\frac{\sqrt{729 - 200} + 27}{2}}$

$$+ \sqrt{\frac{27 - \sqrt{229 - 700}}{2}} \quad \text{eller} \quad 5 + \sqrt{2}.$$

Det är rätt märkvärdigt att se det Stjernhjelm kände till denna invecklade rotutdragning ur irrationela binomer.

Eqvationsläran. (Regula algebræ).

Första graden. En obekant.

Regeln för lösningen af en eqvation innefattas i följande begge latinska hexametriska versar:

Pono latus. Quod tracto et construo. Adæquo. Reduco.
Divido. Radicem inquiro laterisve valorem.

På svenska ordagrant öfversatt blir regeln denna:

Jag sätter den obekanta lika med en sida ($\vdash\!\dashv$). Denna behandlar och konstruerar jag (enligt uppgiften i problemet). Jag uppsöker en likhet. Jag reducerar (förenklar). Jag dividerar. Jag söker roten eller sidans värde.

Problem. Det är tu tal. Det större talet öfverskjuter det mindre med 6. Multiplicerar man det större med 2 och det mindre med 3 och lägger båda produkterna till desamma talen, så blifver hela summan 438. Hvilka äro de tu talen?

Konstruktion.

Pono 1. Sätt det mindre talet 1 $\vdash\!\dashv$,
då blir det större . . 1 $\vdash\!\dashv$ + 6.

Tracto 2. Multiplicera det större talet med 2. Man får: 2 $\vdash\!\dashv$ + 12.
. . . . . . mindre . . . 3. . . . 3 $\vdash\!\dashv$

Addera, och summan blir 5 $\vdash\!\dashv$ + 12 + 2 $\vdash\!\dashv$ + 6
eller 7 $\vdash\!\dashv$ + 18.

Aequo 3. Lik 438.

Reduco 4. Jämka, genom att från hvarje sida borttaga 18.
Man får 7 $\vdash\!\dashv$ lik 420.

Divido 5. Dela 420 med 7. Qvoten blir 60.

6. Det mindre talet 1 $\vdash\!\dashv$ är 60.
» större » 1 $\vdash\!\dashv$ + 6 är 66.

Flere obekanta.

Man kallar de obekanta A, B, C, D o. s. v.

Problem. Tre hafva penningar. Gifver P åt Q $\frac{1}{3}$ af sina och Q gifver R $\frac{1}{4}$ af sina och R gifver P $\frac{1}{5}$ af sina penningar, så hafva de på sistone alla lika. Huru mycket hade hvardera?

För att undvika bråk sätter man:

för P 3 $\vdash\!\dashv$,
Q 4,
R 5A.

Emedan problemet ej är fullt bestämdt, kan man för den ena Q bestämma ett godtyckligt tal 4. När hvar och en hafver gifvit och tagit efter uppgiften, så har

P 2 $\vdash\!\dashv$ + 1A,
Q 1 $\vdash\!\dashv$ + 3,
R 4A + 1.

Häraf erhålles

2 $\vdash\!\dashv$ + 1A || 1 $\vdash\!\dashv$ + 3, eller $2x + y = x + 3$,
1 $\vdash\!\dashv$ + 3 || 4A + 1. $x + 3 = 4y + 1$.

Den förra likheten gifver

1A || ÷ 1 $\vdash\!\dashv$ + 3 d. v. s. $y = -x + 3$, hvilket insatt i den senare förvandlar denna till

$$1 \vdash\!\dashv + 3 \,\|\, \div 4 \vdash\!\dashv + 13, \quad \text{d. v. s.} \quad x + 3 = -4x + 13,$$

hvaraf

$$1 \vdash\!\dashv \,\|\, 2 \quad \text{d. v. s.} \quad x = 2.$$

P får således 6, Q 4 och R 5 penningar.

Anm. Beteckningen af de obekanta med stora bokstäfver är enligt Viète. Omkring år 1643 synes Stjernhjelm börjat begagna Cartesii likhetstecken ($\|$). Förut hade han intet utan skref i stället med skrift »är lika med» på svenska eller latin.

Eqvationer af andra eller högre grader.

Desse indelades i vissa klasser eller reglor.

Regel 1. Hit höra eqv. af formen $ax = b$ (d. v. s. eqv. af 1:a graden).

» 2. . . . . $ax^n = b$.

» 3. . . . . α) $x^2 = bx + c$,

β) $x^2 = -bx + c$,

γ) $x^2 = bx - c$.

$$x^n = ax^{n-1} + bx^{n-2},$$

$$x^{2n+m} = ax^{n+m} + bx^m.$$

De begge sista likheterna kunna bringas att bero på lösningen af en eqvation af formen

$$y^2 = ry + s.$$

I ögonen fallande är att vid regeln 3 formen $x^2 = -bx - c$ saknas. Skälet är naturligtvis, att denna eqvations rötter äro imaginära eller ock negativa.

Regel 3α. Ex. $1 \boxed{2} \,\|\, 4 \boxed{1} + 12$, d. v. s. $x^2 = 4x + 12$,

hvaraf

$1 \boxed{1} \,\|\, 2 + \sqrt{16}$ $\qquad x = 2 + \sqrt{16}$

och

$1 \boxed{1} \,\|\, 6.$ $\qquad x = 6.$

Regel 3β. Ex. $1 \boxed{2} \,\|\, \div 6 \vdash\!\dashv + 16$, d. v. s. $x^2 = -6x + 16$,

hvaraf

$1 \boxed{1} \,\|\, \div 3 + \sqrt{25}$ $\qquad x = -3 + \sqrt{25}$,

eller

$1 \boxed{1} \,\|\, 2.$ $\qquad x = 2.$

Regel 3γ. Ex. $1\,\boxed{2} \parallel 6\,\boxed{1} \div 5$, d. v. s. $x^2 = 6x - 5$,

hvaraf

$1\,\boxed{1} \parallel 3 \pm 2$, $\qquad x = 3 \pm 2$,

eller

$1 \mapsto \parallel 5$ eller 1. $\qquad x = 5$ eller 1.

Eqvationerna lösas enligt vår vanliga regel: den obekanta är lika med halfva koëfficienten för andra termen med ombytt tecken + eller − o. s. v. Huru denna regel tillkommit visar ej Stjernhjelm. Ofvanstående 3 exempel visa, att Stjernhjelm ej känner negativa storheter. Ingen negativ rot är nämnligen upptagen. Stjernhjelm slutar detta kapitel i sin algebra suethica sålunda:

»De tre första reglornas (lösning af eqvationer af 1:a och 2:a graden) autor säges hafva varit en arab vid namn *Mahomed ben Mose**. Den fjerde (lösning af trinomiska eqvationer) är sedan funnen, af hvem vet man ej. De öfriga eqvationer, som bestå af $\boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$, $\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$, $\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$ o. s. v. och kallas kubik- och quadrati-quadrat-cossa, äro ännu icke lösta efter några vissa generalreglor, derigenom värdet af $1\,\boxed{1}$ i alla fall kunde finnas, ehuruväl några spetsfundiga hufvuden sig till det yttersta derom hafva bemödat, ibland hvilka *Cardan*, *Nicolaus Tartalea* Brixiensis**,

---

* *Mahomed ben Mose* (son af Mose) från Covaresm lefde på 800-talet. Han egnade sig företrädesvis åt geometri och astronomi, skall sjelfständigt hafva funnit den analytiska lösningen af en andra grads eqvation. Det visar sig nämnligen af hans beteckningar — säger Montucla enligt Wallis — att han ej känt Diofantus. Hans matematiska arbeten utgöras af 1. en handskrift med titeln: *algebra covaresmica* samt 2. af ett trigonometriskt arbete med titeln: *om plana och sferiska figurer*. Gemensamt med sina berömde bröder mekanikern *Hamed* och geometern *Alhazen* bestämde han ekliptikans obliqvitet till 23° 35′.
Efter Montucla.

** *Tartaglia, Niccola.* Avtodidakt, lärde i Verona, Vicenza, Brescia och slutligen sedan 1534 i Venedig. Född 1506 i Brescia, död 1559 i Venedig. Han upptäckte år 1534 i Venedig lösningen af eqvationen $x^3 + ax = b$. Har utgifvit:

Scipio Ferreus Boloniensis *, *Antonius Maria Floridus* Venetianus **, *Raphaël Bombellus* och *Fransiscus Vieta* hafver bragt saken högst, dock till ingen fullkomlighet. Sist haffver den högstberömde matematicus *Simon Stevin* upptänkt ett lätt, dock artigt konststycke till att finna värdet på 1 $\boxed{1}$ af hvarjehanda eqvation det vara må i gemen, hvilket han beskrifver i sin franska arithmetica. »Detta vill jag mina kära landsmän till nytta på mitt sätt med åtskilliga egna exempel ljufligen förklara.»

Detta sätt att lösa eqvationer efter Stevin kallar Stjernhjelm regula regularum. Det består i allmänhet i att genom försök med åtskilliga nummervärden på den obekanta allt närmare approximera sig till densamma.

---

1. Nuova scienze, utile per ciascuno speculativo mathematico bombardino. Venezia 1537. Här meddelar han, att kastvidden är störst vid 45° elevation.
2. Euclide. Ib. 1543.
3. Archimedis opera emendata. Ib. 1543.
4. Quesiti ed invenzioni diversi. Ib. 1546. Här förekommer hans rätt till lösning af eqvationer af tredje graden. Jfr Ferro.
5. La travagliata invenzione, ossia Regola per sollevare ogni affondata nave. Ib. 1551.
6. Ragionamenti sopra la travagliata invenzione. Ib. 1551.
7. General trattato de numeri e misure. Ib. 1556—60.
8. Trattato di arithmetica. Ib. 1556.
9. Descrizione dell artificiosa macchina fatta per cavare il gallone. Ib. 1560.
10. Archimedis de insidentibus aquæ libri II. Ib. 1565.
11. Jordani opusculum de ponderositate.

* *Ferro, Scipione dal.* Lärde från 1496 till 1525 aritmetik och geometri i Bologna, hvarest han dog 1525. Han är den egentliga uppfinnaren af lösningen till eqvationen $x^3 + px = q$, men hvilken han ej offentliggjorde utan meddelade till sin vän Antonio Maria Fiore (Floridus). Denne Fiore förelade för Tartaglia problem, hvilka voro beroende af denna lösning, och föranledde derigenom att Tartaglia år 1535 för andra gången gjorde upptäckten af denna lösning och generaliserade den. Men Tartaglia offentliggjorde den ej, utan detta skedde mot hans vilja genom Cardan, för hvilken han år 1539 i vers hade meddelat den.

** *Antonio Maria Fiore*, en vän till Ferro, utan tvifvel samme Antonio Maria, om hvilken Libri säger, att han offentligen meddelade undervisning i matematik i Rom.

Problemsamling.

I sin arithmetica mnemonica och i sina afhandlingar om linea carolina, men i synnerhet i sin algebra suethica har Stjernhjelm upptagit en samling problem så intressanta, att de äro förtjenta af att i tryck utgifvas ännu i dag. Vi upptaga här några få af dessa, dels författade af Stjernhjelm, dels af honom hemtade ur andra författare. Man får härigenom reda på flere af de matematiska arbeten, hvilka den tiden studerades.

Probl. 1. Af *Bachet**. Om till qvadraten på ett tal lägges dubbla talet och dessutom 1, så uppkommer qvadraten på ett tal, som är en enhet större än det förstnämnda talet.

Probl. 2. Af *Nicolaus Davens.* Uppttecknadt af Stjernhjelm 1639. En ung sälle hafver äpplen. Honom möta tre jungfrur. Den första af dem gifver han $\frac{1}{4}$ af äpplena. Hon gifver honom 3 igen. Den andra gifver han $\frac{1}{3}$ af alla dem han då hade igen, och hon gaf honom 2 tillbaka. Den tredje gaf han $\frac{1}{7}$ af hela resten, och hon gaf honom ett igen. När han då såg till, så hade han 13 äpplen qvar. Huru många hade han af begynnelsen?

Probl. 3. Ur *Lazari Schoneri* algebra. Två falka på en gullring, som är till köps för 50 rdr. *A* säger till *B*: låna mig hälften af edra penningar, så kan jag betala ringen. *B* säger till *A*: käre! låna du mig $\frac{1}{3}$ af dina penningar, så kan jag köpa honom. Huru mycket har hvardera?

---

* *Bachet, Claudius Caspar*, herre af Meziriac, af en adlig familj i Frankrike, föddes 1593 och dog 1638. Han var i grekiskan, algebran och i synnerhet i mytologien mycket bevandrad. Vid 20 års ålder ingick han i jesuiterorden, men lemnade den strax. Blef upptagen i franska akademien. Har utgifvit:

1. Problèmes plaisants qui se font par nombres.
2. Diophanti alexandrini arithmeticorum libri sex, nunc *primum græce et latine editi.* Paris 1621. Det är i Bachet's porismer till detta arbete, hvarur ofvannämnda problem är taget.

Probl. 4. Ur *Herigons Isagoge algebræ.* En man möter några fattiga. Dem gifver han så många penningar, som han hafver i pungen, nämnligen: den första $4 + \frac{1}{6}$ af alla penningar, den andra $8 + \frac{1}{6}$ af det som var qvar, den tredje $12 + \frac{1}{6}$ af det öfverblifna och så fort, alltid ökandes med 4, så länge han hade något igen. Sist, när intet mer var igen och man såg till, så hade de fattige hvar och en lika mycket. Frågan är, huru många penningar mannen hade, och huru många de fattige voro. Upptecknadt af Stjernhjelm i Stockholm 1643 Sept. 12.

Probl. 5. Ur *Diofantus* * Naket problem. Jag vill dela talet 16 i 2 delar A och B så, att hälften af A öfverskjuter $\frac{1}{3}$ af B med talet 3. Säg delarne. — Upptecknadt af Stj. i Upsala 1654 Febr. 2 och af honom beklädt på 6 olika sätt, hvaraf vi upptaga ett:

Samma problem klädt. Två flickor påträffa 16 äpplen liggande på ett bord. Drifna af begär till dem, rycka de dem till sig, hvar och en så många som möjligt. Vid efterräkning befinnes det att hälften af den förstas öfverskjuter $\frac{1}{3}$ af den andras med 3. Huru många äpplen togo de hvardera?

---

* *Diofantus* från Alexandria lefde sannolikt under Julianus affällingen och dog omkring år 360 vid hög ålder. Han var en af forntidens berömdaste matematici, algebrans uppfinnare. Efter honom ha sitt namn de s. k. diofantiska eqvationerna, d. v. s. eqvationer, som visserligen kunna satisfieras af oändligt många värden, men som genom frågans natur ej få satisfieras af annat än rationela eller af hela tal. Diofanti egna exempel af denna natur leda vanligen till eqvationer af andra graden. Hans arbeten hafva på 400-talet blifvit kommenterade af den lärda *Hypatia.* Först år 1621 blef det återstående af Diofanti arbeten, utgörande 6 böcker aritmetik och en bok de numeris multangulis, på latin från grekiskan öfversatt och väl kommenteradt af *Bachet.* Detta mödosamma arbete utförde Bachet under en svår fjerdedags-frossa. Utan den melankoliska envishet, som denna frossa förlänade honom, skulle Bachet, säger han, aldrig kunnat till slut fullfölja detta af oerhörda svårigheter uppfylda företag. Efter Bachet hafva de berömda analysterna Fermat och Ozanam sysselsatt sig med diofantiska eqvationer.

Enligt Montucla och Bachet's Diofantus.

Probl. 6. Af *Stiefel**. Jag vet ett tal sådant, att det 3 gånger taget är lika mycket under 24 som talet sjelft är under 10. Kan du gissa?

Probl. 7. Af *Stevin.* Dela 5 i 2 delar så, att deras produkt blifver 6.

Probl. 8. Ur Nova algebra af *Joh. Stampioen.* På en till sin längd obekant rät linie AB äro tagna 2 punkter E och F. På AB uppritas en qvadrat $ABCD$; genom E och F dragas de räta linierna EG och FLH så, att de blifva parallela med sidan $BKSC$; genom punkterna G och H på diagonalen $AGHC$ dragas de räta linierna GLK och HS parallelt med AB. Man vet, att rektangeln EL är 28, rektangeln FK 40 och rektangeln HK 70 ytenheter. Att finna längderna på AE, EF och FB.

---

* *Stiefel, Michel*, tysk matematiker, född i Saxen 1486, död i Jena 1567. Han var först augustinermunk. Sedan han antagit Luthers läror, blef han prest i Saxen, i Österrike och i Holtzdorff nära Wittenberg. Han var en af sin tids förnämsta matematici, och så väl i aritmetiken som i algebran har han gjort vigtiga förbättringar. I hans arithmetica integra (Nurenb. 1544 med företal af Melankton) finner man frön till logaritmer, ty han jemför der uttryckligen aritmetiska och geometriska serier, såsom man gör i de vanliga afhandlingarne om logaritmer, men han hade icke sysselsatt sig med att interpolera i den geometriska följden mellantermerna. Han har i detta hänseende varit Nepers förelöpare, ehuru denne har betraktat alstringen af logaritmer på ett helt olika och för honom egendomligt sätt. Man tillskrifver Stiefel först användningen af bokstäfver för att utmärka de obekanta, och han betjenar sig *först* af tecknen + och —. Han utgaf en andra upplaga af afhandlingen die Coss af Tysklands äldste algebrist Christian Rudolphi. Stiefel begick den dårskapen att på religionen vilja använda matematiken, hvilket ledde derhän, att han förutsade verldens undergång till år 1533. Många sålde sina egendomar och då profetian ej inträffade, stämde de den falske profeten. Han blef dock genom sin vän Luthers bemedling frikänd. Har utgifvit:

1. Arithmetica integra, die vollkommene Rechenkunst, mit Vorrede von Melanchton. Norimb. 1544.

2. Die deutsche arithmetica v. d. welschen u. deutschen Praktik. Ib. 1646.

3. Die Coss Chr. Rudolphis mit schönen Exempeln der Coss gebessert. Königsb. 1554. Firmin Didot och Poggendorff.

Probl. 9. Af *Clavius.* Att finna 2 qvadrattal, hvilkas skilnad är gifven.

Probl. 10. Af *Stjernhjelm.* Skrifvet i Vasula 1642. »Om du till författarens ålder lägger 5 och från hans ålder borttager 8 och multiplicerar den sålunda erhållna summan och skilnaden med hvarandra samt dertill lägger 172, så erhåller du $\frac{1}{44}$ af kuben på författarens verkliga ålder. Den som löser denna gåta skall af algebran blifva hedrad med excellenstitel.»

Dessutom förekomma problem ur *Rudolphis* *, *Laurembergs* **, *Gerh. Ivan Vossii* och *Alsteds* *** arbeten.

---

* *Christian Rudolphi*, en matematiker, florerade mellan 1512 och 1548 i Venedig och skref Regulam Coss, hvilken Michel Stiefel öfversatte på tyska.

** *Lauremberg, Johann Wilhelm.* Född 1590 i Rostock, död 1658 på Sorö. Magister i Rostock 1610, medecine doktor i Rheims 1616, prof. i poesi vid universitetet i Rostock 1618 och 1623 professor i matematik vid riddarakademien på Sorö på Seland. Har utgifvit:

1. Logarithmica. Lugd. Batav. 1628.
2. Lusus et recreationes ex fundamentis arithmetricis. Havniæ 1634.
3. Arithmetica et algebra. Sorö 1643.
4. Instrumentum proportionum, quo universa arithmetica et geometria compendiose demonstrantur. Rostock.

Brodren *Peter Lauremberg* citeras af Stjernhjelm i dennes astronomiska funderingar. Peter Lauremberg var astronom, prof. i fysik och matematik i Hamburg. Blef sedan 1624 prof. i poesi i Rostock. Född derstädes år 1585 och död 1639. Har utgifvit åtskilliga astronomiska arbeten.

*** *Alsted, Joh. Henrik*, född 1588, död 1638 i Weissenburg. Var professor i filosofi och teologi först i Herborn i Nassau och sedan i Weissenburg i Siebenbürgen. Har utgifvit:

1. Compendium physices. Herbornæ 1610.
2. Elementale mathematicum (arithmetica, geometria, geodæsia, astronomia, geographia, musica, optice). Francof. 1611.
3. Methodus admirandorum mathematicorum, exhibens universam mathesin. Herbornæ 1613.
4. Systema physicæ harmonicæ. Ib. 1616.
5. Scientiarum omnium encyclopædia septem tomis distincta. Ib. 1630. (Den första större tyska encyklopedi).

D. Trigonometri.

Stjernhjelms första trigonometri är betydligt olika hans senare. I den förra ingå ej andra satser än Eukl. I. 47; II. 12, 13; VI. 8 och Pappi sats, att

$$a^2 + b^2 = 2\left[\frac{c^2}{4} + m^2\right],$$

hvarest a, b, c äro triangelns tre sidor och m den till sidan c hörande midtellinien. Med dessa löser han dock ej mindre än 42 olika problem om trianglar. Inga Sinus, Cosinus o. s. v. förekomma.

I hans senare trigonometri, hvilken finnes intagen i hans algebra suethica har han följt *Pitiscus* *. I denna finnes ännu ingen bokstafsräkning, deremot påträffa vi här för första gången Sinus, Tangens och Secans, hvilka han definierar såsom linier tillhörande en cirkel, hvars radie är 100000. På grund af dessa definitioner och med tillhjelp af en trigonometrisk (ej logaritmisk) tabell lösas medelst en analogi rätvinkliga trianglar. De snedvinkliga beräknas enligt metoder, hvilkas analytiska uttryck numera skulle vara:

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{c}{\operatorname{Sin} C},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{Tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{Tg}\dfrac{A-B}{2}}$$

---

* *Pitiscus, Bartholomæus.* Född 1561 i Schlesien, död 1613 i Heidelberg. Först huslärare i Breslau, senare hofkaplan och sedan 1594 öfverhofpredikant hos kurfursten Fredrik IV i Pfalz. Har utgifvit:

1. Trigonometriæ sive de dimensione triangulorum libri quinque. Edit. III. Francof. 1612. (Den första fullständiga lärobok i trigonometri. Upplagan utkom tillsammans med Schulteti sphæricorum libri III redan 1595).

2. Thesaurus mathematicus sive canon sinuum ad radium 1 00000 00000 00000 a Georgio Joachimico Rhætico supputatus at nunc primum in lucem editus. Ib. 1593.

och

$$\frac{b}{a+c} = \frac{a-c}{b-2c \operatorname{Cos} A},$$

hvilken formel tydligen ej är annat än den vanliga:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A.$$

Dock förekomma ej namnen Cosinus, Cotangent eller Cosecant. Icke heller påträffar man formeln för utveckling af $\operatorname{Sin}(A + B)$.

Bland de Stjernhjelmska handskrifterna finnes äfven en handskrifven trigonometri af professorn i matematik vid Upsala universitet Hedræus. Denna trigonometri skiljer sig från Stjernhjelms senare endast deri, att Hedræus äfven definierar Sin. compl., Tang. compl. och Secans compl. samt nämner något om beräkningen af sinus-tabeller. Alla trianglar lösas utan någon logaritmisk räkning.

E. Archimedes reformatus.

Detta arbete in 4:o om 8 ark, tryckt i Stockholm 1644, är tillegnadt drottning Kristina och har till motto: *Ἀγεωμέτρητος ȣ̓δεὶς εἰσίτω* (d. v. s. ingen ingånge här utan att vara matematiker!). Hans väl skrifna dedikation till drottningen utgör ett loftal öfver mätevisheten (matematiken) och är till större delen aftryckt i Atterboms »svenska siare och skalder». Stjernhjelm sjelf har enligt den tidens bruk i detta sitt arbete blifvit firad medelst latinska lyckönskningsverser af berömda jurister från nordens trenne universitet, nämnligen af juris prof. Loccenius * i Upsala, prof.,

---

* *Loccenius, Joh.* Född 1598 i Holstein, studerade i Hamburg, kom 1618 till Helmstedt, vidare till Rostock och Leyden, der han 1625 blef juris doktor. Kallades samma år af Gustaf Adolf till e. o. prof. i historia i Upsala, blef 1627 ordinarie professor, förflyttades 1634 till den juridiska lärostolen, blef 1648 bibliotekarie och år 1651 rikshistoriegraf. Efter Stjernhjelms död 1672 blef han preses i antiqvitetskollegium. Han afled 1677 80 år gammal och begrofs i Upsala domkyrka. Var en af universitetets största prydnader. Beskrifves såsom en synnerligen from man «candida anima«. Biogr. Lex.

juris utr. doktorn Ludenius i Dorpat och assessorn Johannes Olai Dalek. vid Åbo hofrätt.

Stjernhjelm har här gjort till sin uppgift att angifva beståndsdelarne af en metall-legering, hvars vigt och volym äro kända. Hans första problem är det bekanta om Hieros krona. Han visar här, att man bör för detta ändamål, liksom Archimedes gjorde, i vatten nedsänka den kropp, som skall undersökas, och har derföre kallat detta sitt arbete *den omgestaltade Archimedes*. Han använder 2 metoder.

1. *Den archimediska metoden.*

För att finna den i fråga varande kroppens volym har Stjernhjelm konstruerat ett instrument, bestående af en cylindrisk reservoir, täckt med ett tätt tillsittande lock, från hvars midt utgår ett vertikalt, smalt graderadt, upptill slutet glasrör. Af detta instrument finnes i boken en väl utförd teckning. Vid sina undersökningar fylde Stjernhjelm reservoiren med vatten, stjelpte sedan om instrumentet och inlade metallstycket i reservoiren, sedan han först lösskrufvat bottnen. Efter att åter hafva påskrufvat denna vände han apparaten rätt och bedömde sedan metallstyckets volym af höjden på vattenpelaren i glasröret medelst en vid detta fästad skala. Genom proppar och ventiler hade han ställt så till, att »vattnet fick andrum», d. v. s. att sammanpressad luft kunde komma ut. På detta sätt fann han, att lika vigter af guld, silfver och koppar upptogo respektive 14, 25 och 29 steg * (skaldelar) på hans glasrör. Dessa tal utgöra dock ett medelvärde af hans, *Berneggers* **, *Bo-*

* Dessa tal äro omvändt proportionela mot talen 19, $10{,}_{64}$ och $9{,}_{1}$ eller dessa metallers egentliga vigter.

** *Bernegger, Matthias*, professor i historia och vältalighet vid universitetet i Strassburg. Född 1582 i Hallstadt i Österrike, död 1640 i Strassburg. Har utgifvit:

1. Manuale mathematicum, darin begriffen die tabulæ sinuum, tangentium, secantium. Strassburg 1619.
2. Annotazioni sopra l'trattato del instrumento delle proporzioni del sign. Galileo Galilei. Bologna 1656.

Bernegger öfversatte detta jemte andra verk af Galilei på latin.

dini, *Anders Bures* *, *Adriani Metii* **, *Herigon's* och *Villalpandi* *** sins emellan temligen öfverensstämmande funna värden på förhållandet mellan volymerna af lika vigter af dessa metaller.

Ex. »Jag hafver ett slag af silfvermynt, det jag intet känner, och vill gerna veta, hvad det håller i korn, sän-

---

* För «generalmatematikern« *Anders Bure* ha vi redogjort på sid. 7 i denna årgång. Vi se här, att vi till hans öfriga framstående egenskaper äfven kunna lägga den, att han var fysiker. Genom bibliotekarien Styffe i Upsala ha vi äfven fått reda på, att han för Stockholm konstruerat en vattenledning, hvilken skulle börja vid Norrström och utmynna i ett hus nära slussen på Vesterlånggatan. Vid tillfällen, då ingen ström var, skulle vattnet fortskaffas genom en vid Norrbro uppförd apparat, som drefs med hästkraft. Äfven för Jönköpings stad lär han ha konstruerat en vattenledning.

** *Metius*, *Adriaan*. (Hette egentligen Adr. Adrianszoon. Metius var endast ett öknamn, som han erhöll som student, hvilket han sedan bibehöll. Detta namn öfverflyttades sedan, märkvärdigt nog, på fadren, Adriaan Antoniszoon, upphofsmannen till förkållandet $\frac{355}{113}$ för talet π och verksam deltagare i nederländska befrielsekriget). Adrian Metius d. y., född 1571 i Alkmaar, studerade under Tycho Brahe, gaf sedan sjelf mycket besökta lektioner i astronomi, blef medecine doktor, derefter prof. i matematik och medicin vid universitetet i Franeker (series professorum Franequeranorum). Dog 1635 i Franeker. Har utgifvit:

1. Doctrinæ sphericæ libri V. Francof. 1591.
2. Astronomiæ universæ institutiones. Ib. 1605.
3. De gemino usu utriusque globi. Ib. 1611.
4. Geometrices per usum circini nova praxis. Amst. 1623.
5. Problemata astronomica. 1625.
6. Astrolabium. 1626.
7. Primum mobile astronomiæ. Amst. 1631.
8. Opera arithmetica et geometrica. Lugd. Batav. 1625.
9. Opera astronomica. Amst. 1633. Poggendorff.

*** *Villalpando*, *J. Baptiste*, lärd spanior, född i Cordova 1552, död 1608 i Rom. Antagen vid 26 års ålder i jesuiterkollegiet, skicklig tecknare, matematiker och arkitekt, fick af Filip II i uppdrag att jämnte Pedro efter Hezekiel konstruera hans profetior. Resultatet blef följande af Stjernhjelm ofta citerade arbete:

In Ezechielem explanationes et apparatus urbis ac templi hierosolymitani. Romæ 1596—1606. Detta verk hann han ej afsluta.

Dessutom har han utgifvit: Tractatus in epistolas Pauli.

ker det derföre och finner, att 4 lod drifva vattnet till 68 steg i röret, der dock det finaste silfver icke drifver vattnet högre än till 64 steg. Fyra lod ren koppar deremot drifva vattnet till 74 steg (ty 64 är till 74 i det närmaste som 25 till 29).»

Stjernhjelm uträknar detta exempel medelst den egendomliga alligationsräkningen (se 1:a årgången under Clavius) sålunda:

$$\text{Medelvärdet } 68 < \begin{array}{c} \text{Silfver.} \\ 64 \\ 74 \\ \text{Koppar.} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Skilnader från medelv.} \\ 6 \\ 4 \\ \hline \text{S:a } 10. \end{array} \quad \textit{Anm.} \quad \begin{array}{l} 74 - 68 = 6, \\ 68 - 64 = 4. \end{array}$$

Derefter bildar han analogierna:

10 delar af blandningen gifva 16 lod, hvad gifva 6 delar silfver? Svar: 9 lod $10\frac{4}{5}$ grän silfver.

10 delar af blandningen gifva 16 lod, hvad gifva 4 delar koppar? Svar: 6 lod $7\frac{1}{5}$ grän koppar.

Anm. 1. Här gå 18 grän på 1 lod. Stj. anmärker, att guldet i afseende på finheten i korn indelas i 24 karat à 12 grän = 288 grän, och silfret i afseende på finheten i korn indelas i 16 lod à 18 grän = 288 grän. Deraf, att antalet grän i båda fallen skall blifva 288, förklaras det olika antalet grän, som gå på 1 karat och på 1 lod.

Anm. 2. Om x = antalet lod silfver i myntet på 16 lod, och således $16 - x$ = antalet lod koppar i samma mynt, leder ofvanstående problem till eqvationen:

$$64x + 74(16 - x) = 16 \,.\, 68,$$

hvaraf

$$x = \frac{74 - 68}{74 - 64} \cdot 16 = \frac{6}{10} \cdot 16,$$

hvilket är alldeles samma räknemetod, som den Stjernhj. begagnat. Stj. begagnar vid flere exempel äfven algebran i st. f. alligationsräkningen.

2. *Den galileiska metoden.*

Denna metod grundar sig på Galilei * sats, att »när en ting och ehvad som helst det är väger och röres, så går så mycket af (d. v. s. förloras), som det undanvikande medlets, deruti det väger och röres, storlekstyngd är i sig

* *Galileo Galilei*, född i Pisa 1564, uppfostrades i Florens, visade tidigt fallenhet för mekaniken, kom vid 17 års ålder till universitetet i Pisa. Då han der i katedralen såg en lampa svänga för vinden, gjorde han upptäckten om liktidigheten af små och stora svängningar hos pendeln. I matematiken studerade han i synnerhet Arkimedes, korresponderade tidigt med Clavius, blef år 1589 anstäld som lärare i matematik vid universitetet i Pisa. Lärde då lagarne för kroppars fall (25 år gml). 1592 erhöll han en matematisk lärostol i Padua. Författade här en afhandling om befästningar, om gnomoniken, om klotet och en mekanik (der principen om virtuela hastigheterna lägges som grundval för läran om kroppars jemnvigt). Här konstruerade han en lufttermometer, der temperaturen visades af en liten rörlig vätskepelare. Dock hade han ej några konstanta punkter. Konstruerade år 1594 en hydraulisk maskin och en proportional-cirkel för ingeniörer. År 1609 gjorde Galilei en resa till Venedig, under hvilken efter en natts reflektioner han upptäckte teleskopet, en upptäckt, som framkallade en oerhörd hänförelse. Vid slutet af samma år utgaf Galilei ett arbete, der han redogjorde för månbergen och andra astronomiska märkvärdigheter. I Jan. 1610 upptäckte han Jupiters 4 månar och bestämde deras omloppstider. Blef i Juli månad samma år förste matematiker och filosof hos storhertigen af Toscana, till stor harm för venetianerna, hvilka ville behålla honom qvar. Också blef denna förflyttning för Galilei en källa till hans kommande olyckor. Sept. 1610 upptäckte han faserna hos Venus. Om Saturnus trodde han att han var sammansatt af 3 kroppar. Äfven solfläckarne upptäckte han. Han blef invald i Rom i ett framstående vetenskapligt samfund (Lincei). År 1612 uppfann han mikroskopet. Samma år utgaf han «en undersökning om ting, som simma på eller röra sig i vattnet«. I detta arbete har han bevisat hufvudteoremen i hydrostatiken. År 1613 utgaf han sitt arbete om solfläckarne, hvarigenom han visar solens rörelse kring sin axel. Teorien för jordens rörelse inprentade han flitigt hos sina lärjungar. Denna lära förargade allt mer de heliga fäderna. Fader Caccini predikade offentligen i Florens mot denne store astronom och började en predikan, hvars ämne var att bevisa det geometrien var en djefvulens konst och att matematici borde bannlysas ur alla stater, såsom upphofsmän till alla kätterier, med dessa ord ur Apost.Gern. kap. 1: «I galileiske män, hvi stån I och sen upp i himmelen?« På dessa

sjelf» *. På grund af denna lag fann Stj. guldets, silfrets och kopparens vigt i jemförelse med friskt vatten vara re-

---

anfall svarade Galilei bland annat i ett bref till storhertiginnan Kristina i Toscana år 1615, ett bref, som anses såsom ett mästerstycke i teologisk dialektik. År 1616 blefvo i Rom alla arbeten, som predikade jordens rörelse af kongregationen Index bannlysta, hvarigenom äfven Copernici arbeten blefvo förbjudna. Samma år utgaf han satser angående longitudsbestämning till sjös medelst Jupiters månar. År 1618 utkom en afhandling om detta årets tre kometer, hvarest en inflytelserik jesuit, fader Grassi, kriticerades, derföre att han i sitt astronomiska arbete ej nämnt Galilei. Grassi, som tillskref Galilei denna afhandlings upphof, angrep Galilei, hvarpå Galilei svarade i en skrift, kallad Saggiatore, en afhandling om kometernas natur. År 1632 utgaf Galilei i Florens ett arbete: «samtal angående de två stora verldssystemen« (Ptolemei och Copernici), der han visar orättvisan af fördömelsen af Copernici arbeten, och hvarest han på det mest genialiska sätt ådagalägger jordens rörelse. Påfven Urban VIII tillsatte en kommission för att afgöra om detta arbete vore fördömligt eller ej, och trots det att storhertigen i Toscana lade sig ut för honom, måste den åldrige sjuke Galilei på vintern 1632—3 begifva sig till Rom och inställa sig för inqvisitionen. I april 1633 blef han satt i fängelse, hvarest han stadnade i 14 dagar och der undergick ett inqvisitoriskt förhör. Den 20 Juni blef han återförd till inqvisitionen, för att höra domen, som proskriberade hans bok och dömde författaren till fortfarande fängelse. På samma gång tvingades han att afsvärja sina villomeningar och att på knä lofva att aldrig mera tala eller skrifva om jordens rörelse, såsom varande «en falsk, orimlig, kättersk och emot skriften stridande lära.« Berättelsen, att Galilei vid detta tillfälle skulle utropat: «och ändock rör hon sig«, har astronomen Heis i Broschüren Verein N:o 5. Cöln visat vara ogrundad. Genom storhertigens beskydd inskränktes dock snart detta fängelse till en förvisning till Trinita dei Monti's trädgård, hvarifrån han kort derefter tilläts resa till Sienne. Under sin 5 månaders vistelse här skref han om fasta kroppars motstånd. Hans begäran att få återbesöka Florens nekades honom, utan måste han hålla sig på ett landtställe Arcetri i närheten af Florens. Fastän han här blef blind 1637, upphörde han ej att författa och bilda lärjungar. Här undervisade han sina sedermera så framstående elever Viviani och Toricelli. Han tilläts ej att trycka något af hvad han här skref (t. ex. hans berömda matematiska samtal och bevis). Han dog d. 8 Jan. 1642. — Då Kepler fick höra fadren Caccini's angrepp emot Galilei och hans anhängare, utropade han med kejsar Julianus: «du har segrat galilé.«

Se Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1841.

* Denna sats är ej annat än sats 7 i *Arkimedes'* afhandling om kroppar, som röras på eller i en vätska. Detta synes antyda, att Stjern-

spektive 19, $10\frac{1}{3}$ och 9, tal som temligen nära öfverensstämma med nutidens. Äfven för denna metod har Stjernhjelm konstruerat apparater, hvaraf vackra teckningar med gyllene kedjor och kronor förekomma i Archimedes reformatus. Om vattnets olika vigt vid olika temperaturer har Stj. ingen kännedom.

Här böra vi ej underlåta att nämna de noggranna bestämningar (så uttrycker sig Stjernhjelm), som han gjort angående åtskilliga ämnens egentliga vigt. (Uppgifterna äro hemtade ur en bland handskrifterna till hans linea carolina). Hans tal äro följande:

	Guld.	Bly.	Silfver.	Koppar.	Jern.	Silfvermalm.
Egentlig vigt.	19.	11,36.	10,50.	8,75–8,36.	7,45–7,1.	7.

	Tenn.	Kexholms rubin och Fürsten.	Svensk demant.	Sten och Korall.
Egentlig vigt.	6,38.	4,1.	2,68.	2,65.

	Smält glas, hvit kisel och stenar vid sjön.	Kristall och glas.	Flinta.	Alabaster.	Elfenben.	Gult vax.
Eg. vigt.	2,64.	2,62.	2,58.	2,35.	1,75.	0.

Dessa tal sammanfalla temligen nära med de nu för tiden antagna. Se t. ex. Wackerbarths tabeller. Der har

---

hjelm ej studerat Arkimedes. Som bekant, finnes numera en väl redigerad upplaga af Arkimedes, utgifven af Peirard i Paris 1807. Detta arbete innehåller:

1. Om klotet och cylindern. (Här visas för första gången, att klotets yta och rymd äro $\frac{2}{3}$ af den omskrifna cylinderns yta och rymd).
2. Om måttet på cirkeln. (Talet π säger Arkimedes ligga emellan $\frac{10}{70}$ och $\frac{10}{71}$).
3. Om konoider och sferoider.
4. Om spiraler.
5. Om plans jemnvigt. (Här förekommer läran om häfstången, som föranledde honom till yttrandet: «gif mig en fast punkt, så skall jag röra hela jorden«).
6. Om parabelns qvadratur.
7. Om sandkornens mängd. Här gör han en minimibestämning angående solens afstånd till jorden.
8. Om kroppar som röras på eller i en vätska.

Dessutom förekommer här en af Peirard skrifven afhandling om brännspeglar.

man för	guld,	bly,	silfver,	koppar,	jern,	tenn	och glas
talen	19,36.	11,35.	10,57.	8,85.	7,79–7,21.	7,29.	2,66.

Denna Stjernhjelms praktiska förmåga att göra noggranna iakttagelser är verkligen förundransvärd.

F. Om mått och vigt och om linea carolina.

Genom sina åtgöranden i afseende på Sveriges mått och vigter har Stjernhjelm gjort epok. Hans förtjenster bestå deri, att han

1. satt längd- och rymdmått i beroende af hvarandra,
2. » rymd- och vigtmått i beroende af hvarandra,
3. dervid tillämpat 10-indelningen, samt
4. låtit förfärdiga af messing en likare med väl utförda skalor, hvilken ännu finnes antingen i Generallandtmäterikontoret eller på Vetenskapsakademien.

Dessa skalor hafva följande öfverskrift: »Linea carolina hydro-metro-statica omnium corporum ponderum et mensura communis inventa et dedicata, Ser:mo Regi Suethiæ Carolo Gustavo à Georgio Stjernhjelm, Anno 1657. Bland andra på denna lineal befintliga skalor är äfven romerska foten eller Stockholmsfoten. Då Wallmark 1854 i K. General-landtmäterikontoret uppmätte den med Vetenskapsakademiens normaletalong, fann han båda lika inom 0,0001 fot. (Se Öfversigt af Vetenskapsakad. förhandl. år 1854). Deraf sluta vi, att svenska fotmåttet varit oförändradt allt sedan Stjernhjelms tid.

Stjernhjelm indelade foten på följande sätt:

1 Stockholmsfot = 10 tummar = 100 linier = 1000 punkter.

Af denna fot äfvensom af hans linea carolina (för mätning af linier, cirklar och klot) finnas afbildningar i naturlig storlek på hans kopparstickstabell: *mensuræ regni suethiæ*. Stockholm 1664. På denna tafla har han följande indelningar.

Rymdmått för våta varor.*

$\frac{1}{48}$ tunna = $\frac{1}{12}$ fjerding = $\frac{1}{6}$ ätting = 1 kanna = 2 stop = 8 qvarter = 32 ort (quartulæ) = 48 sextulæ = 64 ortulæ = 96 bäker (cyathi) = 192 skedar = rymden af 8 romerska ℔ vatten = rymden af 100 Stockholms unciæ vatten = rymden af 55296 gran friskt vatten = kuben på 0,465 Stockholms fot. *Anm.* $(0{,}465)^3 = 0{,}1$ i det närmaste.

Rymdmått för torra varor.

$\frac{1}{56}$ måltunna = $\frac{1}{28}$ spann = $\frac{1}{7}$ fjerding = $\frac{4}{7}$ kappe = 1 kanna = rymden af 55296 gran friskt vatten.

Vidare har han följande indelningar på samma tafla:

Rymdmått efter 10-indelning.

1 Amphora (ämbar) = 10 kannor = 100 römer (quintarii) = 1000 kubik-zoll (modioli eller måtlen) = 10000 örtlen (minuta) = rymden af 1000 Stockholms unciæ = rymden af 552960 gran vatten = kuben på 1 Stockholms fot.

Vigtmått.

1 ℔ Stockh. = 8848 ass (grana) = 16 unciæ = 32 lod = vigten af 16 kubiktum friskt vatten.

Bland dessa mått anse vi böra framhållas 1 uns = vigten af 1 kubiktum friskt vatten.

Anm. Enligt Archimedes reformatus är
1 svenskt ℔ myntvigt = 8768 ass,
1 svenskt ℔ större vigt = 8750,6 ass,
1 svenskt ℔ mindre vigt = 8648,56 ass.

---

* I Wallmarks afhandling: Bidrag till svenska fotens, kannans och skålpundets historia (Öfvers. af K. Wetenskapsakademiens förhandl. för år 1854) omtalas att i Wetenskapsakademiens samlingar finnas följande 5 målkärl af Stjernhjelm: 1. 1 kanna (cantharus), 2. 1 Stockholms qvarter, 3. 1 Stockholms quartarius (25 lod vatten), 4. 1 Quintal (Römer), 5. 1 sextarius romanus.

Anm. Ett ytterligare bidrag till uppfattning af Stjernhjelms betydelse såsom ordnare af rikets mått och vigt lemnar *Hill* i sin uppsats Rydaholmsalnen och dess likare i Nordisk Universitetstidskrift för år 1856.

Häraf visar sig, att Stjernhjelm höjt skålpundet från 8768 ass till 8848 eller i förhållandet 548 till 553. Indelningen af skålpundet i 8848 ass fortfor ända till 1855.

Som 1 kubikfot vatten vid + 4° väger 61,522 ℔ (nuvarande vigt), så böra tydligen 61,522 ℔ nuvarande vigt vara lika med $\frac{552960}{8848}$ Stjernhjelms ℔, och således 1

$$\text{Stjernhjelms ℔} = \frac{61{,}522 \, . \, 8848}{552960} \text{ ℔ nuvarande vigt} = 0{,}9844$$

℔ nuvarande vigt. Stj:ms ℔ är således mindre än vårt nu varande, så vida Stjernhjelms bestämning af vattnets vigt varit lika med vår nu varande. Att vattnet har olika vigt vid olika temperaturer, derom tyckes Stj. ej ha någon kunskap. Emellertid synas hans bestämningar ha skett vid omkring 6° temperatur, enär han säger, att vattnet skall vara friskt.

Linea carolina.

I en på kongl. biblioteket befintlig handskrift med titel: Archimedes practicus per lineam carolinam, Stockholm 1669 $\frac{27}{4}$ (tydligen ämnad för tryckning) definierar Stjernhjelm sin linea carolina sålunda:

»*Linea carolina brevissima* (d. v. s. tiondedelen af karlsstafven) är sidan till en kub, som jag skulle vilja kalla millena, emedan den rymmer 1000 droppar friskt vatten, hvilka väga 1000 gran (ass).

Linea carolina tota (d. v. s. hela karlsstafven) är 10 gånger så stor som den förra och lika med sidan i en kub, som rymmer friskt vatten till en vigt af 1 million gran (ass).»

Som storleken af en vattendroppe är något obestämdt, är det egentligen genom vigten af vattnet i kuben och ej genom antalet droppar, som linea carolina blir definierad. Stjernhjelm valde till enhetsvigt ett gran, emedan detta på den tiden var ett för hela Europa (med undantag af Frankrike) gemensamt mått, kalladt (holländskt) ass. De franska assen voro = $1\frac{1}{9}$ gånger den holländska. Dessutom var 1 ass = 1 romerskt gramm = $\frac{1}{72}$ af 1 attisk-romersk drakma. Genom att antaga detta mått som vigtsenhet, ansåg sig Stjernhjelm ha valt ett mått, som förenade forntid och nutid och tillika hade egenskapen att vara universelt.

Den lagliga romerska kubikfoten eller amphoran (också kallad quadrantal, emedan den hade kubisk form) rymde 80 romerska ℔ vatten = 80 . 12 unciæ = 80 . 12 . 576 = 552960 gran (ass) vatten.

Dess sida = den kapitolinska foten (så kallad deraf, att den var upphängd på kapitolium) är följaktligen $= \sqrt[3]{\frac{552964}{1000000}}$ af linea carol. = 0,821 af linea carolina.

Nu skall enligt ett påbud af Gustaf II Adolf Stockholmsfoten vara densamma som den romerska foten, således 1 Stockholmsfot = 0,821 af linea carolina.

Följaktligen är Linea carolina (tota) = $\frac{1000}{821}$ fot = 1,22 fot.

Linea carolina indelade han sålunda:

1 linea carolina = 10 decinæ = 100 lineæ = 1000 puncta eller scrupula.

Stjernhjelms linea carolina var af 3 slag, nämnligen:

N:o 1. för att mäta längder,

N:o 2. för att mäta cirkelytor,

N:o 3. för att mäta klotrymder.

Dessas längder förhöllo sig till hvarandra som

$$1 : \frac{2}{\sqrt{\pi}} : \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1 : 1{,}13 : 1{,}24.$$

Mätte man t. ex. diametern i en cirkel medelst linea carolina n:o 2 och fann den vara a lineæ carol. n:o 2, så visste man genast, att cirkelytan rymde a^2 qvadrat lineæ carol. af n:o 1. Ty cirkelytan är $= \pi \frac{a^2}{4}$ af n:o 2 = $\frac{\pi a^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2$ af n:o 1 = a^2 af n:o 1.

På samma sätt, om man uppmätte diametern af ett klot med linea carolina n:o 3 och fann den vara a lin. carol. n:o 3, så visste man genast att klotets rymd var $= a^3$ kubiklineæ carol. n:o 1. Ty klotrymden $= \pi . \frac{a^3}{6}$ af n:o 3 $= \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{6}{\pi}$ af n:o 1 $= a^3$ kubik-lineæ carol. af n:o 1.

Af allt hvad Stjernhjelm skrifvit i matematik, äro hans undersökningar i mått och vigt det, som mest väcker läsarens beundran. Här kritiserar han den närmast förflutna tidens utmärktaste vetenskapsmän, t. ex. Snellius* och Marianus**.

---

* *Snell de Royen, Willebrod*, geometer, son af Rami lärjunge Rudolf Snell. W. Snell föddes år 1591 i Leyden, der han dog år 1626. Studiet af matematiken upptog hans korta tillvaro. Han studerade med sådan passion, att han vid 17 års ålder försökte återställa Apollonii förlorade afhandling de sectione determinata och att han vid 19 års ålder kunde förklara de första böckerna af Ptolemæi Almagest. Sedan genomreste han Frankrike och Tyskland och afhörde Tycho Brahe och Kepler. År 1613 efterträdde han sin fader på professorsstolen i Leyden. Brådmogen svaghet förde honom till grafven vid 35 års ålder. Två upptäckter hafva gjort honom namnkunnig: han fann lagen för ljusets brytning, och han bestämde först jordens storlek genom geometrisk och astronomisk mätning af en meridiangrad. De operationer, som han i sistnämnda hänseende företog mellan städerna Alkmaer och Bergen-op-zoom ha saknat noggrannhet, men detta berodde på instrumenten. Har utgifvit:

1. De re numaria. Antverpen 1613.
2. Eratosthenes batavus, sive de terræ ambitus vera quantitate. Leyden 1617. (Ett hufvudarbete för lärde).
3. Descriptio cometæ novembris 1618. Leyden 1619.
4. Cyclometricus seu de circuli dimensione. Ib. 1621.
5. De cursu navium et re navali. Ib. 1624.
6. Doctrinæ triangulorum canonicæ libri IV. Ib. 1627.

Han har offentliggjort Observationes Hassaicæ (Leyde 1618), d. v. s. observationer af landtgrefven af Hessen, Regiomontanus och Walter. Han har från flamländska språken till det latinska öfverflyttat Stevins och van Keulen's arbeten.

** *Mariana* (Jean), ryktbar spansk historiker och teolog född i Talavera 1536, död i Toledo 1623. År 1599 utgaf han ett arbete mot monarkien (de rege et regis institutione), en afhandling som efter Henrik

Här visar han en förvånande beläsenhet t. ex. af Pæti*, Diodori, Villalpandi, Gronovii, Cenalis' med fleres arbeten. Här ådagalägger han en hög grad af skarpsinnighet vid att jemföra europeiska och asiatiska samtids och forntids mått- och vigtförhållanden.

En stor del af Stjernhjelms åtgöranden för svenska mått och vigter fingo kongl. stadfästelse genom »kongl. majestäts placat om mått och vigt» af år 1665, undertecknadt af Hedvig Eleonora.

Penningräkning.

För att kunna sins emellan jemnföra olika slag af mynt äfvensom för att få begrepp om stora penningsummor, ville Stjernhjelm införa ett för hela verlden gemensamt silfvermynt, som han benämnde *dalerus imperialis* (riksdaler). Dess bredd skulle vara 1 funis = $\frac{1}{7}$ fot och dess höjd 1 strues = $\frac{1}{120}$ fot. De härmed i sammanhang stående måtten fattas af följande likhet:

1 svensk mil = 60 stadier = 360 plethra (vårt nuvarande ref) = 36000 fot = 252000 funes = 30240000 strues.

IV:s lönnmord 1610 blef dömd till bålet. Hans afhandlingar om odödligheten och dödligheten samt om rikets mynt ådrogo honom först fängelse i ett kloster i Madrid och sedan en ansenlig plikt. Han har skrifvit ett stort arbete öfver Spaniens historia.

* *Pætus* (Luc), en lärd romare väl förfaren i antiqviteter och lagkunskap, dog i Rom 1581 vid 69 års ålder. Har bland annat skrifvit: de mensuris et ponderibus romanis et græcis.

Diodorus, sicilianare, ryktbar grekisk historieskrifvare, lefde år 50 f. Kr. Han föddes i Agyra. 30 år använde han på sin historia, hade sjelf besökt flertalet af de ställen han beskref. Af hans historia i 40 böcker äro endast 15 i behåll.

Gronovius (Johan Fredrik), ryktbar tysk filolog, född 1611 i Hamburg, död i Leyden 1671. Studerade juridik i Altorf, kom sedan till Holland, der han knöt förbindelse med Salmasius och Heinsius, bekanta med Stjernhjelm sedan deras samtida vistelse vid drottning Kristinas hof. Gronovius har bland annat utgifvit de sestertiis, 1643, hvilket arbete skarpt angreps af Salmasius.

Ex. 1. 100000 daler (= 1 tunna guld) intaga lagda bredvid hvarandra en längd af 143 plethra minus 1 daler.

Ex. 2. 1000000 daler intaga lagda bredvid hvarandra en längd af 3 mil 334 plethra.

Ex. 3. Tacitus skrifver i sin historias andra bok om kejsar Vitellius, att han på några få månader hade förslösat 225 000 000 romerska denarier. Detta gör 28 125 000 rdr. Dessa lagda bredvid hvarandra upptaga en längd af 111,6 mil. Lagda i en hög på hvarandra upptaga de något öfver 0,9 sv. mil. De skulle kunna betäcka en yta af 10 tunnland och 14 kannland. Deras sammanlagda rymd utgör 8,85 stockholmska kubikfot. »Det var en väldig gurgel, som kunde sluka en sådan silfverklump på så få dagar.» Detta är dock intet emot kejsar Caligula, som förslösade 3 gånger så mycket eller 84 375 000 rdr. Denna summa väger 18750 skeppund silfver.

»Kan frågas, hvilkendera gjorde värre eller bättre: Tiberius, som en sådan penningedrässel af mång mans svett och blod utdestillerade och sedan ingen till nytta sammanmuggade, eller Caligula, som på så kort tid med mång mans lust och förnöjelse gjorde så många fångar löse, gjorde staden och hela landet ymnigt af penningar och uppfylde mång fattig bofs toma torftiga taska.»

Ex. 4. I första krönikeboken (22 kap. 14 vers.) säger konung David: »Si jag hafver i min *fattigdom* förskaffat till herrans hus 100 000 centner guld och 1000 gånger 1000 centner silfver, dertill jern och koppar utan tal.» Detta gör 1 500 000 000 riksdaler, hvilka lagda bredvid hvarandra intaga en längd af 5958 mil eller 2358 mil mer än jordens omkrets. Lagda på hvarandra bilda de en stapel af $357\frac{2}{9}$ sv. mil i höjd. De betäcka en yta af 546 tunnland, intaga en rymd af 255 102 kubikfot eller en kub med $63\frac{1}{2}$ fots sida.

(Forts.).

Satser *.

1.

För elever i elementarläroverkens 4:de klass (latinlinien) eller 3:dje klass reallinien.

150. Bevisa förra delen af Eukl. I. V. (vinklarne vid basen i en likbent triangel äro lika stora) utan att förlänga de lika stora benen nedanför basen.

151. Om vid förlängning af en triangels 2 sidor nedanför basen, vinklarne nedanför basen blifva lika stora, så är triangeln likbent.

Bevisa denna sats utan att använda någon sats efter Eukl. I. VI.

152. Bevisa, att i Eukl. I. 22 cirklarne måste skära hvarandra.

153. Bevisa det fall af Eukl. I. 24, då den ene triangeln innesluter den andre, på ett sätt analogt med beviset för det fall, då den ene triangelns bas skär den andres sida.

154. Visa, att en cirkels yta är mindre än 4 qvadrater på radien.

2.

För elever i 5:te klassens latinlinie eller 4:de klassens reallinie.

155. Visa, att det stundom är möjligt att från 2 punkter på en triangels bas draga räta linier till en punkt in i triangeln så, att dessa dragna sidor tillsammantagna blifva större än triangelns båda öfriga sidor. (Svårt.)

156. En triangels 3 sidor äro:

α) 1, 2, 3 fot;
β) 2, 3, 4 »;
γ) 3, 4, 5 »;
δ) 4, 5, 6 ».

* Lösningarne å dessa satser insändas till lektor F. W. Hultman. Adressen är Warberg till den 20 Aug. detta år, derefter Stockholm.

Visa med tillhjelp af Euklides' första och andra böcker, hvilken af dessa trianglar är spetsvinklig, hvilken trubbvinklig, samt af hvad natur den fjerde är.

157. Bevisa Eukl. II. 14 med tillhjelp af II. 6 utan att använda II. 5.

158. Bevisa Eukl. II. 12 och 13 genom att på sidorna upprita qvadraterna utan att använda Eukl. II. 4 och 7.

3.

För 6:te klassens latinlinie eller 5:te klassens reallinie.

159. Bevisa att en cirkels periferi är mer än 3 men mindre än 4 diametrar till cirkeln.

160. Upprita en triangel, der vinklarne förhålla sig till hvarandra, som talen

α) 1 : 2 : 3;
β) 2 : 3 : 4;
γ) 3 : 4 : 5;
δ) 4 : 5 : 6;

Anm. En af dessa uppgifter kan ej lösas med elementargeometrien, d. v. s. här med Eukl. 4:e bok. Meningen är blott att få detta angifvet jämte skälet hvarför.

161. Visa att i fig. till Eukl. IV. 10 Strömer's upplaga de båda cirklarne skära hvarandra så, att af den större cirkeln blir afskuret $\frac{1}{10}$ af dennes periferi och af den mindre $\frac{1}{5}$ af dennes.

162. Hvad är klockan, när tim- och minutvisare bilda med hvarandra en vinkel lika stor med vinkeln i en regelbunden 15-hörning?

163. En trädgårdsmästare reste mellan Upsala och Stockholm. Vid hvarje grind gaf han åt den, som öppnade, hälften af det antal äpplen han gaf vid föregående grind och dessutom $\frac{1}{2}$ äpple. Vid sista grinden gaf han 1 äpple. Huru många gaf han då vid den första?

(K. E. Broman, Stud. Ner. 1869).

4.

För 7:de klassens latinlinie eller 6:te klassens reallinie.

164. Bevisa satserna 4—7 i Euklides' sjette bok analogt med motsvarande satser för trianglars kongruens genom att lägga den ene triangeln på den andra. (LINDMAN).

165. Hvarföre äro ej tal qvadratiska, då deras siffersumma reducerad till en siffra är någon annan än 1, 4, 7 eller 9 (= 0)?

166. Hvarföre är ett tal delbart med 2, 4, 8, 16 o. s. v., allteftersom den sista, de 2 sista, de 3 sista, de 4 sista o. s. v. siffrorna bilda ett med 2, 4, 8, 16 o. s. v. delbart tal?

167. Hvarföre är ett tal delbart med 5, 25, 125, o. s. v., allteftersom den sista, de 2 sista, de 3 sista o. s. v. siffrorna bilda ett med 5, 25, 125, o. s. v. delbart tal?

168. En rät linie kan ej skära ett cirkelsegment så, att en del af segmentet blir likformig med det hela.

169. Att upprita ett cirkelsegment likformigt med ett gifvet, då man känner

α) basen till det begärda segmentet,

β) höjden » » » .

170. Att upprita ett cirkelsegment likformigt med ett gifvet och $\frac{1}{n}$ af detta.

171. Att i en gifven halfcirkel inskrifva en annan gifven halfcirkel så, att

α) diametrarne falla utefter hvarandra;

β) den mindres periferi tangerar den störres diameter.

172. Att i en gifven cirkelqvadrant inskrifva en halfcirkel så, att dess diameter blir en korda i qvadranten. I hvad förhållande står ytan af halfcirkeln till ytan af qvadranten?

173. Att i en gifven sektor inskrifva en halfcirkel så, att dess diameter blir korda i sektorn.

174. Två koncentriska cirklar äro gifna; att upprita en liksidig triangel sålunda, att en vinkelspets faller på hvardera periferien och den tredje på den gemensamma diametern, då man känner

α) den liksidiga triangelns sida,

β) den punkt på diametern, hvari triangelns ena spets skall falla,

γ) den punkt på den yttre periferien, ... ,

δ) . . . . inre . . . .

Anm. Satserna 168—174 äro af stud. A. E. HELLGREN. (1868 April.)

7:de klassens reallinie.

175. Förenkla uttrycket

$$\frac{a + bi}{b - ai}.$$

Anm. i = den imaginära enheten.

176. En båt skall sätta öfver en flod. I hvilken vinkel måste han ro för att komma vinkelrätt öfver strömmen, då strömmens hastighet är 5 fot och båtens 8 fot?

177. I en triangel äro 2 sidor 1 och $\frac{1}{4}$ respektive. Vinkeln, som står emot den mindre sidan är $= 30^{\circ}$. Beräkna triangelns öfriga sida, vinklar och yta!

178. Lös eqvationen

$$\operatorname{Cos} x + \operatorname{Cot} x = 1.$$

179. Huru mycket rymmer en

α) tetraëder,

β) oktaëder,

γ) kub,

δ) dodekaëder, (Svårt.)

ε) ikosaëder (Svårt.)

med a fots sida?

180. Huru löses lättast eqvationen

$$\left(\frac{x - a}{x + b}\right)^3 = \frac{x - 2a - b}{x + 2b + a}?$$

181. Bestäm sidor och vinklar i de trianglar, som uppkomma, om man i en gifven triangel sammanbinder midtpunkterna af sidorna;

182. . . . fotpunkterna af de inre bissektriserna;

183. . . . fotpunkterna af de yttre . . . . ;

184. . . . . en inre och 2 yttre . ;

185. . . . . en yttre och 2 inre . ;

186. . . . . höjderna;

187. . . . tangeringspunkterna för den inskrifna cirkeln;

188. . . . . en af de utanför inskrifna cirklarne.

Anm. Satserna 180—8 äro af E. M. FRYKBERG.

189. Kan en parallelt afstympad rät kons cylindriska medelpunkt någonsin sammanfalla med den stympade konens tyngdpunkt?

Anm. Cylindrisk medelpunkt för en med basen parallelt afstympad rät kon = medelpunkten för den cirkelperiferi af en genomskärning af konen, som är = bottenytan af en cylinder af lika höjd och kubikinnehåll med den stympade konen.

190. Uppgif en formel för beräkningen af en stympad kon, när dess toppdiameter, höjd och vidgningskoefficient äro gifna.

Anm. Vidgningskoefficient för en stympnd rät kon = tangenten för vinkeln mellan den stympade konens sida och höjd.

191. Angif en stympad kons kubikinnehåll i kubikfot genom en praktisk formel, grundad på kedjebråksförkortning och noggrann inom gränsen af kfot på 1000, då vidgningskoefficienten, toppdiametern och höjden äro gifna.

Specialfall.	Vidgningskoefficient,	toppdiameter i duodecimaltum,	höjd.
	$\frac{1}{40}$	4	6.
	$\frac{1}{60}$	5	20.

192. Bestäm förhållandet emellan en stympad rät kon af en gifven vidgdingskoefficient och en cylinder af lika

höjd med konen, men med en diameter = diametern i cirkeln genom midten af konens höjd.

193. Huru många lika stora cirklar af 4 tums diameter kunna rymmas i en qvadrat af 1 fots sida?

194. Praktisk tillämpning af uppgifterna 189—193. Frågas lastrymden af 15000 stockar, 24 fot långa med 5 tums diameter i toppändan och vidgningskoefficient $\frac{1}{44}$, då stockarne läggas utmed hvarandra i en s. k. bunke, topp vid rot och rot vid topp?

Satserna 189—194* äro af C. Y. N. SVENSON.

195. I Bergii elementarkurs i algebra (sid. 204) finnes ett problem af följande lydelse: att finna ytan af en fyrsiding, hvars sidor äro i ordning a, b, c, d fot, då de motstående vinklarne äro lika stora; med svar:

$$y = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{ab + cd}{ab - cd} \cdot \sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d)}.$$

Huru kan man förklara att detta svar är matematiskt rigtigt, men i praktiken alldeles oanvändbart?

E. O. JANZÉN,
elev vid Norrköpings tekniska elementarskola.

Anm. Naturligtvis mottager jag med nöje af ynglingar i en lägre afdelning lösningar bestämda för en högre afdelning, äfvensom lösningar å öfriga olösta satser framstälda i tidskriften. Min adress är *Warberg* under tiden mellan den 15 Juni och 20 Aug. detta år, derefter Stockholm.

F. W. HULTMAN.

Satser angående triangeln, af lektor C. F. LINDMAN.

(En triangels sidor betecknas med a, b, c och de motstående vinklarne med A, B, C resp.; den omskrifne cir-

---

* Dessa satser äro äfven lämpliga för elever vid de tekniska skolorna, af hvilka jag derföre äfven emottager lösningar.

F. W. HULTMAN.

kelns radie med R, den inskrifnes med r, radien i den cirkel, som tangerar endera af sidorna a, b, c och de båda andras förlängningar, med r_a, r_b, r_c resp. och triangelns halfva omkrets med p).

196. $r = 4R \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}C,$

$r_a = 4R \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}C,$

$r_b = 4R \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}C,$

$r_c = 4R \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}C \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}B.$

197. $r_a + r_b + r_c = 2R(\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}A + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}B + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}C)$

$= \tfrac{1}{2}(a \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}A + b \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}B + c \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}C);$

$r_a + r_b + r_c - r = 4R;$

$r_a + r_b + r_c - 3r = 4R(\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}A + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}B + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}C)$

$= a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A + b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B + c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C.$

198. $r_a r_b r_c = p^2 r.$

199. $\triangle ABC = T = \sqrt{r\, r_a r_b r_c}.$

200. Om den inskrifna cirkeln tangerar sidorna a, b, c i A_1, B_1, C_1 resp., så är

$$\triangle A_1 B_1 C_1 = T_1 = 2r^2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}C.$$

201. Om man sammanbinder de punkter, i hvilka bissektriserna till trianglarnes ABC vinklar träffa den omskrifne cirkelns periferi, så fås en triangel likformig med $\triangle A_1 B_1 C_1$. Gör man hans yta $= T_2$, så är

$$T_2 = 2R^2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}C; \qquad T_1 T_2 = \tfrac{1}{4}T^2.$$

202. Om I, I_a, I_b, I_c äro medelpunkterna till de cirklar, hvilkas radier äro r, r_a, r_b, r_c resp., och om man gör $\triangle BI_aC = T_a$, $\triangle BIC = t_a$, $\triangle AI_bC = T_b$, $\triangle AIC = t_b$, $\triangle AI_cC = T_c$, $\triangle AIB = t_c$, så är

$$\frac{t_a}{T_a} + \frac{t_b}{T_b} + \frac{t_c}{T_c} = 1;$$

$$\frac{a}{T_a} + \frac{b}{T_b} + \frac{c}{T_c} = \frac{2}{r};$$

$$\triangle I_a I_b I_c = \frac{abc}{2r} = 2pR.$$

203. Om radierna i de cirklar, som äro omskrifna kring trianglarne T_a, T_b, T_c, betecknas med R_a, R_b, R_c resp., så är $R_a R_b R_c = \dfrac{a^2 b^2 c^2}{8 r_a r_b r_c} = 2r R^2$.

204. Medelpunkterna till nyssnämnda cirklar ligga på periferien af den kring $\triangle ABC$ omskrifna cirkeln och deras periferier skära hvarandra i den i $\triangle ABC$ inskrifna cirkelns medelpunkt. Sammanbindas medelpunkterna till de tre cirklarne, hvilkas radier äro R_a, R_b, R_c, så uppkommer en triangel, likformig med $\triangle I_a I_b I_c$ och hvars sidor äro parallela med och hälften så stora som dennes.

205. Om radien i den kring $\triangle I_a I_b I_c$ omskrifne cirkeln betecknas med R_1 och den inskrifne cirkelns med r_1, så är

$$R_1 = 2R; \quad r_1 = \frac{p}{4 \operatorname{Cos} \frac{1}{4}(\pi - A) \operatorname{Cos} \frac{1}{4}(\pi - B) \operatorname{Cos} \frac{1}{4}(\pi - C)}.$$

Medelpunkterna till dessa båda cirklar ligga på samma räta linie som och till samma afstånd från medelpunkten i den kring $\triangle ABC$ omskrifne cirkeln, hvilken i afseende på $\triangle I_a I_b I_c$ är den s. k. *niopunkts-cirkeln.*

206. Om från en punkt P på den omskrifne cirkelns periferi perpendiklar fällas på en triangels sidor och om perpendikeln på a betecknas med p_a o. s. v., så är

$$\frac{\operatorname{Sin} C}{p_c} = \frac{\operatorname{Sin} A}{p_a} + \frac{\operatorname{Sin} B}{p_b}, \text{ om } P \text{ ligger på bågen } AB;$$

$$\frac{\operatorname{Sin} B}{p_b} = \frac{\operatorname{Sin} A}{p_a} + \frac{\operatorname{Sin} C}{p_c}, \text{ . . . . } AC;$$

$$\frac{\operatorname{Sin} A}{p_a} = \frac{\operatorname{Sin} B}{p_b} + \frac{\operatorname{Sin} C}{p_c}, \text{ . . . . } BC.$$

Är triangeln liksidig, så är den mellersta perpendikelns reciproka värde = summan af de andras reciproka värden.

207. Om en punkt P på den omskrifne cirkelns periferi sammanbindes med en triangels vinkelspetsar och om man gör $PA = n_a$, $PB = n_b$, $PC = n_c$, så är

$n_c \operatorname{Sin} C = n_a \operatorname{Sin} A + n_b \operatorname{Sin} B$, om P ligger på bågen AB;
$n_b \operatorname{Sin} B = n_a \operatorname{Sin} A + n_c \operatorname{Sin} C$, ... AC;
$n_a \operatorname{Sin} A = n_b \operatorname{Sin} B + n_c \operatorname{Sin} C$, ... BC,
hvilka uttryck äfven kunna få formen

$$cn_c = an_a + bn_b \quad \text{o. s. v.}$$

Är triangeln liksidig, så fås den bekanta satsen hos Todhunter, Öfningssatser till Euklides N:o 419 Ed. I: *a*; N:o 436 Ed. II: *a*.

208. Om från en punkt P på den inskrifne cirkelns periferi perpendiklar fällas på en triangels sidor samt perpendikeln på a kallas p_a o. s. v., så är

$\sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C = \sqrt{p_a} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} A + \sqrt{p_b} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B$, om P ligger på bågen $A_1 B_1$;
$\sqrt{p_b} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B = \sqrt{p_a} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} A + \sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C$, ... $A_1 C_1$;
$\sqrt{p_a} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} A = \sqrt{p_b} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B + \sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C$, ... $B_1 C_1$.

209. Om man från en punkt P på periferien af den cirkel, som tangerar sidan AB samt förlängningarne af CA, CB, fäller perpendiklar på en triangels sidor och betecknar dem såsom i N:o 208 samt kallar tangeringspunkterna C_c, B_c, A_c resp., så är

$\sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C = \sqrt{p_a} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} A - \sqrt{p_b} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} B$, om P ligger på bågen $B_c C_c$;
$\sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C = \sqrt{p_b} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} B - \sqrt{p_a} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} A$, ... $A_c C_c$;
$\sqrt{p_c} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C = \sqrt{p_a} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} A + \sqrt{p_b} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} B$, ... $A_c B_c$.

Dylika formler fås om P tages på någondera af de båda andra cirklarne.

Satser af C. B. S. Cavallin.

210. AB är korda i en gifven cirkel, C och D två punkter, belägna på hvardera af de segmentbågar, uti hvilka cirkeln delas genom AB och på lika afstånd från AB. $AC \cdot BC = AD \cdot BD$.

211. Sättas sidorna i en triangel $= a, b, c$ och midtellinierna för dessa dess sidor $= m_a, m_b, m_c$, visa att mellan dessa storheter eger rum sambandet

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

212. Om A, B, C och D äro de på hvarandra följande hörnen i en fyrhörning, E midtpunkten på AC och F midtpunkten på BD, så är

$$AB_q + BC_q + CD_q + AD_q = 2(AF_q + BE_q + CF_q + DE_q).$$

213. Om från en godtycklig punkt *utom* en liksidig triangel perpendiklar nedfällas mot dess sidor, så är summan af två bland dem minskad med den tredje konstant och lika med triangelns höjd.

214. Tre punkter A, B och C ligga i rät linie; att på en gifven cirkels periferi finna en sådan punkt, att derifrån AB och BC ses under lika stora vinklar.

215. Att finna lokus för tyngdpunkten till alla de trianglar, som hafva en konstant bas och en konstant vinkel vid spetsen.

216. Om en liksidig triangel är inskrifven i en cirkel och en punkt tages på cirkelns periferi samt sammanbindes med två närstående vinkelspetsar i triangeln, så är dubbla rektangeln af dessa sammanbindningslinier ökad med fyra gånger qvadraten på afståndet mellan midtpunkten på den räta linie, som förenar nyssnämnde sammanbindningslinier, och midtpunkten på den räta linie, som förenar den valda punkten med triangelns motstående vinkelspets, lika med qvadraten på den liksidiga triangelns sida.

217. Ytorna af trianglar, som äro inskrifna i samma eller lika stora cirklar och hafva en gemensam eller lika stora baser, förhålla sig till hvarandra direkte som rektanglarne af de sidor, hvilka de icke hafva gemensamma eller lika stora.

218. Att i en gifven cirkel inskrifva en triangel så, att två af sidorna förhålla sig såsom två gifna räta linier

a) och att dess area blir ett *maximum*;

b) och att dess omkrets blir ett *maximum;*

c) och att summan af dessa sidor blir ett *maximum;*

d) och att skilnaden mellan dessa sidor blir ett *maximum;*

e) och att summan af qvadraterna på dessa sidor blir ett *maximum;*

f) och att skilnaden mellan qvadraterna på dessa sidor blir ett *maximum;*

g) och att rektangeln, som innehålles af dessa sidor, blir ett *maximum;*

h) och att dess area är lika med en gifven qvadrats;

i) och att dess omkrets blir lika med en gifven rät linie;

j) och att skilnaden mellan dessa sidor blir lika med en gifven rät linie;

k) och att summan af qvadraterna på dessa sidor blir lika med en gifven qvadrat;

l) och att skilnaden mellan qvadraterna på dessa sidor blir lika med en gifven qvadrat;

n) och att den vinkel, som dessa sidor omfatta, blir lika med en gifven vinkel;

m) och att rektangeln, som innehålles af dessa sidor blir lika med en gifven rektangel;

o) och att en af de vinklar som stå emot dessa sidor blir lika med en gifven vinkel;

p) och att den tredje sidan blir lika med en gifven rät linie.

219. Två cirklar tangera hvarandra innantill eller utantill. Att upprita en triangel, som har sin spets i tangeringspunkten och de öfriga hörnpunkterne belägna en på hvardera af de båda cirklarnes periferier, så att dess yta blir den möjligast största.

220. Två cirklar tangera hvarandra innantill eller utantill. Att upprita en likbent triangel, som har sin spets i tangeringspunkten och de båda sidornas ändpunkter be-

lägna en på hvardera cirkelns periferi, så att dess ytinnehåll är det största möjliga.

221. Att i en triangel inskrifva den största möjliga rektangel.

222. En cirkel och en rät linie äro gifna. Att npprita en rektangel, som har en sida belägen på den räta linien och den motstående sidan såsom korda i cirkeln.

a) så att dess perimeter blir den längsta möjliga;

b) så att den intar den största möjliga yta.

Anm. Med tillhjelp af sats 60 (I) (N. Peterson) löses satsen 222 *a* synnerligen enkelt.

223. Två cirklar skära hvarandra. Att genom en af skärningspunkterna draga en rät linie, som afskäres af de båda cirkelperiferierna

a) så, att rektangeln af delarna blir ett *maximum;*

b) så att summan af qvadraterna på delarna blir ett *maximum;*

c) så att rektangeln af delarna blir lika med en gifven rektangel;

d) så att summan af qvadraterna på delarna blir lika med en gifven qvadrat;

e) så att skilnaden mellan qvadraterna på delarna blir lika med en gifven qvadrat.

224. AB är en fast rät linie, på hvilken såsom bas en rörlig triangel ABC är uppritad, så att vinkeln vid spetsen är lika med en gifven vinkel. Stycket AD af sidan AC är konstant och från D är en rät linie dragen parallelt med CB tills den träffar AB i E och från E är vidare dragen en rät linie EF parallelt med AC, som träffar BC i F. När eger den sålunda uppkomna parallelogrammen $DEFC$ sitt största värde?

225. AB är en fast rät linie, på hvilken den rörliga triangeln ABC är uppritad, der vinkeln C är konstant. De konstanta styckena AD och BE äro afsatta på AC och BC. När får triangeln DEC sitt största värde?

226. Bland l räta linier äro m parallela och n gå genom samma punkt. Alla linierna skära hvarandra sins

emellan i det största möjliga antal punkter. Att finna uttrycket för detta maximum.

227. Att uppritа en fyrhörning, likformig med en gifven fyrhörning, hvars sidor (förlängda, om så behöfves) gå genom hvar sin af fyra gifna punkter.

228. Öfver den räta linien AB äro uppritade tvänne cirkelsegment sådana, att vinkeln som innehålles i det ena, är lika med vinkeln, som innehålles i det andra tillsammans med denna vinkels halfva supplement. På det senare segmentet är en punkt C hvilken som helst tagen och från den samma en tangent CD dragen till det förra segmentet, hvarpå CE nedfälles $\perp AB$ eller dess förlängning. Bevisa, att qvadraten på CD varierar proportionelt mot räta linien DE.

229. AB är en gifven rät linie och C en gifven punkt på densamma. En godtycklig cirkel ADB är uppritad, som skär den genom midtpunkten O gående, mot AB vinkelräta linien OD i en punkt D. D och C sammanbindas och DC utdrages tills den råkar periferien i punkten E. AE eller BE utdrages, hvarpå den yttre vinkeln delas midt i tu genom en rät linie. Bevisa, att denna delningslinie går genom en bestämd punkt, huru man än må taga radien.

230. Att upprita en triangel, då man känner perimetern, en vinkel och

a) höjden till den mot den gifna vinkeln stående sidan;

b) höjden mot någon af de sidor, som omfatta den kända vinkeln;

c) längden af den räta linie, som skär den kända vinkeln midt i tu och ligger mellan spetsen och den motstående sidan;

d) förhållandet mellan de sidor, som omfatta den kända vinkeln;

e) radien till den inskrifna cirkeln;

f) summan af de sidor, som omfatta den kända vinkeln.

g) skilnaden mellan de sidor, som omfatta den kända vinkeln.

Satser af G. A. K... A, student.

231. Att afskära en triangel hvad del, som begäres, medelst en linie, parallel med en sida i triangeln.

232. Att afskära en triangel hvad del, som begäres, medelst en linie, parallel med en, till sitt läge gifven, godtycklig linie.

233. Om två parallela linier och en annan, som skär dem, äro gifna, att

a) på den ena parallela linien såsom bas upprita en triangel, som har sin spets på den skärande linien, är likformig med en gifven triangel och skäres midt i tu af den andra parallela linien;

b) på den ena parallela linien såsom bas upprita en triangel, som har sin spets på den andra parallela linien, är likformig med en gifven triangel och skäres midt i tu af den skärande linien;

c) på den ena parallela linien såsom bas upprita en triangel, som är likformig med en gifven triangel och skäres midt i tu såväl af den andra parallela linien som af den skärande linien;

d) på den skärande linien såsom bas upprita en triangel, som är likformig med en gifven triangel och skäres i tre lika stora delar af de båda parallela linierna;

e) enligt ofvanstående vilkor upprita trianglar, som delas på hvad sätt som helst af den tredje linien.

234. Om tre räta linier äro gifna, som skära hvarandra, att på den ena räta linien såsom bas upprita en triangel, som är likformig med en gifven triangel och

a) skäres midt i tu af hvardera af de två öfriga linierna;

b) delas i hvad delar, som begäras, af hvardera af de två öfriga linierna.

235. Om två parallela linier äro gifna och en annan, som skär dem, att upprita en liksidig triangel, som skäres midt i tu af den skärande linien, har en spets på hvar-

dera af de parallela linierna och sidan, som sammanbinder dessa spetsar, parallel med den skärande linien.

236. Om tre räta linier äro gifna, som skära hvarandra, att upprita en liksidig triangel, som skäres midt i tu af den ena linien, har en spets på hvardera af de öfriga två linierna och sidan, som sammanbinder dessa spetsar, parallel med den tudelande linien.

Satser af H. LAGERDAHL.

237. Att bevisa, det summan af ett bråk och det uppnedvända bråket öfverskjuter 2 med qvoten, som fås, då qvadraten på skilnaden mellan bråkets täljare och nämnare delas genom dessas produkt.

238. Qvadrering af tal, som ändas på 5, kan med fördel ske genom att multiplicera det tal, de öfriga siffrorna för sig bilda, med det, som är en enhet större än detta, och till produktens slut foga 25. När en eller flere nior omedelbart föregå slutfemman, vinner denna väg ytterligare i genhet. Att visa dess grund eller riktighet.

239. Om eqvationsformerna

$$x \pm y = a, \qquad (x^2 \pm y^2)(x^3 \pm y^3) = b$$

afläsas på så många vis, som de utsatta förtecknen medgifva, uppstå 8 eqvationspar. Hvilka af dessa underkasta sig qvadratisk lösning och hvilka af de öfriga kunna lösas medelst Cardansformeln, d. v. s. hvilka af de öfriga leda till en sluteqvation af 3:e graden?

Sats af lektor M. HALLSTRÖM.

240. Tre räta linier och en punkt äro gifna i samma plan. Att genom punkten draga en rät linie, som skär de gifna linierna så, att stycket mellan den första och den andra är lika med stycket mellan den andra och den tredje.

AFDELNING II.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. DILLNER.

(Forts. fr. sid. 43).

D) Lösning af geometriska likheter af högre grad.

135. Vi vilja för våra geometriska qvantiteter bevisa några satser, hvilka förut äro kända såsom gällande för algebraiska qvantiteter.

Med a_1, a_2, ... a_n förstå vi n stycken komplexer hvilka som helst och med

$$\overset{n}{\underset{r}{C}}$$

förstå vi kombinationen af $r^{\underline{te}}$ ordningen af a_1, a_2, ... a_n, d. v. s. summa af alla särskilda r-lediga produkter, som kunna bildas af de n komplexerna.

På grund af sjelfva definitionen på kombination följer att

$$\overset{n}{\underset{r}{C}} = a_s \overset{n-1}{\underset{r-1}{C}} + \overset{n-1}{\underset{r}{C}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35),$$

der a_s utmärker någon af de n komplexerna och förutsättes utstött ur de med $\overset{n-1}{C}$ betecknade kombinationerna. Denna formel gäller från $r = 1$ till $r = n$ under förutsättning, att $\overset{n-1}{\underset{0}{C}}$ betyder 1 och $\overset{n-1}{\underset{n}{C}}$ betyder 0.

136. *Om vi ha uttrycket*

$$(x_\pi)^n + (x_\pi)^{n-1} . \overset{n}{\underset{1}{C}} + (x_\pi)^{n-2} . \overset{n}{\underset{2}{C}} + \ldots x_\pi . \overset{n}{\underset{n-1}{C}} + \overset{n}{\underset{n}{C}} \quad . \; . \; (36),$$

der x representerar en obestämd complex, så blir det 0 för hvarje gång x blir $= a_1$ eller a_2 eller o. s. v. till och med a_n.

Ty genom att enligt (35) uppdela kombinationerna i (36) fås

$$(x_\pi)^n + (x_\pi)^{n-1} . \left\{ a_s \overset{n-1}{\underset{0}{C}} + \overset{n-1}{\underset{1}{C}} \right\} + (x_\pi)^{n-2} . \left\{ a_s \overset{n-1}{\underset{1}{C}} + \overset{n-1}{\underset{2}{C}} \right\} + \ldots$$

$$+ \, x_\pi . \left\{ a_s \overset{n-1}{\underset{n-2}{C}} + \overset{n-1}{\underset{n-1}{C}} \right\} + a_s \overset{n-1}{\underset{n-1}{C}} \quad . \; . \; . \; . \; (37),$$

i hvilket uttryck termerna taga ut hvarandra i ordning två och två, då x sättes $= a_s$. Genom att successivt låta s betyda 1, 2 o. s. v. till och med n framgår satsen såsom till fullo bevisad.

Anm. Enligt denna sats kan man således af n stycken gifna komplexer bilda en $n^{\underline{te}}$ grads eqvation, som har dessa till rötter.

137. Om vi efter införande af $x_\pi = \xi$ kalla det hyfsade $n^{\underline{te}}$ grads polynomet (36) för $f_n(\xi)$, så fås genom uppdelning enligt (37)

$$f_n(\xi) + (\xi + a_s) f_{n-1}(\xi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (38),$$

der $f_{n-1}(\xi)$ betyder ett uttryck af samma form som (36), då vi i stället för n införa $n-1$.

Genom att i (38) sätta $s = 1$ och sedan ur faktorn $f_{n-1}(\xi)$ på enahanda sätt utbryta faktorn $\xi + a_2$ samt vidare ur $f_{n-2}(\xi)$ utbryta $\xi + a_3$ o. s. v. fås uppdelningen

$$f_n(\xi) = (\xi + a_1)(\xi + a_2)(\xi + a_3) \ldots (\xi + a_n) \quad . \; . \; (39),$$

hvarigenom vi således lärt finna multiplikationsresultatet af n stycken binoma faktorer.

138. Genom att i (39) sätta $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = a$ och under förutsättning att vi känna antalet termer i hvarje särskild kombination erhålles binomial-formeln

$$(\xi + a)^n = \xi^n + \frac{n}{1}\xi^{n-1} . a + \frac{n(n-1)}{1 . 2}\xi^{n-2} . a^2 + \ldots a^n \;.. (40),$$

hvilken således framgår såsom en omedelbar följd ur (39).

Anm. De kända algebraiska bevisen för de i §§ 136—138 framstälda satserna kunna enligt de grunder, som äro antydda i § 39 omedelbart antagas såsom gällande för de geometriska komplexerna; men vi hafva för fullständighetens skull velat bevisa dessa vigtiga satser särskildt för komplexerna och det så mycket heldre, som de anförda bevisen äro till sin natur måhända något enklare än de, som vanligen framställas från algebraisk ståndpunkt.

139. Vi gå nu att rörande funktioner (sådant deras begrepp blifvit antydt i §§ 62—78) framställa några allmänna bestämningar, af hvilka vi komma att betjena oss vid behandlingen af de vigtiga satserna rörande rötter.

Om vi har en funkiion R_Ω af ϱ_ω eller

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega),$$

så säges hon vara *ensvarig*, om mot hvarje punkt ϱ_ω svarar blott *en enda* punkt R_Ω. I annat fall säges funktionen vara mångsvarig, hvaraf vi ha såsom enskilda fall *tvåsvarig*, *tresvarig* och i allmänhet *n-svarig*.

Anm. En ensvarig funktion karakteriseras deraf, att, under det ϱ_ω med *ett* hvarf beskrifver en sluten linie eller kontur, så beskrifver R_Ω en följd af punkter och det så, att, då ϱ_ω hunnit sin utgångspunkt, så har ock R_Ω hunnit sin. Ur denna synpunkt sedd säges R_Ω vara en *monodrom* (enlöpig) funktion af ϱ_ω. Om åter samtidigheten i utgångspunkterna icke inträffar, så är funktionen mångsvarig eller icke monodrom.

140. Med en funktions R_Ω *vinkelbana* förstå vi det af R_Ω beskrifna bågvärdet, under $\varrho_\omega \stackrel{s}{=}$ argument ω beskrif-

ver ett helt båghvarf eller går från ett värde ω_1 till värdet $\omega_1 + 2\pi$. Denna definition inlägga vi i beteckningen

$$\operatorname{Arg}_{\omega_1}^{\omega_1+2\pi} f(\varrho_\omega) = \operatorname{Arg} f(\varrho_{\omega_1+2\pi}) - \operatorname{Arg} f(\varrho_{\omega_1}),$$

hvilken utsäges: funktionens $f(\varrho_\omega)$ vinkelbana från ω_1 till $\omega_1 + 2\pi$ är skilnaden mellan funktionens argument för värdet $\omega_1 + 2\pi$ och funktionens argument för värdet ω_1.

141. Såsom en omedelbar följd af föregående definitioner framgår, *att en ensvarig funktions vinkelbana måste vara af formen $2k\pi$, der k betyder ett helt positivt eller negativt tal eller ock 0.*

142. Vi gå nu att uppvisa *kontinuitets* begreppets betydelse för våra geometriska komplexer.

Om vi i likheten

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega)$$

låta ϱ_ω från gifna grundbestämningar origo N och grundrigtning NA (fig. 12) fixera punkten P, så måste R_Ω från sina grundbestämningar origo O och grundrigtning OB fixera någon motsvarig punkt Q. Låta vi punkten P' fixeras af $\varrho_\omega + h_\varepsilon$, då $h_\varepsilon = PP'$, så kan den motsvariga punkten Q' representeras af $R_\Omega + H_E$, då $H_E = QQ'$, hvarigenom således det mot tillskottet h_ε svarande tillskottet H_E får följande form

$$H_E = f(\varrho_\omega + h_\varepsilon) - f(\varrho_\omega).$$

Om det nu inträffar, att, under det P' närmar sig att sammanfalla med P, äfven Q' närmar sig att sammanfalla med Q och det för hvilket värde som helst på argumentet ε eller, kortare uttryckt, om samtidigt

$$\lim H = 0 \quad \text{som} \quad \lim h = 0,$$

så säges funktionen $f(\varrho_\omega)$ vara *kontinuerlig* för punkten P.

En funktion säges vidare vara kontinuerlig för en linie eller för en viss del af planet, om hon är kontinuerlig för hvarje punkt på denna linie eller för hvarje punkt inom denna del af planet.

143. Såsom en omedelbar följd af föregående allmänna bestämningar framgår, *att, om en ensvarig och kontinuerlig funktions vinkelbana är 0, så beskrifver funktionen en kontur, som icke innesluter hennes origo: och om vinkelbanan utgöres af $2k\pi$, då k betyder ett helt positivt eller negativt tal, så beskrifver funktionen en sluten kontur, som innesluter hennes origo; och omvändt.*

144. *Om vi med $f(\varrho_\omega)$ utmärka ett hyfsadt $n^{\underline{te}}$ grads polynom och vi sätta*

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega) = (\varrho_n)^n + A_\alpha \,.\, (\varrho_\omega)^{n-1} + \ldots B_\beta \,.\, \varrho_\omega + C_\gamma \quad . \; . \; (41),$$

så är R_Ω en ensvarig funktion af ϱ_ω.

Sanningen af denna sats inses omedelbart på grund deraf, att, om vi i polynomet $f(\varrho_\omega)$ i stället för argumentet ω införa det generella argumentet $\omega + 2k\pi$, så förändrar detta icke läget af den af R_Ω fixerade punkten.

145. *Ett hyfsadt $n^{\underline{te}}$ grads polynom $f(\varrho_\omega)$ är en kontinuerlig funktion af ϱ_ω och det för alla punkter i planet.*

Om vi använda det i § 142 gifna beteckningssättet, så fås

$$H_E = h_\varepsilon \,.\, f'(\varrho_\omega) + \frac{(h_\varepsilon)^2}{1\,.\,2} \,.\, f''(\varrho_\omega) + \ldots \frac{(h_\varepsilon)^n}{1\,.\,2\,.\,.\,n} \,.\, f^{(n)}(\varrho_\omega) \quad . \; . \; (42),$$

hvilken utveckling endast förutsätter binomialteoremet och den inom eqvationsteorien vanliga beteckningen med derivator.

Men då modylen för en summa alltid är $\leqq$ summan af termernas modyler, så fås af (42), då M betecknar den största af derivatornas modyler:

$$H < h\,M \,.\, \frac{1 - h^n}{1 - h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

och detta för hvilket värde som helst på ε. För ändligt värde på ϱ äro derivatornas modyler ändliga (hvilket visas i enlighet med härledningen af (43)) och således äfven M ändlig. Vi få alltså samtidigt

$$\lim H = 0 \quad \text{som} \quad \lim h = 0,$$

hvarigenom således kontinuitetsvilkoret är uppfyldt för hvarje ändligt värde på ϱ, d. v. s. för hvarje punkt i planet.

Anm. Af denna sats lära vi oss således, att, om ϱ_ω beskrifver konturer, som ligga hvarandra oändligt nära, så beskrifver R_Ω motsvarande konturer, som äfven ligga hvarandra oändligt nära; eller, annorlunda uttryckt, om ϱ_ω tänkes beskrifva sina konturer på ett sådant sätt, att den första, så att säga, flyter in i den sista utan att lemna någon mellanliggande punkt i planet oberörd, så beskrifver ock R_Ω sina motsvariga konturer på enahanda sätt och det oberoende af de möjliga formförändringar, som de så att säga flytande konturerna under sin tänkta rörelse undergå.

146. *Om i likheten*

$$r_\theta = k_\varkappa + u_v$$

u_v och r_θ äro variabla och $k_\varkappa$ konstant, så är $r_\theta \overset{s}{=}$ vinkelbana $= 0$ för $k > u$ och $= 2\pi$ för $k < u$.

Sanningen af denna sats inses omedelbart ur den af likheten representerade figuren.

147. *I hvarje hyfsadt $n^{\underline{te}}$ grads polynom*

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega) = (\varrho_\omega)^n + A_\alpha \,.\, (\varrho_\omega)^{n-1} + \ldots B_\beta \,.\, \varrho_\omega + C_\gamma$$

gifves det alltid ett sådant värde på ϱ_ω, som gör polynomet $= 0$.

I. Vi sätta

$$R_\Omega = C_\gamma + r_\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

der således

$$r_\theta = B_\beta \,.\, \varrho_\omega + \ldots A_\alpha \,.\, (\varrho_\omega)^{n-1} + (\varrho_\omega)^n .$$

Af denna senare likhet följer

$$B \,.\, \varrho + \ldots A \,.\, \varrho^{n-1} + \varrho^n \geqq r$$

och således ovilkorligen

$$m\varrho \,.\, \frac{(1-\varrho^n)}{1-\varrho} > r ,$$

då m representerar den störste af koefficienternas modyler $B, \ldots A$, 1.

Men vi kunna på ϱ finna ett värde ϱ_1 så litet, att

$$C > \frac{m\varrho_1(1 - \varrho_1^n)}{1 - \varrho_1},$$

för hvilket värde alltså

$$C > r.$$

Men för $C > r$ är i (44) $R_{\Omega}\stackrel{s}{=}$ vinkelbana $= 0$ (§ 146), hvilket enligt § 143 innebär, att R_{Ω} beskrifver en kontur, som icke innesluter dess origo.

II. Om vi åter sätta

$$R_{\Omega} = (\varrho_{\omega})^n \,.\, \{1 + u_{\nu}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

der således

$$u_{\nu} = \frac{A_{\alpha}}{\varrho_{\omega}} + \ldots \frac{B_{\beta}}{(\varrho_{\omega})^{n-1}} + \frac{C_{\gamma}}{(\varrho_{\omega})^n};$$

så är

$$\frac{A}{\varrho} + \ldots \frac{B}{\varrho^{n-1}} + \frac{C}{\varrho^n} \geqq u$$

och således ovilkorligen

$$\frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\varrho}\right)^n}{1 - \frac{1}{\varrho}} > u,$$

då μ representerar den störste af koefficienternas modyler $A, \ldots B$, C. Men vi kunna på ϱ finna ett värde ϱ_2 så stort, att

$$1 > \frac{\mu}{\varrho_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^n}{1 - \frac{1}{\varrho_2}},$$

för hvilket värde alltså

$$1 > u\,.$$

Men för $1 > u$ är faktorns $1 + u_{\nu}$ i (45) vinkelbana $= 0$ och faktorns $(\varrho_{\omega})^n$ vinkelbana $= 2n\pi$, då följaktligen

$R_\Omega \underline{s}$ vinkelbana blir $2n\pi$, hvilket således innebär, att R_Ω beskrifver en sluten kontur, som innesluter dess origo.

Om vi nu tänka oss ϱ_ω med sitt origo som medelpunkt beskrifva oändligt nära hvarandra belägna koncentriska cirklar, började med modylvärdet ϱ_1 och slutande med modylvärdet ϱ_2, så måste R_Ω på grund af § 145 beskrifva oändligt nära hvarandra belägna konturer, började med en, som *icke innesluter* origo, och slutande med en, som *innesluter* origo. Men en kontinuerlig öfvergång från den förra konturen till den senare förutsätter med nödvändighet, att det för något mellan ϱ_1 och ϱ_2 liggande värde på ϱ måste finnas en kontur, som *berör* origo (jfr § 145, *anm.*), för hvilken alltså $R = 0$.

Anm. Det här förebragta beviset, att »hvarje eqvation har en rot» utgör måhända det enklast möjliga, som låter finna sig för en så vigtig och på samma gång svårbevislig sats. Som vi se, står det i det intimaste samband med begrepp, som äro för de geometriska komplexerna egendomliga och hvilka på algebraisk ståndpunkt sakna betydelse. Det är derför ock helt naturligt, att man från denna ståndpunkt förgäfves sökt bevisa denna sats, hvilken till sina förutsättningar går utöfver de algebraiska qvantiteternas speciella område. Det af Cauchy gifna beviset rör sig ock i sjelfva verket med förutsättningar, som i sträng mening tillhöra den geometriska kalkylen.

148. *Om a_1 betecknar en rot till det hyfsade $n\underline{^{te}}$ grads polynomet (41), så är $f(\varrho_\omega)$ divisibel med $\varrho_\omega - a_1$ och ger en qvot $f_1(\varrho_\omega)$, som utgör ett hyfsadt polynom af $(n-1)\underline{^{te}}$ graden, eller*

$$f(\varrho_\omega) = (\varrho_\omega - a_1) . f_1(\varrho_\omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Beviset för denna sats sammanfaller till formen med det kända algebraiska beviset.

149. Såsom en omedelbar följd af (46) få vi, då de successiva qvoterna uppdelas på analogt sätt

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega) = (\varrho_\omega - a_1)(\varrho_\omega - a_2) \ldots (\varrho_\omega - a_n) \; . \; . \; (47),$$

hvaraf framgår, *att "en $n^{\underline{te}}$ grads eqvation har n stycken rötter".*

150. *Om vi antaga de n rötterna i (47) vara indicerade efter modylernas storlek, så att* $\bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \ldots < \bar{a}_n$, *och om vidare* ϱ *har ett sådant värde* ϱ', *att*

$$\bar{a}_r < \varrho' < \bar{a}_{r+1},$$

så blir enligt § 146 hvar och en af de r första faktorernas i (47) vinkelbanor $= 2\pi$, *och hvar och en af de* $n-r$ *senare faktorernas vinkelbanor* $= 0$, *då alltså*

$$\operatorname{Arg}_{\omega_1}^{\omega_1+2\pi} f(\varrho'_\omega) = 2r\pi,$$

Och omvändt kunna vi af identiteten (47) sluta, *att, om vi för något värde* ϱ' *på* ϱ *finna* $f(\varrho'_\omega)^{\underline{s}}$ *vinkelbana vara* $2r\pi$, *så ligger* ϱ' *mellan de två rotmodylerna* $\bar{a}_r$ *och* $\bar{a}_{r+1}$, *då nämnligen de n rötterna äro indicerade efter modylernas storlek, så att* $\bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \ldots < \bar{a}_n$.

Anm. Af denna sats ha vi således lärt oss, att om ϱ_ω såsom i § 147 beskrifver oändligt nära hvarandra belägna koncentriska cirklar från modylvärdet ϱ_1 till modylvärdet ϱ_2, så ökas $R_\Omega^{\underline{s}}$ vinkelbana med 2π, d. v. s. R_Ω gör en ny slinga omkring sitt origo, för hvarje gång ϱ under sin tillväxt passerar öfver en rotmodyl.

151. Den punkt, som fixeras af ett rotvärde, då detta hänföres till $\varrho_\omega^{\underline{s}}$ origo och grundrigtning, kallas *rotpunkt* (jfr § 129).

Om inom en af ϱ_ω *beskrifven sluten kontur hvilken som helst det finnes r stycken rotpunkter, så är* $R_\Omega^{\underline{s}}$ *vinkelbana för denna kontur* $2r\pi$, *d. v. s.* R_Ω *beskrifver sin kontur med r stycken slingor omkring sitt origo, under det* ϱ_ω *beskrifver sin kontur; och omvändt, om* $R_\Omega^{\underline{s}}$ *vinkelbana för någon af* ϱ_ω *beskrifven kontur är* $2r\pi$, *så är detta ett kännetecken, att r stycken rotpunkter ligga inom den af* ϱ_ω *beskrifna konturen.*

Vi låta $\varrho_\omega = NP$ (fig. 13) från N som origo beskrifva en sluten kontur PP', inom hvilken en af $a_1 = NA_1$ fixerad rotpunkt A_1 finnes. Om vi sätta $A_1P = X_1$, så blir enligt figuren

$$X_1 = -a_1 + \varrho_\omega.$$

Men då ϱ_ω beskrifver sin slutna kontur PP', så beskrifver X_1 samma kontur omkring sitt origo A_1, då alltså dess vinkelbana enligt § 143 måste vara 2π eller, som är detsamma, faktorns $\varrho_\omega - a_1$ i (47) vinkelbana måste vara 2π. På samma sätt bevises, att för A_2 och hvarje annan inom konturen befintlig rotpunkt t. o. m. A_r måste dess motsvarande faktors vinkelbana vara 2π. Ligger åter en af $a_s = NA_s$ fixerad rotpunkt A_s utanför konturen PP', så fås enligt figuren

$$X_s = -a_s + \varrho_\omega.$$

Men då ϱ_ω beskrifver sin kontur PP', så beskrifver X_s samma kontur utom sitt origo A_s, då alltså dess vinkelbana måste vara 0 eller, som är detsamma, faktorns $\varrho_\omega - a_s$ vinkelbana måste vara 0. På samma sätt bevises, att för hvarje annan utom konturen PP' befintlig rotpunkt är dess motsvarande faktors vinkelbana 0. Alltså måste för r stycken inom och $n - r$ stycken utom konturen befintliga rotpunkter $R_\Omega \underline{s}$ vinkelbana vara $2r\pi$, d. v. s. $R_\Omega = OQ$ beskrifver sin slutna kontur QQ' med r stycken slingor omkring sitt origo O.

Omvändningen af satsen inses omedelbart af identiteten (45), enär $R_\Omega \underline{s}$ vinkelbana $2r\pi$ förutsätter med nödvändighet r stycken faktorer med hvar sin vinkelbana 2π.

Ligger en rotpunkt på sjelfva konturen PP', så lemnas det obestämdt, om dess motsvarande faktors vinkelbana må räknas för 0 eller 2π, men inskränker för öfrigt ingenting i den uttalade satsen.

Anm. Denna både vigtiga och intressanta sats har af Cauchy blifvit gjord till föremål för en särskild kalkyl, hvilken han utvecklat under namn af *Indicekalkyl* (Calcul des Indices).

(Forts.)

Deduktion af serierna för Sin x och Cos x.

Af löjtnant P. W. ALMQUIST, Ystad.

Vi antaga såsom kändt,

1:o) att binomial-formeln

$$(1+z)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} z + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} z^2 + \ldots \quad . \quad . \quad (1)$$

är gällande för alla reella värden å μ och alla värden å z, hvilkas modyl är mindre än 1, samt

2:o) att uttrycket

$$\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}$$

der x och μ äro reella qvantiteter, obegränsadt närmar sig till en viss finit gräns, e^x, när num. valören af μ obegränsadt tillväxer.

I formeln (1) sätta vi nu $z = \frac{x \cdot i}{\mu}$. Deraf fås för alla värden å x, som äro num. mindre än μ,

$$\left(1+\frac{xi}{\mu}\right)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{xi}{\mu} + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot \left(\frac{xi}{\mu}\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{1 \cdot 2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) + \frac{(xi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right) + \ldots$$

eller

$$\left(1+\frac{xi}{\mu}\right)^{\mu} = 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{1 \cdot 2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{(xi)^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) \ldots \left(1-\frac{n-1}{\mu}\right) + R \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

der

$$R = \frac{(xi)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) \ldots \left(1-\frac{n}{\mu}\right)\left\{1 + \frac{xi}{n+2}\left(1-\frac{n+1}{\mu}\right) + \ldots\right\}.$$

I denna eqvation antaga vi nu, att μ är positivt, samt söka begge membras gränsvärden, när μ obegränsadt tillväxer.

Beteckna vi fördenskull modylen för xi med r och modylen för R med ϱ, så är

$$\varrho < \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \left\{ 1 + \frac{r}{n+2} + \frac{r^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right\}$$

och således à fortiori

$$\varrho < \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

och sätta vi derjemte för $\mu = \infty$

$$\lim R = R'$$

$$\lim \varrho = \varrho',$$

så blir af (2)

$$\lim \left\{ \left(1 + \frac{xi}{\mu}\right)^\mu \right\} = 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(xi)^n}{1 \cdot 2 \dots n} + R'$$

samt af (3)

$$\varrho' < \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{n+2}}$$

och således för $n = \infty$

$$\lim R' = 0$$

och

$$\lim \left\{ \left(1 + \frac{xi}{\mu}\right)^\mu \right\} = 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(xi)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

hvilket gäller för alla reella värden å x, emedan μ är oändligt.

För venstra membrum antaga vi nu, att ϱ är modylen och ϑ principal-argumentet för $\left(1 + \frac{xi}{\mu}\right)$. Då blir

$$\left(1 + \frac{xi}{\mu}\right)^\mu = \varrho^\mu (\operatorname{Cos} \mu\vartheta + i \,.\, \operatorname{Sin} \mu\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

der

$$\varrho = \left(1 + \frac{x^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{och} \quad \vartheta = \operatorname{Arctg} \frac{x}{\mu}.$$

Häraf fås

$$\varrho^{\mu} = \left(1 + \frac{x^2}{\mu^2}\right)^{\mu \cdot \frac{1}{2}} = \left\{\left(1 + \frac{x^2}{\mu^2}\right)^{\mu^2}\right\}^{\frac{1}{2\mu}}$$

samt

$$\mu\vartheta = \mu \,.\, \mathrm{tg}\,\vartheta \cdot \frac{\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta} = x \cdot \frac{\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta}\,.$$

För $\mu = \infty$ blir då

$$\lim \vartheta = 0,$$
$$\lim \varrho^{\mu} = (e^{x^2})^0 = 1$$
$$\lim \mu\vartheta = x$$

och således af (5)

$$\lim \left\{\left(1 + \frac{xi}{\mu}\right)^{\mu}\right\} = \mathrm{Cos}\, x + i \,.\, \mathrm{Sin}\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Af (4) och (6) fås nu för alla reella värden å x

$$\mathrm{Cos}\, x + i \,.\, \mathrm{Sin}\, x = 1 + \frac{xi}{1} + \frac{(xi)^2}{1\,.\,2} + \frac{(xi)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

hvaraf

$$\mathrm{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots$$

$$\mathrm{Sin}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\ldots 5} - \ldots$$

Om developpabla ytors kurvaturlinier.

Af docent M. FALK.

Som bekant är, finner man kurvaturlinierna till en yta ur differentialeqvationen

$$\{(1+q^2)s-pqt\}y'^2+\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}y'+pqr-(1+p^2)s=0 \quad (1),$$

der

$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{dp}{dx},\quad s=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},\quad t=\frac{dq}{dy} \text{ och } y'=\frac{dy}{dx}$$

för kurvaturliniens projektion i xy-planet.

Då ytan är developpabel, har man derjemte

$$rt - s^2 = 0.$$

I detta fall låter eqv. (1) uppdela sig omedelbart i faktorer, som äro rationella i derivatorna p, q, r, s och t. Man får nämnligen utan svårighet ur (1)

$$y'\left\{y' - \frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+q^2)s-pqt}\right\} + \frac{(1+q^2)r-pqs}{(1+q^2)s-pqt}\left\{y' - \frac{(1+p^2)s-pqr}{(1+q^2)r-pqs}\right\} = 0 \quad (2).$$

Enär $r = \dfrac{s^2}{t}$, så har man

$$\frac{(1+p^2)s-pqr}{(1+q^2)r-pqs} = \frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+q^2)s-pqt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Insättes detta i (2), så erhåller man

$$\left\{y' - \frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+q^2)s-pqt}\right\}\left\{y' - \frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+q^2)s-pqt}\right\} = 0,$$

hvadan alltså de båda slagen af kurvaturlinier till developpabla ytor erhållas genom integration af de två differentialeqvationerna

$$y' = \frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+q^2)s-pqt} \quad \text{och} \quad y' = \frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+q^2)s-pqt} \quad . \quad . \quad (4).$$

Om den första af dessa antager indeterminerad form, begagnar man i stället den genom (3) derur erhållna

$$y' = \frac{(1+p^2)s-pqr}{(1+q^2)r-pqs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

En developpabel yta är, som bekant, enveloppen till ett plan, som rör sig på sådant sätt, att dess eqvation innehåller *en enda* variabel parameter såsom oberoende.

Låt planets eqvation vara

$$ax + by + cz + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

der a, b, c och d äro funktioner af parametern α, och låt a', b', c' och d' betyda dessa qvantiteters derivator i afseende på α. Då erhålles den developpabla ytans eqvation genom elimination af α mellan (6) och dess derivata i afseende på α, d. v. s. eqvationen

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Löses denna eqvation i afseende på α, så blir α = en funktion af x, y och z d. v. s. en funktion af blott x och y, enär z är en funktion af dessa variabler genom enveloppens eqvation. Då vi således söka p, q, r, s och t för enveloppen, så hafva vi att derivera (6) med afseende på x och y, under antagande att äfven α genom (7) är funktion af x och y. Detta ger ur (6)

$$a + cp + (a'x + b'y + c'z + d')\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

eller enligt (7)

$$a + cp = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Sammalunda erhålles

$$b + cq = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Elimineras α mellan (8) och (9), så erhålles

$$q = f(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Deriveras ytterligare (8) och (9) i afseende på x och y, så erhålles

$$cr + (a' + c'p)\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$cs + (a' + c'p)\frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

$$cs + (b' + c'q)\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

och

$$ct + (b' + c'q)\frac{d\alpha}{dy} = 0;$$

och om man mellan dessa eliminerar $\frac{d\alpha}{dx}$ och $\frac{d\alpha}{dy}$, finner man, om (8) och (9) användas,

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = \frac{a' + c'p}{b' + c'q} = \frac{a'c - ac'}{b'c - bc'} \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

hvaraf

$$rt - s^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

som är developpabla ytors partiella derivateqvation.

Insättas nu dessa uttryck i den andra af eqvationerna (4), så finner man för ena slaget af kurvaturlinier

$$y' = \frac{\frac{ab}{c^2} - \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)\frac{a'c - ac'}{b'c - bc'}}{1 + \frac{b^2}{c^2} - \frac{ab}{c^2}\,\frac{b'c - bc'}{a'c - ac'}} = -\frac{a'c - ac'}{b'c - bc'}$$

eller

$$y' = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$$

d. v. s.

$rdx + sdy = 0$ och $sdx + tdy = 0$ d. v. s. $dp = 0$ och $dq = 0$

d. v. s.

$$p = k \quad \text{och} \quad q = k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Enligt (10) följer för öfrigt den ena af dessa eqvationer ur den andra.

Hvilkendera som helst af eqvationerna (13) är nu generella eqvationen för ena slagets af kurvaturlinier projektion i xy-planet (n. b. om z elimineras medelst ytans eqvation). Denna eqvation kan alltså erhållas utan integration (nämnligen blott genom partiel derivation), då ytan är developpabel. Eqvationerna (13) uttrycka, att tangentplanen i alla punkter af en dylik kurvaturlinie äro parallela. Men då är lätt att inse, att de alla måste sammanfalla till *ett enda* plan, som således tangerar ytan i alla punkter af denna kurvaturlinie. För öfrigt är bekant, att det envelopperande planet tangerar ytan utefter ett visst läge af ytans rätliniga generatris. *De successiva lägena af denna generatris måste således utgöra den ena gruppen af kurvaturlinier, hvilka alltså samtliga äro räta.* Denna sats låter äfven uttrycka sig sålunda:

För att finna den rätliniga generatrisen till en developpabel yta $F(x, y, z) = 0$ har man endast att kombinera ytans eqvation med endera af eqvationerna

$$\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{dF}{dy} + k'\frac{dF}{dz} = 0.$$

För det andra slaget af kurvaturlinier har man att substituera eqvationerna (8), (9) och (11) uti den förra af eqvationerna (4), hvilket efter några enkla reduktioner ger

$$y' = \frac{a(a'b - ab') - c(b'c - bc')}{c(c'a - ca') - b(a'b - ab')} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dessa kurvaturlinier äro nu till sin form beroende på funktionsformerna hos a, b, c och d, d. v. s. af det sätt hvarpå det envelopperande planet rör sig. Differential-eqvationen (14) kan derför ej integreras genom *blotta* antagandet, att ytan är developpabel. Men man kan deremot utan svårighet verifiera, att de båda slagen af kurvaturlinier skära hvarandra vinkelrätt, d. v. s. äro hvarandras rätvinkliga trajektorier. Man har nämnligen, om λ, μ och ν äro det ena slagets kurvaturliniers tangents vinklar med koordinataxlarna och λ', μ' och ν' motsvarande qvantiteter för den andra gruppen,

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{dx} = \frac{\mathrm{Cos}\,\mu}{dy} = \frac{\mathrm{Cos}\,\nu}{p\,dx + q\,dy}$$

d. v. s.

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda}{b'c - bc'} = \frac{\mathrm{Cos}\,\mu}{c'a - ca'} = \frac{\mathrm{Cos}\,\nu}{a'b - ab'}$$

och

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\lambda'}{c(c'a-ca')-b(a'b-ab')} = \frac{\mathrm{Cos}\,\mu'}{a(a'b-ab')-c(b'c-bc')} = \frac{\mathrm{Cos}\,\nu'}{b(b'c-bc')-a(c'a-ca')},$$

hvaraf följer

$$\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\lambda' + \mathrm{Cos}\,\mu\,\mathrm{Cos}\,\mu' + \mathrm{Cos}\,\nu\,\mathrm{Cos}\,\nu' = 0,$$

som bevisar satsen.

Anm. Om α blott ingår i den ena af eqvationerna (8) och (9), så erhålles icke (10) men väl (12), hvadan (10) icke gäller för alla developpabla ytor. Då blir den ena af eqvationerna (13) identisk, men den andra ger fortfarande de kurvaturlinier, som sammanfalla med de rätliniga generatriserna. Vi förbigå det fall, då α blott ingår i en gemensam faktor till (8) och (9); ty då erhålles ingen envelopp i egentlig mening. Man får nämnligen då endast ett visst läge af det rörliga planet, och för detta, såsom varande en developpabel yta, gäller eqvationen (12), men kurvaturlinierna blifva indeterminerade.

Satser, lösta af J. ÅKERLUND,

elev vid Gefle elementarläroverk.

1. *Att finna summan af de r första termerna uti serien*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots$$

Betecknas summan med S, blir

$$S-1=-\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\dots+\frac{1}{r(r+1)}\quad\dots\quad(1).$$

Då man för reduktionen använder formeln

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{n}{n+1},$$

så får man lätt

$$S-1=-\frac{1}{r+1}$$

och således

$$S=\frac{r}{r+1}.$$

Anm. Gränsvärdet för $S-1$ är tydligen $=0$ och för $S=1$, då r växer obegränsadt.

2. *Att finna gränsvärdet för x^x, då x från den positiva sidan närmar sig 0.*

Man har

$$x^x=e^{x\,lx}.$$

Det beror således på att finna gränsvärdet för $x\,lx$.

Sättes

$$x=1-y,$$

så blir

$$xlx = (1-y)l(1-y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \ldots +$$

$$+ \frac{y^2}{1} + \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{3} + \frac{y^5}{4} + \ldots,$$

hvilken serieutveckling är tillåten för $y < 1$. Således

$$xlx = -\frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{3.4} + \frac{y^5}{4.5} + \ldots \qquad (2),$$

då x närmar sig 0 närmar sig y till 1 och serien (2) till att blifva densamma som serien (1), hvars gränsvärde är 0.

Således blir gränsvärdet för

$$x^x = e^0 = 1.$$

3. Från en punkt B drages en rät linie; från två andra punkter A och C drages linier $\perp$ den första. Låt D och E vara fotpunkterna af dessa linier.

I hvilken rigtning skall man draga linien B för att rektangeln $BD.BE$ skall blifva ett maximum?

d:o » » » minimum?

rektangeln $AD.CE$ » » » maximum?

d:o » » » minimum?

Vi sätta

$$\wedge ABC = v, \quad AB = a, \quad BC = b,$$

vidare

$$\wedge ABE = u,$$

då blir

$$\wedge CBE = v - u,$$

$$BD = a \operatorname{Cos} u, \quad BE = b \operatorname{Cos}(v-u),$$

$$AD = a \operatorname{Sin} u, \quad CE = b \operatorname{Sin}(v-u).$$

Ytan af rektangeln $BD.BE$ blir då

$$Y_1 = ab \operatorname{Cos} u \operatorname{Cos}(v-u)$$
$$= ab(\operatorname{Cos} v \operatorname{Cos}^2 u + \operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} u)$$

och ytan af rektangeln $AD.CE$ blir

$$Y_2 = ab \operatorname{Sin} u \operatorname{Sin}(v-u)$$
$$= ab(\operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} u - \operatorname{Cos} v \operatorname{Sin}^2 u).$$

Den första derivatan af Y_1 är

$$Y'_1 = ab(\operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} 2u - \operatorname{Cos} v \operatorname{Sin} 2u)$$

och den andra

$$Y''_1 = -ab(\mathrm{Sin}\, v \,\mathrm{Sin}\, 2u + \mathrm{Cos}\, v \,\mathrm{Cos}\, 2u).$$

Den första derivatan af Y_2 är

$$Y'_2 = ab(\mathrm{Sin}\, v \,\mathrm{Cos}\, 2u - \mathrm{Cos}\, v \,\mathrm{Sin}\, 2u) = Y'_1 .$$

Således inträffa maxima och minima samtidigt för begge rektanglarne.

$$Y'_1 = Y'_2 = 0, \qquad \text{då} \qquad \mathrm{tg}\, v = \mathrm{tg}\, 2u$$

eller då

$$2u = v + k\pi .$$

Då k är ett udda tal, är

$$Y''_1 = Y''_2 = +ab.$$

Då k är ett jemnt tal, är

$$Y''_1 = Y''_2 = -ab.$$

Således angifva derivatorna ett maximum för begge rektanglarne, då linien BD delar $\wedge ABC$ midt i tu, och minimum, då den har den deremot vinkelräta rigtningen.

Vid den förra rigtningen är

$$Y_1 = ab\,\mathrm{Cos}^2 \frac{v}{2}, \qquad Y_2 = ab\,\mathrm{Sin}^2 \frac{v}{2}.$$

Vidare är

$$Y_1 = -ab\,\mathrm{Sin}^2 \frac{v}{2}, \qquad Y_2 = -ab\,\mathrm{Cos}^2 \frac{v}{2}.$$

Således angifva derivatorna maxima och minima ej efter den numerära storleken, utan äfven efter tecknen. I sjelfva verket är den numerära storleken ett maximum äfven, då derivatorna angifva minimum. Det numerära minimum är $= 0$, och det inträffar

1) för rektangeln $BD \,.\, BE$, då

$$\mathrm{Cos}\, u = 0 \qquad \text{och då} \qquad \mathrm{Cos}\,(v - u) = 0$$

eller

$$u = (k + \tfrac{1}{2})\pi \qquad \text{»} \qquad u = v + (k + \tfrac{1}{2})\pi ;$$

2) för rektangeln $AD \,.\, CE$, då

$$\mathrm{Sin}\, u = 0 \qquad \text{och då} \qquad \mathrm{Sin}\,(v - u) = 0$$

eller

$$u = k\pi \qquad \text{»} \qquad u = v - k\pi .$$

Således blir rektangeln $BD \,.\, BE = 0$ eller minimum, då $BD \perp BA$ och $\perp BC$; rektangeln $AD \,.\, CE = 0$, då BD sammanfaller med BA eller BC.

Anm. Storleken af a och b har således intet inflytande på resultatet.

Lösning af sats 14, Afd. II.

Den första eqvationen

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{x+1}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

kan transformeras till

$$\left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x(x+1)}}\right) = 0 \,.$$

Den sönderfaller således i eqvationerna

$$\sqrt[n]{x(x+1)} = 1\,^* \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x+1} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Ur eqv. (2) fås värdena

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

utom för $n = \infty$, då hvilket värde som helst på x satisfierar eqv. (1).

Eqv. (3) kan sättas

$$x = \left(-\sqrt[n]{x+1}\right)^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

---

* Här har förf. blundat, i det han tillåtit sig att utan inskränkande vilkor tillämpa regeln

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\,.$$

Man har ju t. ex. ej ens

$$\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}\,,$$

enär det ej eger rum, att

$$-1 = 1\,.$$

F. W. H.

Då n är ett jemnt tal, får eqv. (4) utseendet

$$x = x + 1,$$

hvilken eqv. är orimlig.

Då n är ett udda tal, får eqv. (4) utseendet

$$x = -(x + 1),$$

hvilken eqv. satisfieras af värdet

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

Är n ett jemnt tal blifva rotmärkena i eqv. (1) reella endast för värdet x_1; värdet x_2 gör dem imaginära, men satisfierar * dock eqvationen. Då n är ett udda tal, satisfieras eqv. (1) af både x_1, x_2, x_3 och rotmärkena blifva reella för alla tre värdena.

Den andra eqvationen

$$\sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{x+1}}$$

---

* Häri misstager sig förf., ty vid insättning af värdet på x_2 i (1) finner man, att

$$\text{venstra ledet af (1) blir} = \left(\sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \cdot \sqrt[n]{-1},$$

$$\text{men högra ledet af (1)} = \left(\sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{-1}}.$$

Nu är dock ej

$$\sqrt[n]{-1} = \frac{1}{\sqrt[n]{-1}}$$

ens för $n = 2$, ty ej är $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ $(= -\sqrt{-1})$.

På grund häraf måste värdet x_2 förkastas.

Anm. Oaktadt förf. här gjort ett misstag, hembära vi dock honom vår hyllning för den skicklighet han visat att lösa uppgifter — ej allenast sådane som ligga inom elementarmatematikens område, utan äfven sådane, som ligga derutöfver.

F. W. Hultman.

kan transformeras till

$$\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x+1}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x(x+1)}}\right) = 0 .$$

Denna eqv. sönderfaller uti eqv. (2) och eqv.

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x+1} = 0,$$

hvilken är orimlig.

Sats af H. LAGERDAHL.

16. Att lösa eqvationen

$$(7x^4 - 11x^2 + 13)^2 + (x^2-1)^2 = (12x^4 - 19x^2 + 262617) . 10 + x^2.$$

Sats af J. E. CEDERBLOM.

17. Att integrera eqvationen

$$ax^2 \frac{d^2x}{d\alpha^2} + b \operatorname{Sin} \alpha \frac{dx}{d\alpha} + c \frac{dx^2}{d\alpha^2} + f . x^2 + g . \operatorname{Sin}^2 \alpha = 0 .$$

AFDELNING IV.

Anmälda Skrifter.

1. NYBERG, B. A. *Elementarkurs i räkning, metodiskt framstäld. Första kursen:* hufvudräkning med 774 exempel. Helsingfors 1869.

Det är oss ett kärt nöje att få anmäla ett alster från vårt broderland Finland. Vi göra det så mycket heldre, då detta alster är af en så gedigen natur som det i fråga varande. Finland står framför Sverige derutinnan, att det äger ett seminarium för utbildande af lärare. Inflytandet häraf visar sig också på beskaffenheten af der utkommande läroböcker. Denna lärobok, som är skrifven i enlighet med metoden vid normalskolan i Helsingfors, vittnar nogsamt om väl genomtänkta goda pedagogiska åsigter.

Den nu utgifna kursen af förf:s lärobok är indelad i fyra kapitel, af hvilka det första behandlar talcykeln 1—10, jämnte de jämna tiotalen, det andra talcykeln 11—100, det tredje tresiffriga tal. Det fjerde kapitlet, hvilket skall studeras samtidigt med de tre föregående, utgöres af ett bihang innehållande räkneuppgifter. Förf. begagnar den äfven hos oss på senare tider brukliga sokratiskt-hevristiska mteoden. Hans arbete är till sin uppställning ganska originelt. Den första paragrafen har till öfverskrift talet 1, den andra talet 2, den tredje talet 3 o. s. v., den tolfte talet 12 o. s. v. För att gifva ett begrepp om hans metod, välja vi § 2.

"Talet (antalet) två (2).

2 = 1 och 1, eller 2 gånger 1.

Huru många enheter ingå i talet 2? Sv. I talet 2 ingå två enheter.

Huru mycket är talet 2 större än talet 1? Sv. Talet 2 är en enhet större än talet 1.

Huru mycket är talet 1 mindre än talet 2?

Huru många ggr bör talet 1 tagas, för att ge talet 2?

Huru många ggr är talet 2 så stort som talet 1?

Huru många ggr ingår 1 i 2?

Huru mångte delen (= hvilken del) af 2 är 1?" o. s. v.

Här följa ytterligare 11 frågor. Ur bihangets hithörande 34 räkneuppgifter afskrifva vi följande fyra:

4. Aina och Lasse hemkomma från bärskogen med hvar sin rifva smultron, som de öfverlemna åt sin mamma till middagen. Hvem af dem har hemtat mera bär, och huru mycket mera än den andra, då vi veta, att Lasses rifva innehöll en kanna och Ainas ett stop?

10. Nygårds Kajsa har en kanna bär till salu. Man betalar henne en femtio-penni-slant för stopet; huru många sådana erhåller hon då för kannan?

11. Huru många tunnor potäter går det åt för dig i månaden? frågar fru T. af fru L. Kära du! jag köpte 2 tunnor i början af september, och i dag, den 2:dra november, togs det sista deraf till middagen. Huru många tunnor i månaden åtgå då för fru L?

24. Vi veta, att Gustafs äldre broder Knut är en sådan karl, att han orkar bära ett helt lispund ett godt stycke väg. Huru många ggr fram och tillbaka får han då gå mellan stugan och magasinet, om han derifrån vill hemta 2 lispund mjöl till stugan?

Bland exemplen till talet 9 anmärka vi följande:

Hvilket är det tal, hvars sjundedel ökad med 5 är lika med två tredjedelar af 9?

Särdeles intressant är det att se, huru enkelt förf. löser och gör begripligt uppgifter, hvilka torde synas rätt svåra för dem, hvilka äro vana vid endast den gamla räknemetoden, t. ex.

Brukspatron H. skänker 36 mark till socknens fattigkassa att utdelas mellan tre af honom uppgifna fattiga familjer till den snart stundande julen; huru mycket erhålla de hvardera, då han derjämnte bestämt, att den talrikaste af dem bör erhålla dubbelt så mycket som den fåtaligaste, och denna två tredjedelar af det, som den tredje får? Sv. en får 16 mark, en annan 12 mark och en 8 mark.

Förf. uppenbarar genom sina exempel, att han är barnvän och att han är noga bekant med allmogens seder och bruk — egenskaper, hvilka alltid äro nyttiga för en pedagog. Ett par exempel äro tillräckliga att bekräfta detta.

Ex. 27 (talet 7). Vid kräftbäcken äro en gosse och en flicka upptagna med att kräfta. Huru många kräftor erhålla de hvar vittjning tillsammans, då gossen, som kräftar med käppar, får 2 stycken, och flickan, som begagnar sänkhåfvar, upptager 5 stycken hvarje gång?

Ex. 94. (tabulan med 9). En skärgårdsbo säljer 3 stycken 2-punds laxar för 4 mark pundet, men han gör sjelf följande uppköp: 1 matta mjöl för 27 mk, och 2 kannor godt bränvin för 6 mk kannan; huru mycket har han qvar af de influtna medlen, då ytterligare 8 mark deraf afgått till hans uppehälle på stället der han afyttrat sina varor?

Som vi se, sätter förf. barnet genast in i alla de räknesätt, som kunna förekomma. Så t. ex. inskränker han ej de första räkneöfningarna till endast addition och subtraktion, utan upptager äfven sådana, som höra till multiplikation och de båda slagen af division, ja äfven sådana, som pläga lösas medelst eqvationer af första graden. Detta är alldeles i öfverensstämmelse med vår åsigt, hvilken vi haft tillfälle att uttala vid anmälan af några aritmetiska läroböcker i denna tidskrifts förra årgång. Utan tvifvel skola många anse denna metod mycket för svår. Men väljer man exemplen enkla och ur lifvet, så att lärjungen finner intresse i dem och kan liksom få fäste i dem, skall man få se sina bemödanden enligt denna metod krönta med lycklig framgång.

Vi lyckönska förf. till hans goda arbete, hvilket på ett synnerligen tydligt sätt uppenbarar, att förf. med kärlek är fästad vid undervisningskallet. Måtte detta förf:s välskapade barn få inträde litet hvarstädes i norden och måtte det snart efterföljas af sin väntade och efterlängtade tvillingbroder!

2. Guldberg, A. S. *Regningsarterne og deres Anvendelse*, nærmest udarbeidet for *Lærerne* ved vore Borger- og Almuskoler. Christiania 1868. Pris 30 skilling.

Dr Guldberg har i detta arbete utfört en svår och ömtålig uppgift, då han utgifvit en lärobok för *lärare* i ett ämne, der nästan hvar och en anser sig fullt hemmastadd. I denna sin uppgift har förf. lyckats synnerligen väl. Öfverallt har han vetat att framhålla de egentliga svårigheterna, dervid väl åtskiljande hufvudsak från bisak. Sedan han grundligt genomgått någon punkt, repeterar han den i raska drag. Stilen är ledig, enkel, behaglig; bevisen äro stränga, till botten gående. Vi hafva haft en synnerlig njutning af förf:s fängslande bok.

Ehuru förf. på det hela taget på ett utmärkt sätt redogjort för de olika räknesätten och framstält de pedagogiskt rigtigaste metoderna för undervisningen, är det dock tvenne punkter, — läran om division i hela tal och läran om multiplikation i bråk, — i hvilka förf. lyckligare kunde hafva utfört sin sak. Vi vilja nu redogöra för dessa och börja med

1. *Division i hela tal.*

Förf. säger: «At dividere en Størrelse med en anden er at finde en tredie Størrelse saa stor, at den multipliceret med den anden giver første. . . . Saaledes er:

$$20:4 = 5,$$

thi man har

$$5 \times 4^* = 20.$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

Oprindeligt stiller Division sig som en Delen, hvoraf ogsaa Navnet, og man kan meget vel definere Division som den Opgave at dele et givet Tal i saamange ligestore Dele, som et andet Tal angiver.

* Detta betyder enligt förf. 5 taget 4 gånger. Detta beteckna vi heldre 4×5, ty man säger ju vanligen 4 ggr 5, liksom man i prosa säger heldre blå gossar än "gossar blå".

At dividere 20 med 5 er da detsamme som at dele 20 i 5 lige store Dele; da disse 5 Dele tilsammen maa være lig 20, saa ses, at Qvotienten Gange Divisor är lig Dividenden, og man føres tilbage til den først opstillede Definition.

For de benævnte Tals Vedkommende er altid Divisor ubenævnt, men Dividend och Qvotient *af samme Art.* Skal 20 sk. deles ligelig mellem 5 Personer, da sker dette ved at dividere med det ubenævnte Tal 5, och Qvotienten bliver 4 sk., altsaa *ensartet* med Dividenden.

Der kan imedlertid forekomme de Tilfælde, hvor ialfald *tilsyneladende* Divisor er benævnt. Har man saaledes følgende Opgave:

Byen C. har 35000 Indbyggere, Byen D. har 7000 Indbyg., hvormange Gange større er da Antallet af Indb. i C end i D? . . . .

Man kunde her fristes til at antage Dividend og Divisor for benævnte Størelser af samme Art, hvis Qvotient da blev et ubenævnt Tal 5; men det er urigtigt at betragte Sagen paa den Maade, i det man derved kommer i Strid med Definitionen på Divisio. Det er forstaaeligt at dele 35000 Mennesker i 7000 ligestore Dele, hvorved kommer 5 Mennesker paa hver Del, men det er uforstaaeligt og meningsløst at dele 35000 Mennesker med 7000 Mennesker. Enkelte have søgt at klare denne Vanskelighed ved at opstille en ny Definition paa Divisio og sige: at dividere 35000 M. med 7000 M. er at undersøge, hvormange Gange det sidste Antal indeholdes i det første.

Herimod maa nu først indvendes, at man ikke har Ret til at opstille mere end en Definition, men dernæst — hvad der er det Væsentlige — en saaden Stræben efter at forklare Vanskeligheden er at gaa over Bækken efter Vand.

Ved denne og utallige Opgaver af lignende Slags har man nemlig ikke *umiddelbart* at anvende Divisionen, men man har først at paavise, at det Tal, der søges, uden Hensyn til om det er benævnt eller ubenævnt, erholdes ved Division af to ubenævnte Tal, heraf det ubenævnte Tal 35000 med 7000. Det er jo nemlig indlysende, at i denne Opgave er Benævningen aldeles *ligegyldig;* Resultatet var bleven det samme, om der istedetfor Mennesker var staaen Hunde eller Heste eller Kør eller hvad som helst. Men er Benævningen ligegyldig og altsaa uden Betydning, da er det klart, at man i Regneoperationen har Ret til at betragte Tallene som ubenævnte.«

Så långt författaren. Förf. har här gjort ett misstag, då förf. säger, att vid division divisorn nödvändigt måste vara ett obenämndt tal. Förf:ns anmärkning, att i motsatt händelse råkar man i strid med definitionen på division, bevisar ingenting annat, än att antingen höra exempel sådana som förf. anfört ej till division, eller ock är definitionen för trång. Då den förra möjligheten här är den rigtiga, måste sål. förf:ns definition vara för trång. Den rigtiga och generela definitionen har förf. sjelf uppgifvit, ehuru blott i förbigående, då förf. säger: "man kan betragte Division som en multiplikationsopgave, hvor man har givet Produktet g den ene Faktor og søger den anden Faktor." Låta vi nu produkten vara benämnd, så kan således antingen den benämnde eller obenämnde faktorn sökas. På grund häraf sönderfaller uppgifterna under division i 2 slag: 1) sådane, der den obenämnde faktorn sökes (hit hör den art af definition, som förf. behandlar), 2) sådane, der den obenämnde faktorn sökes (hit hör det af förf. angifna exemplet om de 35000 och 7000 menniskorna). Att förf. kan bringa uppgifterna af det senare slaget att lösas, såsom om de hörde under det förra slaget af frågor, beror ej såsom förf. tror derpå, att det är likgiltigt hvad benämning de gifna hafva och att de således kunna vara obenämnda, utan derpå, att i st. f.

a gånger b menniskor, hästar, kor o. s. v.

man kan sätta

b gånger a menniskor, hästar, kor o. s. v.

Vi öfvergå nu till den andra punkten

2. *Multiplikation i bråk, då multiplikatorn är ett bråk.*

Förf. säger: «Her strækker ikke den sædvanlige Definition paa Multiplikatio til. At multiplicere et Tal med et andet er jo, at sætte det første saa mange Gange som Addend, som det andet indeholder Enheder; men er det andet, Multiplikator, en ægte Brøk, saa indeholder den slet ingen Enheder. Hvorledes skal man da hjælpe sig? Skal man udenvidere sige: det er en Umulighed at multiplicere med en ægte Brøk, thi det strider mod Multiplikationens Begreb?

Herpaa maa svares: Hvis ikke Begrebet Multiplikation med Brøk opfattes anderledes end med helt Tal, da er det en Umulighed, og Udtryk som $4 \times \frac{2}{3}$ ere uden Mening, thi det er en Urimelighed at sætte 4 saa mange Gange som Addend som $\frac{2}{3}$ indeholder Enheder, da denne Brøk slet ingen Enheder indeholder.

Dette, at den gamle Definition paa Multiplikatio ikke lader sig anvende, naar Multiplikator er en Brøk, har ledet nyere Forfattere — f. Ex. Professor Dr O. J. Broch — til at anse det her absolut nødvændigt at indføre en ny Definition eller at udvide den gamle til at indeslutte et nyt Begreb. Denne Definition kan imidlertid — som Dr Broch bemærker — ikke vælges vilkaarlig, men saaledes, at den falder sammen med den gamle, naar Multiplikator er en uægte Brøk, der indeholder lutter Hele.

Da nu f. Ex. $4 \times \frac{15}{3}$ er lig $4 \times 5 = 20$, maa Definitionen vælges saaledes, at $4 \times \frac{15}{3}$ virkelig bliver 20. Detta sker nu let ved at antage følgende Definition:

En Størrelse (d. v. s. et Tal, helt eller bruddent) multipliceres med en Brøk ved at multiplicere samme med Tælleren og dividere det Udkomne med Nævneren.

Utan att i någon mon vilja förneka rigtigheten af detta förfaringssätt, så mycket mer, som det är i full öfverensstämmelse med det förfaringssätt, som man begagnar vid dylika fall i öfriga delar af matematiken (t. ex. i läran om potenser, i läran om differentiering vid flere oberoende variabla), anse vi dock, att man kan generalisera definitionen för multiplikation så, att den sätter nybörjaren mera in i betydelsen och väsendet af multiplikation i bråk, än den förf. begagnat. Man vet nämnligen, att vid multiplikation i hela tal gäller den egenskapen, att för konstant multiplikand är produkten proportionel mot multiplikatorn. Vi bestämma nu multiplikation i allmänhet (multiplikatorn må vara hvad storhet som helst) att vara det räknesätt, der för konstant multiplikand produkten är proportionel mot multiplikatorn. Skall nu a multipliceras med $\frac{1}{n}$, bör produkten enligt nyssnämnda bestämning bli $\frac{1}{n}$ af hvad man erhåller, om man multiplicerar a med 1, d. v. s. $= \frac{1}{n}$ af a, och således, om man multiplicerar a med $\frac{m}{n}$, bör produkten bli $= \frac{m}{n}$ af a.

Denna bestämning leder således till följande betydelse af multiplikation i bråk: *Med* $\frac{m}{n}$ *gånger* a *eller, analytiskt uttryckt, med*

$$\frac{m}{n} \cdot a \,^*$$

menas $\frac{m}{n}$ *af* a.

Vi hafva velat framställa detta mera som ett alternativ än som en anmärkning mot förf:s för öfrigt ganska skarpsinniga sätt att utvidga definitionen på multiplikation.

Vi sluta med att tacka förf. ännu en gång för det angenäma nöje läsningen af hans bok skänkt oss och önska, att hans arbete äfven i den öfriga delen af norden utom Norge måtte få så många läsare som möjligt.

3. Björling, C. F. E. (junior). *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule, soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationelle et entière de la distance d'un centre fixe. (Grunerts Archiv för 1869).*

I en lättläst afhandling visar förf., huru man skall afgöra, om rörelsen hos en molekyl, som är underkastad en kraft af nyssnämnda beskaffenhet, är oscillerande, konvergerande mot en bestämd punkt eller aflägsnande sig i oändligheten. Han har bevisat, att för detta erfordras endast kännedom af rötterna till eqvationen

$$f(x) = 0,$$

der $f(x)$ uttrycker den lag, enligt hvilken kraften verkar.

Metoden grundar sig ytterst på ett teorem angående sambandet emellan en hel algebraisk funktions och dess derivatas rötter, ett teorem hvilket han år 1868 framstält i samma tidskrift.

Särskildt använder han sin teori på de båda fall, då attraktionslagen är

$$1)\quad f(x) = k(x-a)(x-b),$$

$$2)\quad f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Det är märkvärdigt att se, huru man för dessa och dylika fall nästan utan all räkning kan afgöra rörelsens beskaffenhet. — Våra mekaniska läroböcker innehålla merendels ingen annan händelse, än för $f(x) =$ konstant, d. v. s. $f(x)$ af nollte graden. Herr Björling tillåter $f(x)$ att vara af hvad grad som helst.

F. W. Hultman.

Svar och rättelser med anledning af anmälda och granskade skrifter.

1. *Phragméns trigonometri.*

«I anmälan af min plana trigonometri, sid. 291 årg. 1868, ställer referenten till mig den frågan, hvarföre jag först i sista kapitlet af andra afdelningen upptagit formeln

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A.$$

Jag vill nu besvara denna fråga.

---

* Förf. skulle skrifva: $a \cdot \frac{m}{n}$.

Syftet med förra afdelningen har varit att lemna en enkel, för latinlinien tillräcklig kurs i trianglars beräkning, och jag har dervid uppstält såsom mitt mål att i denna kurs

endast omnämna Sinus, Cosinus o. s. v. för spetsiga vinklar;

icke upptaga andra formler än sjelfva formlerna för trianglars beräkning;

genom geometrisk konstruktion erhålla dessa af figuren och definitionerna omedelbart användbara för beräkning med logaritmer.

I fråga varande formel var nu icke *nödvändig* för denna kurs, kunde i denna ej framställas annat än i form af *två* olika formler och ej användas vid räkning med logaritmer. Jag lät den derföre vänta till andra kursen.

I denna ansåg jag lämpligast att låta alla tillägg till läran om trianglars beräkning följa i ett sammanhang och naturligtvis då i slutet, emedan jag derigenom kunde få draga förmon af det förut genomgångna. Ingenting hindrar dock att läsa detta kapitel med förbigående af det fjerde och femte, endast man lemnar utan afseende de få häntydningarne till användande af hjelpvinklar.

I sammanhang härmed vill jag anmärka, att den i detta kapitel (i 86) upptagna formelsamling ej egentligen är härledd ur de formelsystem, som referenten angifver, utan såsom det också angifves, ur formlerna i 82.«

LARS PHRAGMÉN.

(Ur enskildt bref den 24 Jan. 1869).

2. *Bergii räknebok.*

Till min anmälan af Bergii elementarkurs i räknekonsten finner jag mig skyldig göra följande rättelser och tillägg.

Det hette der, att Otterström och Nyström föregått Bergius i att uppställa en räknebok uppstäld så, att eleven förstode räknelagarne. Förhållandet är följande: Otterströms lärobok utkom 1849, Bergii 1850 och Nyströms först år 1852. Nyströms lärobok utkom således först efter Bergii. Till ofvanstående förtjenst har Bergius äfven lagt den, att han i Sverige (så vidt man undantager Stjernhjelms handskrifter och Björks lärobok af år 1643, varit den, som först * i en utförligare lärobok stält läran om decimaler i sammanhang med läran om hela tal. Vidare är Bergius den, som först infört hufvudräkning i vårt land.

Till dessa förtjenster kunna vi äfven lägga följande trenne:

1. Bergius har först i Sverige infört geometrisk åskådningslära.

2. Näst Mundt-Bergroth och Siljeström är Bergius den, som i geometri först infört en metod, der satserna äro stälda i ett organiskt sammanhang.

3. Bergius är den förste och för närvarande ende svensk som i en geometrisk lärobok infört den s. k. nyare geometrien och de generela bevis hvaraf den är mägtig.

Anm. I händelse jag i afseende på prioriteten angående författarskapet till någon af dessa punkter skulle hafva misstagit mig, är jag tacksam för de rättelser, som i detta hänseende meddelas mig.

Warberg i Juni 1870.

F. W. HULTMAN.

---

* Vi erinra oss ej med säkerhet, när Wredes lära om decimalräkning utkom.

Utkomne arbeten.

1. *Leksell, C. M.* Förberedande kurs i fysiken. Stockholm 1869.

2. *Björling, E. G.* Elementarlärobok i algebra. 8:de uppl. Förra delen. Westerås 1868. Senare delen. Förra häftet. Westerås 1869. Senare häftet 1870.

3. *Sexe, S. A.* Om nogle Punkter i den elementære Arithmetik. Christiania 1870. 60 öre.

4. *Westergård, P. C.* Anvisning att vid sifferräkning begagna P. C. Westergårds räknemaskin. Halmstad 1870. Pris 3,50.

5. *Theorell, A. G.* Proportionslärans elementer. Stockholm 1870.

6. *Bergius, A. T.* Elementar Geometri. Andra delen: Plan geometri. Stockholm 1870.

7. *Guldberg, C. M.* Lærebog i stereometri. Christiania 1870.

8. *Mundt, C. E.* Elementarkurs i geometrien, bearbetning af J. E. Bergroth. Helsingfors 1869. 3,75 rdr.

9. *Møller, C. F. C.* Læren om Rumstørrelser. Første Del: Plangeometri. København 1870.

10. *Steen, A.* Ren Mathematik (algebra), indeholdende det elementære Kursus, 3:e Udgave. Københ. 1862.

11. — — Elementær Algebra, indeh. læren om potents, rod og logarithme samt Ligninger. Københ. 1868.

12. — — Elementær Plangeometri. 1865.

13. — — Oversigt over Hovedformerne i Rummet som inledn. til Geometrien. 1868.

14. *Schjødte, C. A.* Tillæg til prof. A. Steens elementære Algebra. Kjøbenh. 1859.

15. *Steen, A.* Elementær Stereometri. Kjøbenh. 1867.

16. *Mundt, C. E.* Lærebog i den elementære stereometrie tilligemed den sphæriske trigonometri. 3:e Udg. Kjøbenh. 1868.

17. — — Lærebog i den elementære plangeometrie tilligemed den plane trigonometrie. 7:e Udg. Kjøbenh. 1867.

18. *Jamin, M. J.* Petit traité de Physique (enligt den fysiska vetenskapens nu varande ståndpunkt). Paris. Gauthiers-Villars, 1870. 2 voll. 6,40 rdr.

---

19. *Martin, C. R.* Behandling af teorem ang. 3 plana räta liniers sammanträffande i en punkt. Akad. afh. Ups. 1868.

20. *Sundell, A. F.* Undersökning om elektriska disjunktionsströmmar. Akad. afhandling. Helsingfors 1870.

21. *Steen, A.* Integration af differentialligningen

$$P.\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + R\frac{dy}{dx} + S = 0$$

ved Faktorer alene indeholdende x og y. 1863.

22. — — Bidrag til Theorien af Integration af Differentialligninger af første orden og første Grad. 1864.

23. — — Om de lineære Differentialligninger, hvis partikulære Integraler alle ere af samme form. 1866.

24. — — Bemærkninger om Sandsynlighedsregningens Anvendelse til at maale Styrken af de Aarsager, der begunstige et Phænomen, som uafbrudt har vist sig gjentagne Gange. 1866.

25. — — Om Integrationen af Differentialligninger, der føre til Additionstheoremer for transcendente Funktioner. Kjøbenh. 1868.

26. *Steen*, *A.*, Om Aendringen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af første Art.
Anm. Afhandl. 21—24 stå i Oversigt over d. K. D. V. Selsk. Forh.
„ 25—26 „ Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række.

---

27. *Tychsen*, *Camillo.* Tidsskrift for Mathematik, årgångarne 1868, 69, 70 (3 häften), à 4,25 årgången.

28. *Grunert*, *J. A.* Archiv der Mathematik und Physik. 50:ster Theil. (1868 är således ett jubelår för tidskriften).

Vi skola med det första återkomma till en närmare redogörelse för flere af ofvanstående arbeten. F. W. H.

Till Hrr Författare.

Red. anser sig böra fästa hrr författares uppmärksamhet på följande detta år början arbete.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques; rédigé par M. G. Darboux, avec la collaboration de MM. Hoüel et Lœwy. (Prix pour un an, 12 num., 15 fr., Paris).

Med afseende på planen för detta arbete yttras: «Cette publication comprend trois parties principales: 1⁰ comptes rendus de livres; 2⁰ analyses de Mémoires; 3⁰ traductions de Mémoires importants et peu répandus et Mélanges scientifiques.«

Till red. har med afseende på denna Bulletin från prof. J. Hoüel i Bordeaux ingått följande skrifvelse:

"*Le concours que nous réclamons de votre bienveillance consisterait à nous communiquer une liste des ouvrages de quelque valeur qui paraissent soit en Suède, soit en Norvége, soit en Finlande ou en Danemark, avec quelques indications proportionnées à l'importance de l'ouvrage. Vous nous aideriez ainsi très-efficacement dans l'accomplissement de l'œuvre internationale que nous avons entreprise, et pour laquelle nous n'aurons pas trop que le concours de tous les savants zélés pour la diffusion de la Science.*"

Red. tror sig lämpligast gå prof. Hoüels önskan till mötes genom att uppmana hrr författare, som önska få sina arbeten anmälda i Bulletinen, att insända dessa till Bulletinens redaktion eller företrädesvis till prof. Hoüel, hvilken är kunnig i de skandinaviska språken.

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen v. t. 1870.

För latinlinien.

1. *Att konstruera ett parallelltrapezium, då dess ytinnehåll, afståndet mellan de parallela sidorna och samtlige vinklarne äro gifna.*

2. *Två koncentriska cirklar äro gifna. I den större skall en korda dragas, så att hon af den mindre cirkelns periferi delas i tre lika stora delar.*

3. *Bevisa, att om man i en qvadrat åt samma led förenar hvarje sidas*

ena ändpunkt med midtpunkten på närliggande sida, så uppstår en ny qvadrat, hvars yta är $\frac{1}{5}$ af den gifna qvadratens yta!

4. Inskrif i en gifven triangel en annan, på en gång likbent och rätvinklig, så att dess hypotenusa blir vinkelrät mot den gifna triangelns bas.

5. Att upprita en triangel, då basen samt skilnaden och förhållandet mellan de båda andra sidorna äro gifna.

6. Två parallela linier skäras af en tredje. Konstruera en cirkel, som tangerar hvardera af dessa tre linier!

7. Tvenne icke koncentriska cirklar äro gifna. Att upprita en ny cirkel, så att den tangerar de båda gifna och har en gifven radie.

8. Tre räta linier äro gifna. Att dela den ena af dem i tre sådana delar, att den första delen förhåller sig till den andra, som den andra till den tredje och som den andra gifna linien till den tredje gifna.

---

9. Solvera eqvationen $x^2 - 4\sqrt{x^2 - 7x + 12} = 7x - 12$.

10. Hvilket är maximi eller minimi värdet som expressionen $\frac{2}{2+x} + \frac{2+x}{2}$ *kan erhålla för reella värden på* x?

11. Hvilket vanligt bråk ger, då det förvandlas till decimalbråk, $0{,}031575757\ldots$?

12. En person insätter vid hvarje års början 800 R:dr i en sparbank, som ger $4\,^1/_2$ *procent ränta på ränta. Hur mycket har samme person att lyfta vid 20:de årets slut?*

13. En arrendator, som borde årligen betala sitt arrende med spanmål till ett värde af 840 R:dr, erlade ett år 14 kub.fot mer än det följande året, emedan kub.foten den förra gången var 10 öre billigare, än den senare. Hur mycket spanmål lemnade han hvardera året?

14. Tvenne arbetare kunna gemensamt utföra ett arbete på 35 timmar; men, om de utföra hälften hvar och arbeta efter hvarandra, behöfva de 72 timmar. Hur lång tid behöfver hvardera för att ensam fullborda arbetet?

15. Bevisa, att $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ *är jemnt delbar med* $a + b$, *om* n *är ett helt tal!*

För reallinien.

16. Upprita en cirkel, som går genom två gifna punkter och tangerar en gifven rät linie.

17. Att dela en parallelogram i tre lika stora delar medelst två räta linier, som dragas från en af parallelogrammens vinkelspetsar.

18. I en liksidig triangel skall en annan inskrifvas, så att äfven han blir liksidig och hans yta $^2/_5$ *af den förras.*

19. Att konstruera en triangel, då hans ytinnehåll och tvenne höjder äro gifna.

20. Att i en gifven cirkel inskrifva en 4-hörning, då hans båda diagonaler och den mellan dem belägna vinkeln äro gifna.

21. Om två solida vinklar äro hvardera bildade af tre plana vinklar, och de plana vinklarne i den ena äro lika stora med hvar sin af de plana vinklarne i den andra, bevisa då att de planer, som innehålla lika stora vinklar, hafva samma lutning till hvarandra.

22. Att omkring en cirkel omskrifva ett paralleltrapezium, som har den ena af de parallela sidorna 3 gånger så stor som den andra.

23. Att omkring en cirkel omskrifva en romb, hvilkens yta har en gifven storlek.

24. Att på en sida i en gifven triangel finna en så belägen punkt, att hans afstånd från en af de båda andra sidorna är lika med hans afstånd från den punkt, der den tredje sidan skäres af den henne motsvarande höjdlinien.

---

25. Vid en qvarn med 2 par stenar förmales på båda paren gemensamt 9 tunnor råg på 5 timmar och 36 minuter. Det ena paret mal en tunna råg på 10 minuter kortare tid än det andra paret. Hur lång tid åtgår för att mala en tunna råg på hvardera paret?

26. En rund stock är 30 fot lång, i den ena ändan 1,2 fot och i den andra 1 fot i diameter. På hvilket afstånd från den smalare ändan bör den afskäras för att blifva delad midt i tu?

27. Vinkeln A i en triangel är 90^0, B är $32^0\ 16'$ och ytan 75,5 qv.fot. Hur stor är sidan b?

28. $y = 3x$ *är eqvation för en diameter i den ellips, hvars eqvation är* $5x^2 + 13y^2 = 7$. *Gif eqvationen för konjugatdiametern.*

29. Hvilka värden på x och y satisfiera eqvationerna:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7; \qquad \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 7?$$

30. Hvilket förhållande hafva logaritmerna till hvarandra i de begge systemer, hvilkas baser äro 101 och 1001?

31. Om en sfer, hvars radie $= r$, *är omskrifven af en rät kon, uti hvilken sidan är lika stor med bottnens diameter, i hvilket förhållande stå då sferen och konen till hvarandra?*

32. Vid 1859 års slut utgjorde folkmängden i Stockholm 105747 personer. Under året 1860 föddes derstädes 4239, dogo 3390 och inflyttade 5795 mer än som utflyttade. Under antagande att folkmängdens årliga tillväxt är proportionsvis densamma, som under året 1860, vill man veta, hvilket år Stockholm kommer att ega 250000 innevånare.

---

33. Man har två alldeles lika galvaniska par. Hvartdera parets poler förenas med ett ledningsmotstånd l, som också för båda paren är lika stort. Man finner strömstyrkan i den ena af dessa strömbanor vara S. Huru stor kan strömstyrkan blifva, om de två strömbanorna förenas till en enda?

34. En kon af jern släppes med spetsen förut uti qvicksilfver. Konens höjd är tre tum, jernets specifika vigt 7,6, qvicksilfrets 13,6. Huru djupt sjunker konen?

35. Ett ur, hvars pendels reducerade längd är 3,3 fot vid fryspunkten, går rätt vid denna temperatur. Huru mycket drar sig uret på dygnet, om temperaturen hela tiden är $+ 20^0$ *C.?*

Anm. Pendelämnets längdutvidgningstal för 1^0 *C. är 0,00001; pendeln behandlas vid beräkningen såsom enkel enligt formeln* $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; *g antages till 33 fot.*

36. Tvenne med sina ändar sammanlödda metallstänger, den ena af koppar, den andra af jern, hafva vid 0^0 *en gemensam längd af 5 fot, vid* 100^0 *deremot 5,007 fot. Angif på grund häraf hvardera stångens längd vid* 0^0 *då kopparns längdutvidgningskoëfficient är 0,000018 och jernets 0,000012!*

37. I ett kopparkärl af $^1/_2$ *skålp. vigt, som innehåller 6 skålp. snö af* 0^0, *inströmmar 1,5 skålp.* 100^0 *varm vattenånga. Kommer härigenom* *all snö att smälta? och, om så sker, till hvilken temperatur upphettas det erhållna vattnet?*

Kopparns egentliga värme är $^1/_{10}$; *ångans bundna värme 537 och isens smältningsvärme* $79\,^1/_4$.

38. När inträffar det, att sins emellan konvergerande strålar, som träffa en konvex *spegels yta, efter reflexionen gifva en* verklig *bild?*

39. I en vattensönderdelningsapparat, som befinner sig i en elektrisk strömbana, utvecklas under 3 minuter 4 kubiktum syrgas. Insätter man i denna strömbana ännu ett kärl, innehållande utspädd svafvelsyra, så utvecklas i detta senare på 6 minuter så mycket vätgas, att hans volym vid samma tryck och temperatur som i föregående fallet också utgör 4 kubiktum. Huru förhåller sig strömmens styrka i ena fallet till den i andra?

40. Vid en vertikal rätvinklig triangel är längden på den horizontela kateten gifven. Man begär få veta hypotenusans längd, för att falltiden längs henne må bli så liten som möjligt.

Svar till lösningar af satserna 21—24, 26 sidd. 51 och 52 årg. 1868 gifna af A. E. HELLGREN *.

Sats 21. Han började med 24400 rdr och slutade med 36600 rdr.

Sats 22. Den sökta radien är $= \sqrt{3}$ fot $=$ 1,73 fot. Han är lika stor med en från en godtycklig punkt på den yttre cirkelns periferi till den inre cirkeln dragen tangent. I allmänhet är vid 2 godtyckliga koncentriska cirklar cirkelringens yta $=$ en cirkel, hvars radie är lika stor med tangenten till den inre cirkeln från en godtycklig punkt på den yttre periferien.

Sats 23. Höjden blir $=$ 5,305 fot.

Sats 24. Marmorprismat väger 20 centner 40 skålp. 17 ort.

Sats 26. Efter 10 år eger han 13484,4 rdr.

Svar å sats 40 (Knut Wiksell) af P. W. ALMQUIST och C. Y. N. SVENSON.

Talet är 36.

Svar å sats 133 (af Hans Wersén) gifvet af A. F. PETTERSON **,

f. d. elev vid Katrina lägre elementarläroverk.

Staden hette *Örebro.*

Breflåda.

Dr *Lagerdahl.* Er sats om reciproktal är ej tydligt uttryckt. Var god och sänd mig derföre en ny redaktion af densamma!

Hr *Stenborg.* Eder nätta elliptograf finnes beskrifven i Fogelmarks analytiska geometri. Vi finna derföre ej skäl att beskrifva den i tidskriften.

Hr *Cavallin.* Er lösning å sats 98 är till formen olika men till innehållet sammanfallende med den af Almquist sid. 262 årg. 1868 gifna.

---

* Edra lösningar äro lättlästa. Lösningen på satsen 22 var elegant. Lösningarne af satserna 24 och 26 visade prof på er färdighet i sifferräkning och på er ihärdighet, alldenstund ni redt er utan logaritmer.

** Tack för er lösning! Den var dock mycket för vidlyftig.

F. W. H.

Fig. 12.

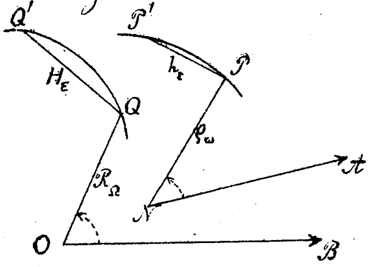
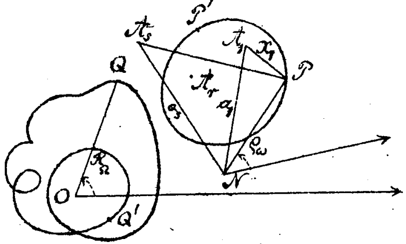


Fig. 13.



att
ıets
ıro-
'nes
ıyc-
let,
'nes
ller
'elf-
två
tan
ken
lar,
var
ıssa
ıtt,
ken
llet
ne-
len-
går
be-
just

all sn
erhålln
B
smältn
3
träffa
3
strömb
denna
las i
tryck
förhåll
4
kateten
henne

Svar

S
S
lika st
till de
koncer
stor n
den yt
S
S
S

Svar

Svar

Dr *La*
oc
Hr *Ste*
an
tic
Hr *Ca*
hå
gi

*
Lösning
ning oc
**

AFDELNING I.

Om de reguliera polyëdrarne.

Af lektor E. G. Björling (senior).

Förevarande uppsats är framkallad närmast deraf, att dess författare icke funnit sig rätt tillfredsställd af ämnets framställning i någon af de — verkligen icke få — läroböcker, som han lärt känna. Sjelfva definitionen synes honom icke rätt lyckligt vald, och — man vet huru mycket beror af det valet. Att, såsom allmänneligen är fallet, i definitionen intaga bestämningen om *de solida vinklarnes kongruens* och sedan gå till väga så, som vore deraf eller åtminstone af den antagna definitionen i sin helhet en *sjelfklar* följd, att lutningen mellan de kontigua facerna två och två är konstant hela polyëdern igenom, är tvifvelsutan förhastadt: man synes då verkligen hafva så fixerat tanken på lutningen mellan sidorna till *särskilda* solida vinklar, att man förbisett lutningen mellan sidorna till en och hvar för sig. Vill man åter *styrka* sin sats beträffande dessa sistnämnda sidor, så har detta sig åtminstone icke *så* lätt, att man ej får god anledning till den förmodan, att saken skulle vara bättre betjent med en definition, som i stället för bestämningen om de solida vinklarnes kongruens innehölle *den*, att *lutningen mellan kontigua facer skall vara densamma hela polyëdern igenom.* Denna förmodan öfvergår ock verkligen, enligt förf:s mening, till *visshet*, då man besinnar, att (se teoremet i början af § 2 här nedan) just denna *senare* egenskap är den som *omedelbart* gifver en (konvex) polyëder, hvars alla facer äro kongruenta reguliera figurer — likgodt huru många — den väsentliga karakteren, att ett klot kan inskrifvas uti, och ett klot omskrifvas omkring honom, begge med samma medelpunkt, samt följaktligen är i och för sig — d. ä. utan behof af något enda ords tillägg om de solida vinklarnes kongruens — tillräcklig att äfven *fixera storleken af facernas inbördes lutning* i hvarje särskildt fall (se problemet i II § 2), hvaraf sedan med nödvändighet *följer*, att *allenast en* polyëder (med uppgifven kant) af hvarje särskild art är möjlig, att dess solida vinklar äro kongruenta, o. s. v.; hvaremot denna sistnämnda egenskap icke utan *förmedling* af den förenämnda förmår leda till målet, utan snarare — rent ut sagdt — är en egenskap, hvars omförmälande verkligen utan allt äfventyr skulle *kunna* placeras i aldra sista rummet *.

Dessa nu i korthet antydda skäl torde väl af en hvar medgifvas utgöra en tillräcklig grund för utbytande af den hittills begagnade definitionen mot den, som läses i art. 1) af anm. näst efter teoremet i § 2 här nedan. Emellertid är det icke *blott* detta utbyte som afsetts med förevarande uppsats. Förf. har velat visa, huru man på grunden af denna nya definition kan åstadkomma en ej allenast konseqvent, utan ock för elementarundervisningen passande och i hög grad gagnelig framställning af läran om de reguliera

* Icke ens för att *antalet sidor* (facer) i de särskilda polyëdrarne må finnas är dess omförmälande nödigt. Ty först och främst, såsom man ser af III i § 2 här nedan, kan sjelfva konstruktionen af polyëdrarne tillfullo verkställas — och sålunda äfven sidoantalet finnas — utan allt åberopande af ifrågavarande egenskap. Och vill man påyrka en *apriorisk* (af konstruktionens verkställande icke beroende) bestämning af sidoantalet, så kan ju äfven det ändamålet vinnas oberoende af sagda egenskap: den bekanta *Eulerska* formeln gifver ju här resultatet på grund af — icke *den* egenskapen, att de solida vinklarne äro *kongruenta*, utan — den att de hafva *lika många sidor* alla. — Det behöfver knappt sägas, för öfrigt, att nämnda *aprioriska* bestämning af sidoantalet kan lika väl ernås efter förf:s som efter den gamla definitionen.

polyëdrarne. Det behöfver icke sägas, att han dervid för det aldra mesta begagnat sig af det redan, snart sagdt, af ålder förhandenvarande materialet, och att hans åtgärd nästan endast och allenast inskränkt sig till att sätta detsammas delar i behörig inbördes ordning; hvarför ock här icke någon redogörelse på förhand för detaljerna kan vara behöflig eller ens lämplig: ett helt flygtigt genomseende af de efterföljande sidorna skall tvifvelsutan vara den sakkunnige nog för att med säkerhet bedöma förf:s sätt att genomföra sin plan. Särskildt torde dock här böra nämnas, hvad sjelfva *konstruktionen* af de ifrågavarande polyëdrarne beträffar, att förf. i denna del tillåtit sig att afvika från sina föregångares sätt, åtminstone i fråga om ikosaëdern och dodekaëdern. Det sätt han begagnat för dessas konstruktion synes honom vara, snart sagdt, *det enda naturliga*, såsom det ock uppenbarligen i det *närmast möjliga* öfverensstämmer med det vanliga, och äfven här begagnade, enkla konstruktionssättet för oktaëdern.

Emellertid är det icke blott till de egentligen *sakkunnige* — vetenskapsmännen och lärarne — som förf. velat vända sig med denna uppsats; utan, i öfverensstämmelse med denna Tidskrifts ändamål, är det äfven och i lika måtto gagnet för de »*Angehende*» som han dermed afsett. Deraf förklaras densammas *utförlighet*, som väl eljest hade måst finnas bra olämplig, äfvensom — till en god del åtminstone — förf:s åtgärd att i § 1 inledningsvis förutskicka vissa triviala och helt sporadiska satser ur de första elementerna. Ställen förekomma nemligen i det följande, der, till förekommande af dunkelhet eller missförstånd, det varit af vigt att *uttryckligen* citera den elementarsats, på hvilken resonnementet stöder sig; men, som bekant är, fins det icke för närvarande hos oss någon så allmänt begagnad lärobok, att satserna kunnat derutur lämpligen (för alla) till sin nummer citeras; genom satsernas numrering i § 1 har detta bryderi blifvit afhjelpt. Naturligtvis är dermed icke sagdt, att inga andra elementarsatser än de i

§ 1 intagna skola i det följande förutsättas, utan — som sagdt — det är blott *dessa* som förf. ansett sig behöfva för tydlighetens skull uttryckligen citera; öfrige satser af samma art har han, der de behöfts, utan all citering begagnat såsom allmänt bekanta elementer.

§ 1. Inledning.

Af skäl, som näst ofvanför blifvit antydt, upptagas här förberedelsevis följande satser ur de första elementerna af rymdens geometri (stereometrien):

1. Om två räta linier skära hvarandra, och en tredje är vinkelrät mot dem båda i deras skärningspunkt; så är hon ock vinkelrät mot deras plan.

2. Om tre räta linier skära hvarandra i en punkt, och en fjerde är vinkelrät mot dem alla i den punkten; så ligga de tre i ett plan alla.

3. Bland alla räta linier, som från en punkt utom ett plan kunna dragas till planet, är den vinkelräta kortast.

4. Genom en punkt på en rät linie kan allenast ett plan dragas vinkelrätt mot henne.

5. Om en rät linie är vinkelrät mot ett plan, så är ock hvarje plan, som går genom henne, vinkelrätt mot det förra.

6. Om två planer äro sinsemellan vinkelräta, och en rät linie i det ena af dem är vinkelrät mot deras afskärningslinie; så är hon ock vinkelrät mot det andra planet.

7. En solid vinkel säges vara *konvex*, då den, lagd på hvilken som helst af sina facer (sidor, vinkelplaner), befinner sig hel och hållen på samma sida om den facen (utdragen indefinit).

Deraf följer, att hvarje 3-kantig solid vinkel är konvex; vidare, att hvarje konvex solid vinkels alla kanter kunna på en gång skäras af ett plan (utan att det är draget genom spetsen), att afskärningen blir en konvex figur samt att den solida vinkelns alla plana vinklar utgöra tillhopa mindre än 4 räta.

8. Med *polyëder* (mångkant) förstås en kropp (solid figur), som är begränsad af *planer* allenast. De plana figurer, som begränsa honom, kallas hans *facer* eller *sidor*; afskärningslinien mellan hvarje hans par kontigua sidor kallas en polyëderns *kant*.

Polyëdern säges vara *konvex*, då han, lagd på hvilken som helst af sina facer, befinner sig hel och hållen på samma sida om den facen (utdragen indefinit). — Deraf är klart, att en konvex polyëders alla solida vinklar äro konvexa.

9. För att få veta — hvad man kallar — *lutningen* mellan en polyëders båda facer vid någon af dess kant, har man att tillse, huru mycket tvenne mot kanten i någon dess punkt dragna vinkelräta linier, en i hvardera facen, afvika från hvarandra * (inuti polyëdern, förstås).

Deraf är klart, att lutningen mellan en polyëders kontigua facer *kan* öfverstiga 2 räta vinklar, men dock aldrig uppgå till 4 räta, men också att, om polyëdern är *konvex*, lutningen mellan *hvarje* dess par kontigua facer måste vara mindre än 2 räta vinklar.

10. En rät linie, dragen från medelpunkten af ett klot vinkelrätt mot någon dess småcirkels plan, träffar detsamma i småcirkelns medelpunkt.

11. Ett klot *tangeras* af ett plan, om det råkas af planet utan att skäras deraf (d. ä. utan att någon punkt af planet befinner sig inuti klotet) **. — Deraf följer [enl. 3 här framför], att ett plan, som är vinkelrätt mot en klotets radie i hans ändpunkt, tangerar klotet.

---

* Att afvikelsen är densamma, hvilken punkt som helst på kanten man härvid må begagna, det antages här vara en bekant sak.

** Om denna sats är att anse som *definition* eller som *teorem*, kan för denna uppsats vara alldeles likgiltigt. Också är — som man ser — ordställningen lämpad derefter.

§ 2. De reguliera polyëdrarnes allmänna egenskaper och konstruktion.

I. Teorem. *Om en konvex polyëder begränsas af idel kongruenta reguliera figurer med samma inbördes lutning mellan kontigua facer vid alla dess kanter, så kan man både inskrifva ett klot uti, och omskrifva ett klot omkring polyëdern, begge med samma medelpunkt.*

Låt ABC och ABC' föreställa ett par af polyëderns kontigua facer (fig. 1). Från deras midtpunkter O och O' drag 1:o) OP och $O'P$ till midtpunkten P af den gemensamma kanten AB — [vinkeln OPO' inuti polyëdern angifver då lutningen mellan hans kontigua facer *, och kanten AB är vinkelrät mot planet OPO' **] — och 2:o) perpendiklar ON och $O'N'$ mot sjelfva planerna ABC och ABC' respektive. Dessa perpendiklar befinna sig båda i planet OPO' — [alldenstund ju pl. NOP är vinkelrätt mot pl. ABC *** och således äfven mot kanten AB †, likaså pl. $N'O'P$ vinkelrätt mot AB, och begge gå genom dess midtpunkt P samt utgöra följaktligen †† ett enda plan] — och måste följaktligen (ax. 12) råkas någorstädes (låt vara) i Q på andra sidan om räta linien OO' anseende till vinkelspetsen P, hvarjemte QO måste vara $= QO$ och, om QP drages, $\wedge QPO$ vara $= \wedge QPO'$ = hälften af lutningen mellan de kontigua facerna.

Sammanbind vidare Q med midtpunkten O'' af en nästföljande face $C'C''$ af polyëdern. *Jag påstår, att QO'' är $= QO'$ och vinkelrät mot planet $C'C''$.* — Dragas nu åter $O''P'$ och $O'P'$ till midtpunkten P' af den gemensamma kanten $B'C'$, så är denna kant vinkelrät mot båda och således äfven mot deras plan $O'P'O''$. Och som hela 4-sidingen $QO'P'O''$ befinner sig i det planet — [Δ $QO'P'$ ligger ju †††, så väl som QO', i ett mot pl. ABC' och således äf-

* Inl. 9. ** Inl. 1. *** Inl. 5.
† Inl. 6. †† Inl. 4. ††† Inl. 5.

ven * mot $B'C'$ vinkelrätt plan, gående genom midtpunkten P', och således ** just i pl. $O'P'O''$; följaktligen äfven $\triangle\, QO''P'$, eftersom både $O''P'$ och Q ligga deruti] –, och alldenstund vidare, om QP' drages, $\wedge\, QP'O'$ är $= \wedge\, QPO'$ *** = halfva lutningsvinkeln mellan polyëderns kontigua facer; så är $\wedge\, QP'O''$ (det återstående af lutningsvinkeln $O'P'O''$) $= \wedge\, QP'O'$, de båda $\triangle^{\underline{ne}}$ på ömse sidor om QP' kongruenta samt QO'' både $= QO'$ och vinkelrät mot $O''P'$ och således † äfven mot planet $C'C''$.

På samma sätt kan tydligen, om Q sammanbindes med polyëderns öfriga facers midtpunkter, successivt bevisas, att äfven dessa sammanbindningslinier äro lika stora med QO eller QO' och vinkelräta mot de respektive facerna. Följaktligen ligga alla midtpunkterna O, O', O'', etc. på ytan af ett klot, som, med Q till medelpunkt, tangeras af hvart och ett af polyëderns sidoplaner i detsammas midtpunkt ††; *det klotet är således* — hvad man kallar — *inskrifvet i polyëdern.*

Och alldenstund — såsom nu äfven uppenbart är — punkten Q är lika långt aflägsen äfven ifrån polyëderns alla *hörn* (vinkelspetsar), så är ju deraf utan vidare klart, att ett klot (med Q till medelpunkt) äfven kan omskrifvas omkring polyëdern.

Anm. Tillvaron af åtminstone *en* sådan polyëder, som i detta teorems försats nämndes, är bekant från de första raderna af läran om polyëdrar, nemligen *kuben.* Några flere får man lära känna här nedanför; emellertid märkes förberedelsevis:

1) att med den korta benämningen *regulier polyëder* förstås just en sådan polyëder, som i teoremets försats nämndes;

2) *att någon regulier polyëder med facer, som skulle hafva mer än 5 sidor, icke är möjlig*, alldenstund för åstad-

* Inl. 6. ** Inl. 4. *** Eukl. I: 4.
† Inl. 6. †† Inl. 11.

kommande af en solid vinkel erfordras åtminstone 3 planer, och redan tre 6-hörnings *-vinklar utgöra tillhopa 4 räta samt följaktligen ** icke kunna — hvarken de eller, än mindre, flere sådana — bilda någon konvex solid vinkel;

3) *att om någon regulier polyëder har 5- eller 4-sidiga facer, så måste hvarje dess solida vinkel vara bildad af 3 planer:* hvarken *färre* — enligt begreppet af solid vinkel — ej heller *flere*, i kraft af den bekanta, nyss antydda lagen om summan af en solid vinkels plana vinklar; *och äro följaktligen i hvarje sådan polyëder nödvändigt alla dess solida vinklar kongruenta;* samt

4) *att om någon regulier polyëder har triangulära facer, så kunna der icke förekomma andra solida vinklar än 3- eller 4- eller 5-kantiga,* i kraft åter af den nyssnämnda lagen. [Att, för öfrigt, omöjligen mer än ett af dessa tre alternativer kan ega rum i samma polyëder, det kommer straxt nedanför att visa sig, och dermed följaktligen att i *hvarje* regulier polyëder alla de solida vinklarne måste vara kongruenta].

II. Problem. *Att för enhvar af de reguliera polyëdrarne *** finna lutningen mellan sidoparet vid hvarje dess kant, äfvensom relationen mellan kanten och radien till vare sig det omskrifna eller det inskrifna klotet.*

Kanten må betecknas med k, det omskrifna och det inskrifna klotets radier med R och r respektive, den nämnda lutningen med λ.

Utan vidare är tydligt, att för enhvar af ifrågavarande polyëdrar

$$r \text{ är } = \sqrt{R^2 - \varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

neml. ϱ rad. till facens omskrifna cirkel,

* *Regulier* 6-hörnings, förstås.

** Inl. 7.

*** *Hvilka* de äro, skall — som sagdt var — finnas längre fram. Förevarande problems lösning skall, likasom mom. 2)—4) i anm. näst förut, bana väg dertill.

vidare (se fig. 1)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{r}{\varrho'}, \text{ neml. } \varrho' \text{ rad. till facens inskrifna cirkel,} \tag{2}$$

samt följaktligen att allt beror på att finna relationen mellan R och k.

Men, vidare, om man med S utmärker spetsen af någon polyëderns solida vinkel, och med A, B, C, etc. ändpunkterna af de derifrån utgående kanterna (således $SA = SB = SC$ etc. $= k$); så, först och främst, *är den rätliniga figuren* $ABC\ldots$ *plan.* Ty om ifrån enhvar af punkterna A, B, C, etc. drages en perpendikel mot det omskrifna klotets diameter genom S, så råka de ju denna diameter *alla i samma punkt*, nemligen på afståndet $\frac{k^2}{2R}$ ifrån spetsen S *, och ligga följaktligen alla i ett och samma plan **, vinkelrätt mot nämnda diameter. — Men denna plana figur $ABC\ldots$ är ock tydligen inskriptibel i en cirkel (den är ju bas till en *likbent* pyramid $SABC\ldots$). Och således, om man med $\mathfrak{r}$ betecknar hans omskrifna cirkels radie, är $\frac{k^2}{2R} = \sqrt{k^2 - \mathfrak{r}^2}$, eller

$$2R = \frac{k}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{r}}{k}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \tag{3}.$$

Och som tillika uppenbart är, att denna figur $ABC\ldots$ är liksidig *** och således äfven *regulier*, så inses nu omsider, att i sjelfva verket allt beror, helt enkelt, af relationen mellan k och *sidan* (AB) af figuren $ABC\ldots$ för de särskilda polyëdrarne.

---

* I den rätvinkliga triangel, hvars hypotenusa är det omskrifna klotets diameter genom S, och ena katet någondera af kanterna SA, SB, SC, etc., är ju denna kant medelproportionalen mellan hela diametern och dess stycke mellan S och den punkt, der han träffas af perpendikeln från kantens ändpunkt.

** Inl. 2. *** Eukl. I: 4.

Alltså:

1:o) *Om en regulier polyëder med triangulära facer* $\left(\text{således } \varrho = \frac{k}{\sqrt{3}} = 2\varrho'\right)$

a) *har någon 3-kantig solid vinkel* (S); så, alldenstund den reguliera fig. $ABC\ldots$ har allenast 3 sidor $= k$ hvar och en, och således $\mathfrak{r} = \frac{k}{\sqrt{3}} = \varrho$, är den polyëderns

$$R = \tfrac{1}{4}k\sqrt{6},\quad r = \tfrac{1}{12}k\sqrt{6}(=\tfrac{1}{3}R),\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\lambda = 2\sqrt{2},\quad \lambda = 70^\circ 31' 43'',6\ldots$$

b) *har någon 4-kantig solid vinkel*, och således fig. $ABC\ldots$ är en qvadrat med sida $= k$, $\mathfrak{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}$; så är den polyëderns

$$R = k\sqrt{\tfrac{1}{2}}(=\mathfrak{r}),\qquad r = k\sqrt{\tfrac{1}{6}}\left(= \frac{R}{\sqrt{3}}\right),\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{2},$$
$$\operatorname{tg}\lambda = -2\sqrt{2},$$

och således λ = precist supplementet till λ i förra händelsen, d. ä. $109^\circ 28' 16'',3\ldots$

c) *har någon 5-kantig solid vinkel*, och således fig. $ABC\ldots$ är en regulier 5-hörning med sida $= k$, $\mathfrak{r} = k\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$; så är dess

$$R = \tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}(=\tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\sqrt{5}),\quad r = \tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \tfrac{1}{12}k\sqrt{3}.(3+\sqrt{5}),$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad \operatorname{tg}\lambda = -\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\ (\text{således Sin }\lambda = \tfrac{2}{3}),$$
$$\lambda = 138^\circ 11' 22'',8\ldots$$

Anm. Häraf ser man nu omedelbart — hvad i mom. 4) af anm. näst före detta problem nämndes på förhand — att omöjligen mer än ett af dessa tre alternativer a), b) och c) kan ega rum i samma reguliera polyëder.

2:o) *Om en regulier polyëder har qvadratiska facer* $\left(\text{således } \varrho = \frac{k}{\sqrt{2}},\ \varrho' = \tfrac{1}{2}k\right)$; så, alldenstund [se 3) i nyss cit. anm.] hvarje dess solida vinkel (S) måste vara 3-kantig, är fig. $ABC\ldots$ en liksidig triangel, dess sida $AB = k\sqrt{2}$ (vinkeln ASB är ju rät) d. ä. diagonalen i en af de qvadratiska facerna vid S, och således $\mathfrak{r} = \dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; följaktligen är denna polyëders

$$R = \tfrac{1}{2}k\sqrt{3}, \quad r = \tfrac{1}{2}k, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = 1, \quad \lambda = 90^\circ,$$

och således polyëdern en *kub*.

3:o) *Om en regulier polyëder har 5-sidiga facer* (således $\varrho = k\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} = \dfrac{\frac{1}{2}k}{\operatorname{Sin} 36^\circ}$, $\varrho' = \frac{1}{2}k\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}k \operatorname{Cot} 36^\circ$); så, alldenstund hvarje dess solida vinkel (S) måste vara 3-kantig, är äfven här fig. $ABC\ldots$ en liksidig triangel, dess sida $AB = \frac{1}{2}k(\sqrt{5}+1)$ — [$\wedge ASB$ är ju $= 108^\circ$] — eller diagonal i en af facerna vid S, och således $\mathfrak{r} = \frac{1}{6}k\sqrt{3}\,.(1+\sqrt{5})$; följaktligen är denna polyëders

$$R = \tfrac{1}{4}k\sqrt{3}\,.(1+\sqrt{5}) = \tfrac{3}{2}\mathfrak{r}, \qquad r = \tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \operatorname{tg}\lambda = -2, \quad \lambda = 116^\circ 33' 54'',1\ldots$$

III. *Om de reguliera polyëdrarnes konstruktion.* — Märkom först, att, alldenstund λ har *allenast en* valör i hvarje särskild af de förenämnda 5 händelserna, *icke mer än en regulier polyëder af hvarje der angifven art kan konstrueras på en uppgifven kant* ($= k$). Men att också verkligen *en* kan konstrueras, skall nu visas.

1:o) *Kubens* konstruktion antages här bekant (se de första orden i anm. näst efter teoremet i I). — Obs. att den äfven benämnes *hexaëder*, af påtagligt skäl.

2:o) *Den reguliera polyëdern med triangulära facer och 3-kantiga solida vinklar* — *tetraëdern* som den kallas — erhålles genom att på den gifna kanten upprita en liksidig triangel och på denna triangel som bas konstruera en likbent pyramid med höjd $= \sqrt{k^2 - \varrho^2}$, eller — med andra ord — med sidokant $= k$. — De fyra facerna i denna pyramid äro ju kongruenta liksidiga trianglar; och att lutningen mellan sidoparen vid alla dess kanter är densamma, är utan vidare tydligt deraf, att pyramidens alla fyra höjder äro lika.

3:o) *Den reguliera polyëdern med triangulära facer och 4-kantiga solida vinklar* erhålles genom att upprita en qvadrat på den gifna kanten och sedan på denna qvadrat som bas konstruera, åt ömse sidor derom, en likbent pyramid (spets. S och S') med sidokant $= k$ eller, med andra ord, med höjd $= \sqrt{k^2 - \mathfrak{r}^2}$ (nemligen $\mathfrak{r}$ radien till basens omskrifna cirkel), d. ä. $= \frac{1}{2}k\sqrt{2}$ (qvadratens halfva diagonal) (fig. 2).

De 8 facerna i denna polyëder äro ju då kongruenta liksidiga trianglar. Och att lutningen mellan de kontigua facerna är konstant, kan lätt inses sålunda: Enligt konstruktionen är det lika långt ($= \frac{1}{2}k\sqrt{2}$) ifrån den nämnda qvadratens $ABCD$ midtpunkt (Q) till alla hörnen af polyëdern, hvilken alltså kan omskrifvas med ett klot (radien $= \frac{1}{2}k\sqrt{2} = R$ kortl.) med Q till medelpunkt. Nedfällas derifrån perpendiklar mot 2:ne kontigua facer, t. ex. SDA och $S'DA$, så träffa de följaktligen dessa facer i deras midtpunkter (O och O')* och äro lika stora (hvardera $= \sqrt{R^2 - \varrho^2} = k\sqrt{\frac{1}{6}} = r$ kortl.). Och sammanbindas nu dessa O och O' med den gemensamma kantens AD midtpunkt (P), så angifver $\wedge\, OPO'$ dessa facers inbördes lutning ($= l$, kortligen), $\wedge\, OPQ$ är $= \frac{1}{2}l$, och tang $\frac{1}{2}l = \frac{OQ}{OP} = \frac{r}{\varrho'} = \sqrt{2}$.

Polyëderns benämning: *oktaëder*, af påtagligt skäl.

4:o) *Den reguliera polyëdern med triangulära facer och 5-kantiga solida vinklar* kan erhållas sålunda: Upprita**

---

* Inl. 10.

** Figur till resonnementets förtydligande må läsaren, om han så finner behöfligt, upprita sjelf. (Några antydningar ses i fig. 3). Bäst är naturligtvis att begagna sig af en vanlig stereometrisk figur (af träd eller papp) af hithörande art.

en regulier 5-hörning (fig. 3) $ABCDE$ med den gifna kanten (k) till sida, och konstruera på den figuren som bas en likbent pyramid (spetsen S) med sidokant äfven $= k$); dess höjd (Sq) är således $= \sqrt{k^2 - \mathfrak{r}^2}$ (nemligen $\mathfrak{r}$ radien till basens omskrifna cirkel) $= k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2}\mathfrak{r}(\sqrt{5}-1) = h$ (kortligen), och om den utdrages på andra sidan om basen ett stycke $qq' = \mathfrak{r}$, så är *midtpunkten* (Q) på det stycket lika långt aflägsen från pyramidens alla hörn, nämnligen (som man ju lätt finner) så långt som $\frac{1}{2}\mathfrak{r}\sqrt{5}$.

Konstruera vidare en alldeles dylik pyramid $S'A'B'C'D'E'$ och ställ deras baser tillhopa, A' på A, B' på B, o. s. v., men med spetsarne på hvar sin sida om det gemensamma basplanet. Vrid sedan, utan att skilja de båda baserna från hvarandra, den nya pyramiden 36° omkring Sqq' (indefinit utdragen) såsom axel (från A åt B till); då komma tydligen vinkelspetsarne A', B', C', etc. att infalla i de planer, respektive, som gå genom SS' och midtpunkterna (α, β, γ, δ, ε) af den förra pyramidens bassidor AB, BC, CD, etc. *. Och låter man nu pyramiden $S'A'B'C'D'E'$ i denna sin ställning mot den förra [d. ä. utan att spetsen S' skiljes från nämnda axel, ej heller vinkelspetsarne A', B', etc. rubbas ur sina nämnda respektive planer] aflägsnas från pyramiden $SABCDE$ så långt, att basplanet $A'B'C'D'E'$ infaller i punkten q' (eller att de båda basplanernas inbördes afstånd blir $= \mathfrak{r}$); så är *midtpunkten* (Q) på deras afståndslinie qq' lika långt aflägsen (neml. $= \frac{1}{2}\mathfrak{r}\sqrt{5}$) från de båda pyramidernas alla hörn. Och sammanbinder man slutligen vinkelspetsarne A', B', C', D', E' med bassidornas ändpunkter, respektive, A och B, B och C, C och

* Vinkelspetsarne A', B', etc. komma ju genom nämnda vridning att inträffa i midtpunkterna af den omkring 5-hörningen $ABCDE$ omskrifna cirkelns periferibågar, hvilkas kordor sidorna AB, BC, etc. respektive äro. Och genom dessa midtpunkter — såsom de der befinna sig på nämnda cirkels radier genom kordornas midtpunkter α, β, γ, etc. — gå ju ock de i texten här omförmälta planerna.

D, D och E, E och A i den förra pyramiden *; så uppkommer genom de deraf bildade 10 nya trianglarne, i förening med de båda pyramidernas 10 liksidiga triangelfacer, en af 20 trianglar begränsad konvex polyëder. Jag påstår, att den är *regulier*.

Att de 10 nya $\triangle^{\underline{\underline{ar}}}$, som utgöra bältet mellan de båda pyramidernas baser, äro liksidiga och kongruenta med pyramidernas triangelfacer, kan inses som följer: *Likbent* är $\triangle\, A'AB$ (och neml. $A'A = A'B$), eftersom dess *bas* AB — såsom varande uppenbarligen vinkelrät mot planet, som går genom axeln SS' och midtpunkten α (äfvensom punkten A') — är vinkelrät mot $\alpha A'$. Men derjemte är denna dess *höjd* $\alpha A'$ = höjden (eller apotemet) αS, d. ä. $= \frac{1}{2}k\sqrt{3}$, alldenstund

$$\alpha A' \text{ är } = \sqrt{(qq')^2 + (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2},$$

nämnl. $\mathfrak{r}'$ radien till den *inskrifna* cirkeln i någondera 5-hörningen,

$$= \mathfrak{r}\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}}\right)^2},$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\text{emedan ju } \frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}} \text{ är } = \operatorname{Cos} 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{d. ä. } = \tfrac{1}{2}k\sqrt{3}\,,\ \text{eftersom } k \text{ är } = \mathfrak{r}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Alltså är $\triangle\, A'AB$ *liksidig* och kongruent med $\triangle\, SAB$. — Af dylikt skäl tydligen ock enhvar af $\triangle^{\underline{\underline{ne}}}$ $B'BC$, $C'CD$, $D'DE$ och $E'EA$; och följaktligen äfven de öfriga 5 trianglarne.

Och att lutningen mellan kontigua facer är konstant, det kan uppenbarligen alldeles på samma sätt som nyss för

---

* Hvarmed ju ock, omvändt, vinkelspetsarne A, B, C, D, E i i basen $ABCDE$ blifvit sammanbundna med bassidornas ändpunkter, respektive, A' och B', B' och C', C' och D', D' och E', E' och A' i pyramiden $S'A'B'C'D'E'$.

oktaëdern visas vara en omedelbar följd af polyëderns egenskap att kunna omskrifvas med ett klot.

Polyëderns benämning: *ikosaëder* *, af påtagligt skäl.

5:o) *Den reguliera polyëdern med 5-sidiga facer* kan erhållas sålunda: Upprita ** en regulier 5-hörning (fig. 4) *ABCDE* med sida (icke $= k$, utan) $=$ *diagonalen* i en reg. 5-hörning med sidan k, alltså $= \frac{1}{2}k(\sqrt{5}+1) = \varrho\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ *** $= D$ (kortl.), och konstruera på den figuren som bas en likbent pyramid (spetsen T), sådan att hvarje dess triangelface TAB, TAC, etc. får sina basvinklar dubbelt så stora som sin vinkel vid spetsen T, alltså med sidokant (TA, TB, etc.) $= \frac{1}{2}D(\sqrt{5}+1) = k.\frac{3+\sqrt{5}}{2} = s$ (kortl.) eller, som ju är detsamma †, med *höjd* $Tq = D\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ (= diametern till basens $ABCDE$ inskrifna cirkel)

$$= k\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} = \varrho.\frac{3+\sqrt{5}}{2} = H \text{ (kortl.)}.$$

Skär sedan den pyramiden med ett plan parallelt med basen och så högt deröfver, att den (efter toppens bortkastande) återstående stympade pyramidens sidokanter Aa, Bb, Cc, Dd, Ee blifva $= k$ hvar och en; höjden Sq ($= h$) till denna stympade pyramid är tydligen $= \frac{k}{s}H = \varrho$, och dess mindre bas ($abcde$) en regulier 5-hörning med sida $= k$

* Af grekiska ordet εἴκοσι (tjugu).

** Jemf. noten ** under sid. 156 här framför.

*** Nämnl. ϱ bet. radien till den omskrifna cirkeln kring den sistnämnda 5-hörningen (med sida $= k$), således $\varrho = k\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. — Med ϱ' skall sedan betecknas dess inskrifna cirkels radie.

† Emedan ju radien till basens $ABCDE$ omskrifna cirkel är $= D.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

[sidan, t. ex. ab, är ju $= \frac{aT}{AT} \cdot AB$]. Och om denna stympade pyramids höjdlinie Sq utdrages på andra sidan om dess större bas ($ABCDE$) ett stycke $qq' = \frac{1}{2}h(\surd 5 - 1)$* $= \frac{1}{2}\varrho(\surd 5 - 1)$, så är *midtpunkten* ($Q$) på det stycket lika långt aflägsen från den stymp. pyramidens alla hörn, nemligen (som man lätt finner)** så långt som $\frac{1}{2}\varrho\surd 3 \cdot \sqrt{\frac{5+\surd 5}{2}}$ $= \frac{1}{2}D\surd 3 = \frac{1}{4}k\surd 3 \cdot (\surd 5 + 1)$.

Konstruera vidare en alldeles dylik stympad pyramid $A'B'C'D'E'e'd'c'b'a'$ och ställ begges större baser tillhopa, A' på A, B' på B, o. s. v., men så att deras mindre baser komma på hvar sin sida om de störres gemensamma plan. Vrid sedan (likasom nyss i 4:o)), utan att skilja de båda större baserna från hvarandra, den nya stympade pyramiden 36^0 omkring axeln Sqq' (indefinit utdragen) från A åt B till; då komma tydligen vinkelspetsarne A', B', C', etc. (äfvensom a', b', c', etc.) att infalla i de planer, respektive, som gå genom nämnda axel och midtpunkterna (α, β, γ, δ, ε) af sidorna AB, BC, CD, etc. i den förra stymp. pyramidens större bas***. Och låter man nu den nya stymp. pyramiden i denna sin ställning mot den förra [alldeles som i 4:o) ofvanför] aflägsnas, utefter axeln, så långt att basplanet $A'B'C'D'E'$ infaller i punkten q' [eller att afståndet mellan de båda större baserna blir qq' eller $= \frac{1}{2}\varrho(\surd 5 - 1)$]; så är *midtpunkten* ($Q$) på denna qq' lika långt aflägsen från de båda stymp. pyramidernas *alla* hörn, hvilka följaktligen allesamman ligga på ytan af ett klot med Q till medelpunkt. Och sammanbinder man derefter vinkelspetsarne A', B', C', D', E' med bassidornas ändpunkter, respektive, A och B, B och C, C och D, D och E, E och A i den

---

* Uttryckets geometriska betydelse behöfver väl icke här utsägas i ord.

** Radien till den större basens omskrifna cirkel är ju $= \frac{1}{2}\varrho(\sqrt{5} + 1)$, likasom hans sida D är $= \frac{1}{2}k(\sqrt{5} + 1)$.

*** Jemf. noten ** under sid. 156.

förra stymp. pyramiden *; så, först och främst, äro de deraf uppkomna 5 trianglarne $A'AB$, $B'BC$, etc. *likbenta* och deras ben $= k$ hvart och ett. Ty hvad den förstnämnda $\triangle\, A'AB$ beträffar, så är dess bas AB vinkelrät mot räta linien, som sammanbinder dess *midtpunkt* (α) med spetsen A', eftersom AB uppenbarligen är vinkelrät mot planet som går genom ofvannämnda axel $Sqq'\ldots$ och punkten α (äfvensom punkten A'); och är den således *likbent*, $A'A = A'B$. Och att hvardera af dess ben är $= k$, är tydligt deraf att dess bas AB är $= D = \varrho\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, och höjden $\alpha A' = \sqrt{(qq')^2 + (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')^2}$, då neml. $\mathfrak{r}$ och $\mathfrak{r}'$ bet. radierna till basens $A'B'C'D'E'$ (eller $ABCDE$) om- och inskrifna cirklar, d. ä. $= \varrho \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{4}$, emedan $\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\varrho(\sqrt{5}+1)$, och $\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, samt följaktligen $A'A = \varrho\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = k$. — Och för de fyra andra $\triangle^{\text{ne}}$ $B'BC$, $C'CD$, etc. gäller uppenbarligen alldeles detsamma. — Vidare är deraf en sjelfklar följd, att *alla* de 10 trianglar, som utgöra bältet mellan de båda stympade pyramidernas större baser, äro likbenta, hvars och ens bas $= D$, och sida $= k$.

Men de ligga ock, dessa 10 trianglar, hvar och en i samma plan med parallelltrapeziet på andra sidan om sin bas. Att så är med $\triangle\, A'AB$ och trapeziet $ABba$, är tydligt deraf att

afståndet mellan A' och sidan ab är $= A'a$ + trapeziets höjd,

neml. $\sqrt{(qq'+h)^2 + (r-\varrho')^2} = \varrho \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{k^2 - \left(\frac{D-k}{2}\right)^2}$,

---

* Hvarmed ju ock, omvändt, vinkelspetsarne

A, B, C, D, E i basen $ABCDE$ blifvit sammanbundna med bassidornas ändpunkter, respektive,

A' och B', B' och C', C' och D', D' och E' E' och A' i basen $A'B'C'D'E'$.

alldenstund ju, enligt det föregående,

$$qq' + h \text{ är } = \tfrac{1}{2}\varrho(\sqrt{5}+1) = 2(\iota - \varrho'),$$

och
$$D - k = \tfrac{1}{2}k(\sqrt{5}-1), \qquad k = \varrho\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Och alldeles på samma sätt för enhvar af de 10 trianglarne.

Följaktligen utgör enhvar af dessa trianglar i förening med trapeziet på andra sidan om hans bas en plan 5-hörning, som är liksidig och — emedan den ju är inskrifven i cirkeln, som utgör det förenämnda klotets afskärning med hans plan — äfven *regulier*. Och är således hela (den uppenbarligen konvexa) polyëdern begränsad af inalles 12 reguliera och lika stora 5-hörningar. — Att lutningen mellan dess kontigua facer är konstant, är (likasom för oktaëdern och ikosaëdern här framför) utan vidare tydligt af polyëderns egenskap att kunna omskrifvas med ett klot.

Polyëderns benämning: *dodekaëder**, af påtagligt skäl.

IV. Beträffande slutligen relationen mellan *kubikinnehållet* (K) och kanten för enhvar af de reguliera polyëdrarne, så kan den städse finnas genom den sjelfklara konsiderationen, att polyëdern utgöres af reguliera pyramider med hvar sin af dess facer till bas och det inskrifna klotets medelpunkt till gemensam spets för dem alla. Till följd deraf är nemligen för enhvar af polyëdrarne (om A betecknar dess hela yta) tydligen

$$K = \tfrac{1}{3}rA,$$

och således

för *tetraëdern:* $K = \tfrac{1}{3}r.k^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{12}k^3\sqrt{2}$,

» *oktaëdern:* $K = \tfrac{1}{3}r.2k^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}k^3\sqrt{2}$,

» *ikosaëdern:* $K = \tfrac{1}{3}r.5k^2\sqrt{3} = \tfrac{5}{12}k^3.(3+\sqrt{5})$,

» *kuben (hexaëdern):* $K = \tfrac{1}{3}r.6k^2 = k^3$,

» *dodekaëdern:* $K = \tfrac{1}{3}r.3k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
$= \tfrac{1}{4}k^3(15+7\sqrt{5}) = \tfrac{1}{8}k^3\sqrt{5}.(3+\sqrt{5})^2$;

hvaraf ses, ibland annat, att, om *kuben* tages till enhet,

* Af grekiska ordet δώδεκα (tolf).

de öfriga, *om de hafva lika stora kanter som kuben*, skola uttryckas respekt. med talen

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{2},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{2},\quad \tfrac{5}{12}(3+\sqrt{5}),\quad \tfrac{1}{8}\sqrt{5}\,.(3+\sqrt{5})^2,$$

eller (i det nogaste)

$$0{,}118;\quad 0{,}471;\quad 2{,}182;\quad 7{,}663.$$

Anm. Som uttrycken i det 3:e membrum af förestående formler för kubikinnehållen af *kuben*, *tetraëdern* och *oktaëdern* uppenbarligen kunna erhållas äfven på annan väg (och utan all konsideration af det inskrifna klotets radie); så är tydligt, att för enhvar af *dem* relationen mellan r och k — och således äfven den mellan R och k, äfvensom lutningsvinkeln λ — kan vid behof finnas ur likheten mellan det 2:a och det 3:e membrum i motsvarande formel här framför.

I sammanhang härmed må äfven, såsom anmärkningsvärdt beträffande *ikosa dern* och *dodekaëdern*, nämnas, att kubikinnehållet af det i 5:o) här ofvan omförmälta *bältet* emellan de båda stympade pyramiderna i *dodekaëdern* är precist $\frac{1}{3}$ af sjelfva polyëderns, eller (med andra ord) *bältet precist = hvardera stymp. pyramiden*, samt att det i 4:o) omnämnda bältet mellan de båda pyramiderna i *ikasoëdern* är $= \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{5}})$* $\times$ hela polyëdern eller (med andra ord) $= (3+\sqrt{5}) \times$ hvardera pyramiden, — såsom man allt lätt finner i betraktande deraf, att:

för hvardera pyramiden i *ikosaëdern*, höjden (se 4:o) är

$$= k\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad \text{och basen} = \tfrac{1}{4}k^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})},$$

och, för hvardera stymp. pyramiden i *dodekaëdern*, höjden (se 5:o) är $= k\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$, den mindre basen samma som nyss, den större $= \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$** $\times$ den mindre.

---

* Alltså 0,72.... (eller i det närmaste $\frac{3}{4}$) af hela polyëdern.

** Nemligen $\dfrac{D^2}{k^2}$ eller $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2$.

Sats 57 (E. Lundberg), löst af C. B. S. CAVALLIN.

Denna uppgift är ett enskildt fall af följande mera omfattande uppgift, hvars lösning är lika enkel som det framkastade enskildta fallets.

Att genom ändpunkten af en gifven korda i en cirkel draga tvänne andra kordor så, att de med den gifna bilda lika stora vinklar, och så, att dessutom dessas summa eller skilnad blir = en gifven längd $2l$, mindre än två gånger den gifna kordan.

Som vi stödja vår lösning af ofvanstående uppgift på teoremet 230 i Todhunters samling af geometriska öfningsuppgifter (2:a upplagan), vilja vi först lemna nedanstående bevis för det senare. Detta teorem lyder sålunda: AB är en gifven begränsad rät linie; genom A äro två obegränsade räta linier dragna, som bilda lika vinklar med AB; en godtycklig cirkel, hvars periferi går genom A och B, träffar dessa räta linier i L och M. Visa, att, om AB faller emellan AL och AM, *summan* af AL och AM är konstant; men om AB icke faller emellan AL och AM, så är *skilnaden* mellan AL och AM konstant (d. v. s. lika stor, hvilken cirkelperiferi man än må upprita genom A och B).

α) *AB faller emellan AL och AM.*

Nedfäll BL_1 och BM_1 vinkelräta emot de respektive obegränsade räta linierna, samt drag BL och BM.

Af trianglarnes BLL_1 och BMM_1 lätt insedda kongruens följer $LL_1 = MM_1$ och alltså $AL + AM = AL_1 + AM_1$ = konstant, h. s. b.

β) *AB faller icke emellan AL och AM.*

Utför konstruktionen analogt som i α) och låt den af de obegränsade räta linierna, som skäres i punkten M, falla emellan AB och den andra obegränsade räta linien.

Af trianglarnes BLL_1 och BMM_1 kongruens följer $MM_1 = LL_1$ och således $AM - AL = AM_1 + AL_1 =$ konstant.

Låt AB vara den gifna kordan i den gifna cirkeln och A kordans valda ändpunkt.

Upprita öfver AB såsom diameter cirkeln $ACBD$; tag A till medelpunkt för en cirkel med radien $= l$ och låt densamma skära cirkeln $ACBD$ i punkterna C och D (så att punkten C kommer att ligga inom och punkten D utom den gifna cirkeln), samt låt AC, utdragen, träffa den gifna cirkeln i E och AD (utdragen, om så behöfves) den gifna cirkeln i F.

AE och AF skola då vara kordor med den begärda egenskapen.

Ty emedan $AC = AD$ och AB en diameter, så är $\wedge BAC = \wedge BAD$ och således enligt α) och β) i vår nyss bevisade hjelpsats $AE \pm AF = AC + AD = 2l$ allt eftersom AB faller emellan eller icke faller emellan AE och AF.

Om O är den gifna cirkelns medelpunkt, så inses lätt att summan af AE och AF löser uppgiften, då $\wedge OAD$ blir mindre än en rät vinkel, men att skilnaden mellan AE och AF löser densamma, då $\wedge OAD$ blir större än en rät vinkel.

För att efterse hvilka relationer, som förefinnas mellan $OA = r$, $AD = l$, $AB = 2k$, då $\wedge OAD$ är rät, så låt oss sätta $\wedge OAB = \alpha$ och $\wedge DAB = \beta$.

Man har

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{k}{r},\ \text{Cos}\,\beta = \frac{l}{2k};\ \text{Sin}\,\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{r^2-k^2},\ \text{Sin}\,\beta = \frac{1}{2k}\sqrt{4k^2-l^2}.$$

För $(\alpha + \beta) = 90^0$ är $\text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta = \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$.

Således

$$(m)\quad \frac{k}{r}\cdot\frac{l}{2k} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2-k^2}\cdot\frac{1}{2k}\cdot\sqrt{4k^2-l^2}.$$

Denna likhet ger

$$k = \sqrt{\frac{r^2}{r} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{r^2 l^2}{4}}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{r(r+l)} \pm \sqrt{r(r-l)}),$$

$$l = \frac{2k}{r}\sqrt{r^2 - k^2}, \quad r = \frac{2k^2}{\sqrt{4k^2 - l^2}}.$$

Emedan likheten (m) satisfieras af två olika, reela värden på k (hvilket äfven lätt visas rent geometriskt), så inses, att man under allmänna förhållanden, då r och l äro bekanta, icke kan afgöra när summan af eller när skilnaden emellan AE och AF satisfierar uppgiften. För några enskildta värden på r och l deremot, t. ex. för $r = l$, blir k determinerad.

Den vinkel, som de satisfierande kordorna AE och AF göra med kordan AB, kan bestämmas af likheten

$$(n) \operatorname{Cos} \beta = \frac{l}{2k}.$$

Om såsom i 57:de satsen l är $= k$, så ger likheten (m) $2k = r\sqrt{3}$, hvilket bevisar att, då $2k$ är större än den i den gifna cirkeln inskrifna liksidiga triangelns sida, uppgiften satisfieras af $AE + AF$; men att då $2k$ är mindre än samma triangels sida, uppgiften satisfieras af $AE - AF$. Den vinkel, som de satisfierande kordorna bilda med den gifna kordan AB fås ur likheten (n) att vara $= 60^0$, hvilket lätt visas rent geometriskt. Denna sistnämnda egenskap hos de satisfierande kordorna ger anledning till en ny lösningsmetod för det i fråga varande enskildta fallet. Man tager nämnligen B till medelpunkt för en cirkel, hvars radie = sidan af den i den gifna cirkeln inskrifna liksidiga triangeln, och som skär den gifna cirkeln i punkterna E och F, då AE och AF blifva de satisfierande kordorna.

Å denna sats, generaliserad såsom C. gjort, har från G. Mittag Leffler inkommit en lösning med fullständig diskussion. Knut Wicksell har också insändt en enkel lösning å samma sats.

Satserna 130, 131 och 137, lösta af C. B. S. Cavallin.

130. Låt A beteckna den af de gifna punkterna hvarigenom den sökta cirkelns periferi skall gå, B och B_1 de öfriga gifna punkterna.

Tag B och B_1 till medelpunkter för cirklar med respektive de gifna längderna till radier och låt dessa cirklar vara betecknade med C_1 och C_2. Drag derpå radikal-axeln till C_1 och C_2 samt radikal-axeln till A och C_1 eller C_2 (låt vara till C_1) och låt den senare axeln råka den förra i någon punkt D. Från D dragas vidare tangenter DR och DS till C_1 och C_2 och D sammanbindes med A. Om nu en cirkel ritas genom A, S och R, så kommer den att satisfiera uppgiften, ty BR och B_1S äro tangenter till denna cirkel och hvardera lika stora med de gifna längderna.

131. Sättes afståndet mellan de gifna punkterna A och $B = l$, afstånden från A och B till någon punkt på det sökta locus $= x$, y, afståndet från midtpunkten M på AB till den valda punkten på locus $= z$, den gifna qvadraten $= a^2$, så är på grund af uppgiften

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

och i enlighet med en känd sats

$$x^2 + y^2 = 2\left[z^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Subtraheras (2) ifrån (1), erhålles en eqvation, som endast innehåller z såsom obekant och hvilken löst gifver

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 - l^2}.$$

Konstruktionen blir således följande: afsätt från midtpunkten M på AB ett stycke $MC = a$, gör $CD \perp$ och $=$ MC, upprita på MD en halfcirkel, applicera i densamma $DE = AB$ och dela slutligen ME midt i tu i F, då F är en punkt på det sökta locus, som är en cirkel med M till medelpunkt.

137. Är det gifna trapeziet ett hvilket som helst med samma beteckningar, med tillägg endast, att afståndet mellan midtpunkterna på AC och BD betecknas med EF, så har man med stöd af en känd sats sambanden

$$AD_q + CD_q = 2\left[DE_q + \left(\frac{AC}{2}\right)_q\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$AB_q + BC_q = 2\left[BE_q + \left(\frac{AC}{2}\right)_q\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Adderas likheterna (α) och (β), erhålles

$$AB_q + BC_q + CD_q + AD_q = AC_q + 2(DE_q + BE_q),$$

men enligt samma hjelpsats, som nyss användes, är

$$DE_q + BE_q = 2\left[EF_q + \left(\frac{BD}{2}\right)_q\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma),$$

$$\therefore AB_q + BC_q + CD_q + AD_q = AC_q + BD_q + 4EF_q \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Göres nu $AB \,//\, CD$ och $AB > CD$, så blir

$$EF = \tfrac{1}{2}(AB - CD)$$

eller

$$4EF_q = AB_q + CD_q - 2AB_r \,.\, CD,$$

hvilket värde insatt i st. f. $4EF_q$ i (γ) förvandlar denna likhet till

$$AC_q + BD_q = AD_q + BC_q + 2AB_r \,.\, CD.$$

Satser af C. B. S. Cavallin.

1. *Två gifna cirklar skära hvarandra i en punkt O; det begäres att upprita en tredje cirkel, som skär båda de gifna cirklarne på ett sådant sätt, att de kordor i denna cirkel, hvilka erhållas genom skärningspunkternas korsvisa förening, skära hvarandra i punkten O jemte det de med hvarandra bilda en gifven vinkel v.*

Låt A och B vara de gifna cirklarnes medelpunkter.

Upprita på AO eller BO (låt vara på AO) såsom diameter, en cirkel; tag derpå midtpunkterna P och Q på

AB och AO och låt PQ, utdragen om så behöfves, skära den på AO uppritade cirkeln i punkten C; sätt vidare i Q mot QC vinklarne CQD och CQE hvardera $= v$ och låt radierna QD och QE skära periferien i D och E. Drag slutligen genom O räta linierna SOT och UOV parallela med hvar sin af de räta linierna AD och AE, så att de förra blifva i punkterna S, T, U och V afskurna af de gifna cirklarne.

Genom punkterna S, T, U och V skall då en satisfierande cirkel gå.

Ty upprita en cirkel på AB såsom diameter och en med denna koncentrisk cirkel, som går genom punkterna E och D samt låt AD och AE förlängda råka den förra af dessa cirklar i punkterna H och K och nedfäll slutligen mot ST perpendiklarne AF och HG.

Emedan $\wedge ADO = \wedge AFO = R$, och $FO // AD$, så är $ADOF$ en rektangel $\because AD = FO$, af lika skäl är $DH = OG$. Men nu är $FO = \frac{1}{2}SO$ och $OG = \frac{1}{2}OT \because FO.OG = AD.DH = \frac{1}{4}SO.OT$. På samma sätt bevisas att $AE.EK = \frac{1}{4}VO.OU$ och emedan enligt konstruktion $AD.DH = AE.EK$*, så följer $SO.OT = VO.OU$, hvadan alltid en cirkel kan uppritas, som går genom punkterna S, T, U och V, och som äfven satisfierar uppgiften, ty $\wedge SOV = \wedge TOV = \wedge DAE = \frac{1}{2}\wedge DQE = v$.

Utdragas radierna DQ och EQ tills de råka periferien i punkterna D' och E' och utbyter man D och E mot D' och E' i konstruktionen, så leder densamma till en ny lösning.

Samma lösningar hade också erhållits, om man i konstruktionen uppritat en cirkel på BO, i stället för på AO, såsom diameter.

---

* (En cirkels korda, som skäres af en inre koncentrisk cirkels periferi, har nämnligen ytterdelarne lika stora).

2. *Om man med a, b, c och d utmärker de på hvarandra följande sidorna i en gifven fyrsidig figur, inskrifven i en cirkel, med D och D' diagonalerna, samt med l den räta linie, som förenar diagonalernas midtpunkter, så gäller formeln:*

$$(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2 = (D \pm D')^2 + 4l^2,$$

hvarest vid de dubbla tecknen de öfre eller nedre förefinnas samtidigt.

Emedan den gifna figuren är en fyrhörning, så är

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = D^2 + D'^2 + 4l^2 \,* \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

och emedan densamma är inskrifven i en cirkel, så är

$$ac + bd = D \, . \, D' \,* \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta).$$

Om (β) multipliceras med 2 och efter hvartannat led för led adderas till eller drages ifrån (α), så erhålles

$$a^2 \pm 2ac + c^2 + b^2 \pm 2bd + d^2 = D^2 \pm 2DD' + D'^2 + 4l^2$$

eller

$$(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2 = (D \pm D')^2 + 4l^2. \qquad \text{H. s. b.}$$

Satserna 104, 120, 139 och 140, lösta af J. R. Åkerlund.

104. Låt halfcirkelns radie vara r, halfva kordan x. Trapeziets yta är

$$m = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$= (r + x)^{\frac{3}{2}} (r - x)^{\frac{1}{2}}.$$

Den sista produkten är isoperimetrisk i afseende på baserna. Den blir derföre maximum då

$$\frac{r + x}{\frac{3}{2}} = \frac{r - x}{\frac{1}{2}} = \frac{r}{1}$$

eller då

$$x = \frac{r}{2}.$$

---

* Enligt sats 156 samt enligt 36 i bihanget af Todhunters Öfningssatser till Euklides [F. W. Hultman, 2 uppl.], hvilka satser här antagas vara kända.

Trapeziet bildar således halfva den i cirkeln inskrifna sexhörningen. Dess minimiyta är

$$m = \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

120. Genom successiva transformationer fås summan

$$S = a+(ar+k)+(ar^2+kr+k)+\ldots+(ar^{n-1}+kr^{n-2}+\ldots+kr+k)$$

$$= a(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})+k[1+(r+1)+(r^2+r+1)\ldots+(r^{n-2}+\ldots r+1)]$$

$$= a\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{k}{r-1}[(r-1)+(r^2-1)+\ldots+(r^{n-1}-1)]$$

$$= a\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{k}{r-1}[1+r+r^2\ldots+r^{n-1}-n]$$

$$= a\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{k}{r-1}\left[\frac{r^n-1}{r-1}-n\right],$$

hvilket sista uttryck också kan skrifvas

$$S = \left(a+\frac{k}{r-1}\right)\frac{r^n-1}{r-1}-\frac{kn}{r-1} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Uti serien

$$2+5+11+23+\ldots$$

är

$$a = 2, \quad r = 2, \quad k = 1.$$

Då dessutom $n = 10$, fås vid insättning i eqv. (1)

$$S = 3(2^{10}-1)-10 = 3059.$$

139. Låt talet vara a och den större delen x; då skall

$$x+(a-x)^2 = (a-x)+x^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oberoende af storleken på x.

Löses eqv. 1 i afseende på a, så fås

$$a = \frac{(2x+1)\pm(2x-1)}{2}$$

eller

$$a_1 = 2x, \qquad a_2 = 1.$$

Värdet a_1 tillkännagifver, att relationen (1) eger rum för hvilket tal som helst, så snart de begge delarne äro lika.

Värdet $a_2 = 1$ angifver det begärda talet; ty insättes $a_2 = 1$ uti eqv. (1), fås

$$x + (1 - x)^2 = (1 - x) + x^2$$

der begge membra äro identiska.

140. Kalla det ursprungliga talet z, tiotalssiffran i det andra x och enhetssiffran y. Man har då enligt uppgiften

$$10x + y = 2z$$
$$xy = z$$
$$2(x + y) = z\,.$$

Då man löser dessa tre eqvationer i afseende på x, y, z, fås

$$x = 3, \quad y = 6, \quad z = 18.$$

Sats 55 (af Lindman), löst af LAGERDAHL.

Sats 55 (I), bevisad årgången 1868 sid. 168 (och befriad från de å sid. 244 anmärkta tryckfel), kan ock på följande vis besannas.

I Björlings algebra, förra delen, not IV, finner man matematiskt-induktivt bevisadt, att

$$a^n - b^n \text{ är restfritt delbart genom } a - b,$$

i likhet hvarmed ock kan bevisas, att

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} \text{ är restfritt delbart genom } a + b.$$

Korollarier.

1. I första satsen sätt a^2 i stället för a, och b^2 i stället för b; då är

$$(a^2)^n - (b^2)^n, \text{ d. ä. } a^{2n} - b^{2n}, \text{ restfritt delbart genom } a^2 - b^2.$$

2. I andra satsen och i första korollariet sätt 2 i st. f. a, och 1 i st. f. b; då är

$2^{2n+1} + 1^{2n+1}$, d. ä. $2^{2n+1} + 1$, restfritt delbart genom $2+1$, d. ä. 3, och

$2^{2n} - 1^{2n}$, d. ä. $2^{2n} - 1$, restfritt delbart genom $2^2 - 1^2$, d. ä. 3; eller hvarje udda dignitet af 2, med 1 ökad, äfvensom hvarje jemn deraf, med 1 minskad, är restfritt delbar genom 3.

Satserna 2 och **3** (F. W. Hultman),
lösta af O. J. Stenborg.

Dessa båda satser äro enskilda fall af följande teorem.

Om b är ett approximativt värde på $\sqrt[n]{a}$, så är $\frac{1}{n}\left\{\frac{a}{b^{n-1}} + (n-1)b\right\}$ ett ännu noggrannare värde derpå.

Vi antaga $b > \sqrt[n]{a}$ och använda följande beteckningar:

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{a}{b^{n-1}} + (n-1)b\right\} = b_1; \qquad b - \sqrt[n]{a} = \beta; \qquad b_1 - \sqrt[n]{a} = \beta_1.$$

Då är

$$\beta_1 = \frac{a + (n-1)b^n - nb^{n-1}a^{\frac{1}{n}}}{nb^{n-1}} = \frac{nb^{n-1}(b - a^{\frac{1}{n}}) - (b^n - a)}{nb^{n-1}}$$

$$= \frac{\beta}{nb^{n-1}}\left\{nb^{n-1} - (b^{n-1} + b^{n-2}.a^{\frac{1}{n}} + b^{n-3}.a^{\frac{2}{n}} + \ldots + b.a^{\frac{n-2}{n}} + a^{\frac{n-1}{n}})\right\},$$

hvilket äfven kan skrifvas

$$\beta_1 = \frac{\beta}{nb^{n-1}}\left\{b^{n-2}(b - a^{\frac{1}{n}}) + b^{n-3}(b^2 - a^{\frac{2}{n}}) + b^{n-4}(b^3 - a^{\frac{3}{n}}) + \ldots\right.$$

$$\left. + b(b^{n-2} - a^{\frac{n-2}{n}}) + (b^{n-1} - a^{\frac{n-1}{n}})\right\}$$

eller

$$\beta = \frac{\beta^2}{nb^{n-1}}\Big\{(n-1)b^{n-2}+(n-2)b^{n-3}a^{\frac{1}{n}}+(n-3)b^{n-4}a^{\frac{2}{n}}+\ldots$$

$$+\,2ba^{\frac{n-3}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}\Big\} \;.\;.\;(1).$$

Emedan $b > a^{\frac{1}{n}}$, är således, om man utbyter $a^{\frac{1}{n}}$ mot b,

$$\beta_1 < \frac{\beta^2}{nb}\,[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1]$$

eller

$$\beta_1 < \frac{n-1}{2b}\cdot\beta^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

Denna formel (2) är märkvärdig, emedan den visar, att b_1 har minst dubbelt så många exakta decimaler, som b, så snart b icke är $< \frac{n-1}{2}$, eller a icke mindre än $\left(\frac{n-1}{2}\right)^n$. Häraf härledes följande enkla sätt att finna $n^{\underline{te}}$ roten ur ett tal.

1:o). Först sökes (ur en tabell, genom försök eller med logaritmer) ett approximativt värde på $\sqrt[n]{a}$. Låt det vara b och ha m exakta decimaler. Sedan divideras a med b^{n-1}, till qvoten adderas $(n-1)b$ och summan divideras med n. Sålunda fås ett nytt värde b_1, som har $2m+\mu$ exakta decimaler, om μ = antalet nollor till venster i det decimalbråk som är $= \frac{n-1}{2b}$. Förfares med b_1 på samma sätt som nyss med b, så fås ett nytt värde b_2 med $4m+3\mu$ exakta decimaler. Likaså b_3 med $8m+7\mu$ decimaler o. s. v. I allmänhet har b_n $2^n.m+(2^n-1)\mu$ exakta decimaler.

2:o). Om $b < \frac{n-1}{2}$ eller $a < \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$, så multipliceras a med 10^{kn} (k = ett helt tal), så att $10^{kn}.a > \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$.

Ur $10^{kn} . a$ sökes $n^{\underline{te}}$ roten enligt föregående regel och divideras sedan med 10^k.

3:o). Man bör städse förvissa sig om att b, b_1, o. s. v., då man med dem vill finna ett noggrannare värde på $\sqrt[n]{a}$, har sista siffran för stor. Ty antages $b < n^{\underline{te}}$ roten ur a, så får β_1 samma värde, som här ofvan i (1), men detta blir då naturligtvis $> \frac{n-1}{2b} . \beta^2$.

T. ex. $\sqrt[5]{20} = ?$ Emedan här $\left(\frac{n-1}{2}\right)^n = 2^5 = 32$, så sökes $\sqrt[5]{2000000}$. Med logaritmer fås $\sqrt[5]{2000000} = 18,205$ på 0,001 när och med sista siffran för liten; alltså $b = 18,206$

$$\frac{2000000}{18,206^4} = 18,20421022, \qquad 4 . 18,206 = 72,824;$$

$$\tfrac{1}{5}(18,20421022 + 72,824) = 18,20564204;$$

således

$$\sqrt[5]{20} = 1,8205642$$

exakt åtminstone på 0,00000001 när.

Satserna 237 och 238 (H. Lagerdahl),

lösta af fröken Alida Rossander.

237. Låt T = bråkets täljare N = dess nämnare; då blifva de båda expressioner, som skola jämföras, följande:

$$\frac{T}{N} + \frac{N}{T}; \qquad \frac{(N-T)^2}{TN}$$

eller

$$\frac{T^2 + N^2}{TN}; \qquad \frac{T^2 - 2TN + N^2}{TN};$$

$$\frac{T^2 + N^2}{TN}; \qquad \frac{T^2 + N^2}{TN} - 2.$$

Det första af dessa uttryck är tydligen 2 mer än det andra.

238. Låt a vara det tal, som föregår slutsiffran 5. Det framstälda talet blir då

$$10a + 5,$$

och dess qvadrat

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25.$$

Qvadraten erhålles således genom att multiplicera a med det tal, som är en enhet större; denna produkt göres 100 gånger större och ökas med 25, eller hvad som är detsamma, till produktens slut fogas 25.

När en eller flere nior föregå slutfemman, ändas det tal, som är en enhet större, än det de öfriga siffrorna för sig bilda, med en eller flere nollor, hvarigenom multipliceringen förenklas.

AFDELNING II.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. DILLNER.

(Forts. fr. sid. 120).

Rättelse.

Sid. 112 rad. 9 nedifr., läs: $f_n(\xi) = $ etc.

„ 113 „ 1 „ läs: under det ϱ_ω med ett enkelt hvarf beskrifver en sluten kontur med sitt origo *utom* eller *inom* honom, i hvilket senare fall $\varrho_{\omega \underline{\underline{s}}}$ argument etc.

152. Af den i föreg. § bevisade satsen ha vi lärt oss, att, om det är möjligt att bestämma $R_{\Omega \underline{\underline{s}}}$ vinkelbana för

en af ϱ_ω beskrifven sluten kontur, så veta vi med detsamma, att det gifves lika många rotpunkter inom konturen, som det antal gånger 2π innehålles i vinkelbanan. Om vi således enligt § 144 sätta

$$R_\Omega = f(\varrho_\omega) = X + Y_{\frac{1}{2}\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48),$$

der X och Y äro funktioner af ϱ och ω eller af ξ och η, då $\varrho_\omega = \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$, så är

$$\Omega = \operatorname{Arctg} \frac{Y}{X}.$$

För hvarje af Ω beskrifvet helt båghvarf d. v. s. för en vinkelbana 2π eller -2π passerar qvoten $\frac{Y}{X}$ minst två gånger ∞ under teckenändring. Men i allmänhet taget kan $\frac{Y}{X}$ för en vinkelbana $\pm 2\pi$ passera ∞ ett obegränsadt antal gånger och deribland möjligen äfven någon eller några gånger utan teckenändring. Således om $R_\Omega = OP$ (fig. 18) beskrifver konturen $PABCDEF$, så passerar $\frac{Y}{X}$ ∞ hvarje gång konturen skär eller berör den från origo O utgående mot grundrigtningen vinkelräta linien $EFDBAC$. Under antagande, att R_Ω beskrifver sin kontur i den af pilteckningen antydda leden, så passerar $\frac{Y}{X}$ ∞ i punkten A från + till −, i punkten B från − till +, i punkten C från + till −, i punkten D från + till +, i punkten E från + till − och i punkten F från − till − o. s. v., allt detta under det Ω beskrifver vinkelbanan 2π. Antaga vi åter, att Ω går i motsatt led eller beskrifver vinkelbanan -2π, så passerar $\frac{Y}{X}$ ∞ i de anförda punkterna, men med omkastad teckenändring, så att hvarje ändring från + till − öfvergår i − till + och tvärtom. Om vi derför beteckna hvarje passage från $+\infty$ till $-\infty$ med $+1$ och hvarje passage från $-\infty$ till $+\infty$ med -1 samt hvarje passage genom ∞ utan teckenändring med 0, och vi i enlighet med Cauchy benämna hvar och en af dessa siffror *index* *, så kunna vi omedelbart ur figguren sluta oss till följande vigtiga sats: *summan af indices är 2 för hvarje vinkelbana 2π och -2 för hvarje vinkelbana -2π, och i allmänhet $\pm 2r$ för en vinkelbana resp. $\pm 2r\pi$;* och omvändt.

153. Om vi antaga den ena af de i X och Y ingående variablerna konstant, under det den andra kontinuerligt varierar från värdet a till värdet b, och vi i enlighet med Cauchy beteckna summan af indices (»indiceintegralen») för qvoten $\frac{Y}{X}$ mellan anförda gränser med

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{J}}} \frac{Y}{X},$$

så följer, enär X och Y såsom hela rationela polynom äro kontinuerliga, att qvoten $\frac{Y}{X}$ endast kan ändra tecken vid passerandet af 0 eller ∞, då alltså

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{J}}} \frac{Y}{X} + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{J}}} \frac{X}{Y} \text{ är } \begin{cases} 1^0 = +1 \\ 2^0 = -1 \\ 3^0 = 0 \end{cases}$$

allt efter som

$$1^0 \quad \Big|^{a} \frac{X}{Y}^{**} > 0 \quad \text{på samma gång som} \quad \Big|^{b} \frac{X}{Y} < 0,$$

$$2^0 \quad \Big|^{a} \frac{X}{Y} < 0 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad \Big|^{b} \frac{X}{Y} > 0,$$

$$3^0 \quad \Big|^{a} \frac{X}{Y} \quad \text{och} \quad \Big|^{b} \frac{X}{Y} \quad \text{ha samma tecken.}$$

---

* Vi anföra här den del af Cauchys *Indicekalkyl* (jfr Journal de l'école polytechnique, Cahier XXV, pag. 176), som omfattar metoden för indexsummeringen. Vår beteckning af passagen öfver ∞ under teckenändring med $+1$ och -1 är till förtecknet motsatt Cauchys, hvilken förändring vi för symetriens skull vidtagit för att indexsumman ± 2 må motsvara resp. vinkelbanan $\pm 2\pi$.

** Vi begagna här substitutionsbeteckningen $\Big|^{a} \frac{X}{Y}$ etc. såsom ut-

Denna sats kan inläggas i följande formel:

$$\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{Y}{X} + \mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{X}{Y} = \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{J} \Big|^a \frac{X}{\delta Y} - \mathrm{J} \Big|^b \frac{X}{\delta Y} \right\} \quad . \quad . \quad (49),$$

der δ är en variabel, som passerar 0 genom att kontinuerligt öfvergå från ett positivt till ett negativt talvärde.

Anm. Skulle det inträffa, att en substitution t. ex. $\Big|^a \frac{X}{Y}$ blifver 0 eller ∞ och således till förtecknet obestämd, så ega vi att efter vanliga metoder undersöka tecknet för substitutionen $\Big|^{a+\varepsilon} \frac{X}{Y}$, der ε är ett litet tillskott i den rigtning variabeln rör sig. Skulle det åter inträffa, att både $|^a X$ och $|^a Y$ blefve 0, så innebär detta enligt (48), att a är en rot till eqvationen $f(\varrho_\omega) = 0$ och kan då enligt § 148 frånskiljas.

154. Såsom omedelbara följder af definitionen på indexsumma framgå följande tre satser.

$$1^0 \quad \mathop{\mathrm{J}}_a^b - \frac{Y}{X} = - \mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{Y}{X};$$

$$2^0 \quad \mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{Y}{X} \quad = - \mathop{\mathrm{J}}_b^a \frac{Y}{X};$$

$$3^0 \quad \mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{Y}{X} \quad = \quad \mathop{\mathrm{J}}_a^\alpha \frac{Y}{X} + \mathop{\mathrm{J}}_\alpha^b \frac{Y}{X},$$

i hvilken sista likhet α är tal, som till sitt värde ligger mellan a och b.

Anm. Med afseende på likheten 3^0 bör man lägga märke till, att, om $\Big|^\alpha \frac{Y}{X} = \infty$, så bör index för denna substitution tagas blott för den ena termen till höger.

---

märkande qvotens $\frac{X}{Y}$ värde vid insättning af det konstanta värdet a i stället för variabeln.

155. Om X och Y, såsom hela rationela polynom af n^{te} dimensionen med afseende på ξ och η, betecknas med resp. φ och φ_1, så erhålles i enlighet med bildandet af de Sturmska funktionerna, då $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ beteckna de successiva resterna efter teckenändring och $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ de successiva qvoterna:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 \cdot q_1 - \varphi_2 \\
\varphi_1 &= \varphi_2 \cdot q_2 - \varphi_3 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varphi_{n-2} &= \varphi_{n-1} \cdot q_{n-1} - \varphi_n .
\end{aligned}$$

Enär de successiva qvoterna såsom varande antingen konstanter eller ock hela rationela polynom af den ingående variabeln icke kunna hafva någon index, så följer af sist anförda likheter med stöd af föreg. § 1°, att

$$\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi}{\varphi_1} = -\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

hvadan (49) öfvergår i följande form:

$$\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}\left|^a \frac{\varphi}{\delta\varphi_1} - \mathrm{J}\right|^b \frac{\varphi}{\delta\varphi_1}\right\} + \mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad \ldots (50).$$

Genom att på $\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ upprepa samma förfarande o.s.v. fås:

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathrm{J}}_a^b \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}\left|^a \frac{\varphi}{\delta\varphi_1} - \mathrm{J}\right|^b \frac{\varphi}{\delta\varphi_1}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}\left|^a \frac{\varphi_1}{\delta\varphi_2} - \mathrm{J}\right|^b \frac{\varphi_1}{\delta\varphi_2}\right\} + \ldots \\
+ \frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}\left|^a \frac{\varphi_{n-1}}{\delta\varphi_n} - \mathrm{J}\right|^b \frac{\varphi_{n-1}}{\delta\varphi_n}\right\} \quad . \quad . \quad . (51),
\end{aligned}$$

då vi således för att finna indexsumman för $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ mellan gränserna a och b blott behöfva undersöka teckenvariationerna hos de två substitutionsföljderna

$$\begin{aligned}
&1^\circ \quad \Big|^a \varphi, \quad \Big|^a \varphi_1, \quad \Big|^a \varphi_2, \ldots \Big|^a \varphi_n \\
&2^\circ \quad \Big|^b \varphi, \quad \Big|^b \varphi_1, \quad \Big|^b \varphi_2, \ldots \Big|^b \varphi_n .
\end{aligned}$$

För hvarje *permanens* i 1°, som motsvaras af en *variation* i 2° blir index +1; och tvärtom, för hvarje variation i 1°, som motsvaras af en permanens i 2°, blir index −1; och slutligen i begge de andra möjliga fallen, nämnl. då permanens motsvaras af permanens och variation af variation, blir index 0. Om vi derför beteckna summan af permanenser i 1°, som motsvaras af variationer i 2°, med P, och summan af variationer i 1°, som motsvaras af permanenser i 2°, med V, så fås i stället för (51):

$$\mathrm{J}_a^b \frac{\varphi_1}{\varphi} = P - V.$$

Om vi vidare med v och p beteckna motsvariga variationer och permanenser i 2°, då följaktligen $P = v$ och $V = p$, samt utmärka summan af *alla* permanenser i 1° med $S = P + P_1$ och i 2° med $s = p + p_1$, då nämnl. P_1 och p_1 utgör antalet permanenser i 1° och 2°, som svara mot hvarandra (således $P_1 = p_1$), så följer, att

$$S - s = P - p = P - V,$$

då alltså

$$\mathrm{J}_a^b \frac{\varphi_1}{\varphi} = S - s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52),$$

d. v. s. *summan af indices för* $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ *mellan gränserna* a *och* b *är = permanensernas antal i substitutionsföljden 1° minskad med permanensernas antal i substitutionsföljden 2°.*

Anm. Om man vid upprepandet af det i (50) angifna förfaringssättet träffar en funktion φ_r, hvilken icke blir 0 för något värde på variabeln mellan eller för gränserna a och b, så eger man att stadna vid denna såsom den sista Sturmska funktionen, hvilket inses deraf, att under detta vilkor indexsumman $\mathrm{J}_a^b \frac{\varphi_{r+r}}{\varphi_r}$ alltid måste vara 0.

156. Genom att enligt (52) söka summan af indices längs en sluten kontur är det således alltid möjligt att be-

stämma antalet $(= \frac{1}{2}(S-s)$, jfr §§ 151 och 152) af de inom konturen befintliga rotpunkterna, under vilkor nämnligen, att φ och φ_1 äro uttryckta under form af hela rationela polynom af den ingående variabeln. Detta vilkor uppfylles, om man låter $\varrho_\omega = \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$ beskrifva en sluten polygon, då hvarje sida, ställd under räta liniens form $\eta = \alpha\xi + \beta$, tillåter en elimination af den ena variabeln i φ och φ_1 utan att förändra dessa polynoms karakter af hela rationela med afseende på den andra variabeln. Det enklaste fall inträffar, då man låter polygonen utgöras af en rektangel med sidorna parallela med resp. ξ och η-axlarne. Om en sådan rektangels hörnpunkter äro i ordning * $(\xi_0\, \eta_0)$, $(\xi_1\, \eta_0)$, $(\xi_1\, \eta_1)$, $(\xi_0\, \eta_1)$ och indexsumman för hela konturen betecknas med Σ, så erhålles

$$\Sigma = \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_0}^{\xi_1}\left|^{\eta_0}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. + \mathop{\mathrm{J}}_{\eta_0}^{\eta_1}\left|^{\xi_1}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. + \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0}\left|^{\eta_1}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. + \mathop{\mathrm{J}}_{\eta_1}^{\eta_0}\left|^{\xi_0}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right.$$

eller med stöd af § 154, 2:o:

$$\Sigma = \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0}\left|^{\eta_1}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. - \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0}\left|^{\eta_0}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. + \mathop{\mathrm{J}}_{\eta_1}^{\eta_0}\left|^{\xi_0}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. - \mathop{\mathrm{J}}_{\eta_1}^{\eta_0}\left|^{\xi_1}\frac{\varphi_1}{\varphi}\right. \quad \ldots (53).$$

157. Om $\varrho_\omega = \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$ beskrifver en cirkel med origo i medelpunkten (ϱ = konstant), så sätta vi, för att φ och φ_1 må framträda såsom hela rationela polynom af *en* variabel:

$$\xi = \varrho \cdot \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

$$\eta = \varrho \cdot \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}.$$

Den närmare betydelsen af ζ finnes, om man sätter $\zeta = \operatorname{tg}\lambda$, hvaraf följer $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} 2\lambda$ eller $\lambda = \frac{1}{2}\omega$. Under

* D. v. s. i den ordning de träffas af en komplex, som med sitt origo inom konturen i *positiv* led beskrifver densamma.

det således ω går från 0 till π, går ζ från 0 till $+\infty$, och, under det ω vidare går från π till 2π, går ζ från $-\infty$ till 0. I stället för (53) få vi således med denna substitution

$$\sum = \int_{\zeta=0}^{\zeta=\infty} \frac{\varphi_1}{\varphi} + \int_{\zeta=-\infty}^{\zeta=0} \frac{\varphi_1}{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1}{\varphi} \text{ (enl. § 154)} \quad . \; . \; . \; (54).$$

Anm. Om φ och φ_1 äro af $n^{\underline{te}}$ dimension med afseende på ξ och η, så bli de af $2n^{\underline{te}}$ graden med afseende på ζ. Den fördel, som cirkelkonturen enligt (54) erbjuder framför rektangelkonturen enligt (53), att nämnligen erfordra blott en enda indexsummering, då deremot den senare i allmänhet erfordrar fyra, motväges af det större besvär att bilda Sturmska funktioner af polynom af $2n^{\underline{te}}$ graden mot att för rektangelkonturen bilda sådana af polynom af endast $n^{\underline{te}}$ graden. Valet af den ena eller andra konturen för bestämmandet af rotpunkternas gränser måste derför ställas beroende dels af den till lösning framstälda frågans natur dels på den gestalt räkningen antager vid bildandet af de Sturmska funktionerna. Med denna af Cauchy gifna metod för indexsummeringen är det således alltid möjligt att för hvilken hyfsad numerisk eqvation som helst med vare sig reela eller imaginära koefficienter angifva gränserna för så väl de reela som de imaginära rötterna genom att innesluta dem inom cirklar eller rektanglar (polygoner) eller inom de af dessa konturer bildade mellanrum. Det hufvudsakliga besväret ligger naturligen i bildandet af de Sturmska funktionerna för de särskilda substitutionerna af konstanta värden på den ena variabeln, hvilket besvär dock stundom i någon mon kan lättas enligt de förenklingsreglor, som äro gifna vid den kända framställningen af det »Sturmska teoremet». Den här förebragta metoden kan anses såsom en generalisering i stort af det Sturmska teoremet, och har denna generalisering sin nödvändiga och tillräckliga förutsättning i den för den geometriska kalkylen egendomliga utvecklingsmetoden.

158. Vi antaga det till lösning framstälda n^{te} grads polynomet af formen

$$f(\varrho_\omega) = (\varrho_\omega)^n + A_\alpha \cdot (\varrho_\omega)^{n-1} + \ldots B_\beta \cdot \varrho_\omega + C_\gamma,$$

hvaraf följer i enlighet med § 145, då $f(\varrho_\omega)$ sättes $= X + iY$ och $\varrho_\omega = \xi + i\eta$:

$$X + iY = f(\xi) + i\eta f'(\xi) + \frac{(i\eta)^2}{1 \cdot 2} f''(\xi) + \ldots \frac{(i\eta)^n}{1.2..n} f^{(n)}(\xi) \ldots (55).$$

För det fall, att koefficienterna $A_\alpha, \ldots B_\beta, C_\gamma$ äro reela, d. v. s. $\alpha, \ldots \beta, \gamma$ af formen $k\pi$ (k = helt tal eller 0), erhålles

$$\left.\begin{aligned} X = \varphi &= f(\xi) - \frac{\eta^2}{1 \cdot 2} f''(\xi) + \frac{\eta^4}{1.2.3.4} f^{IV}(\xi) - \ldots \\ Y = \varphi_1 &= \eta f'(\xi) - \frac{\eta^3}{1.2.3} f'''(\xi) + \frac{\eta^5}{1.2\ldots5} f^{V}(\xi) - \ldots \end{aligned}\right\} (56).$$

Om ε är ett positivt tal och vi antaga $\eta_0 = -\varepsilon$ och $\eta_1 = \varepsilon$, så reduceras enligt § 154, 1°, indexsumman (53), under antagande af de i (56) gifna uttrycken på φ och φ_1, till följande form:

$$\sum = 2 \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0} \left|{}^{\varepsilon} \frac{\varphi_1}{\varphi} + \mathop{\mathrm{J}}_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \right|^{\xi_1} \frac{\varphi_1}{\varphi} - \mathop{\mathrm{J}}_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left|^{\xi_0} \frac{\varphi_1}{\varphi} \right. \quad \ldots \quad (57).$$

Antages i (57) ε oändligt liten, d. v. s. rektangelkonturen oändligt smal och midt i tu delad längsefter af ξ-axeln, så öfverväger första termen i hvardera polynomet (56) numeriskt summan af de öfriga och bestämmer följaktligen med sitt tecken tecknen för φ och φ_1, då vi alltså för (57) få

$$\sum = 2 \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\varepsilon f'(\xi)}{f(\xi)} + \mathop{\mathrm{J}}_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\eta f'(\xi_1)}{f(\xi_1)} - \mathop{\mathrm{J}}_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\eta f'(\xi_0)}{f(\xi_0)}.$$

Under det η går från $-\varepsilon$ till $+\varepsilon$, blir hvardera af de två sista indexsummorna 0, då följaktligen

$$\sum = 2 \mathop{\mathrm{J}}_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\varepsilon f'(\xi)}{f(\xi)} \quad \ldots \ldots \quad (58).$$

Om $f(\xi)$ och $f'(\xi)$ icke ha någon gemensam rot mellan ξ_0 och ξ_1 och vi antaga indexsumman mellan dessa gränser vara r, då följaktligen $\Sigma = 2r$, så finns det inom den oändligt smala rektangelkonturen eller, som är detsamma, på ξ-axeln mellan ξ_1 och ξ_0 enligt § 156 r stycken rötter, d. v. s $f(\xi)$ passerar noll r gånger, under det ξ går från ξ_1 till ξ_0. Det »Sturmska teoremet» får alltså ur denna synpunkt följande lydelse: *permanensernas antal i följden af de »Sturmska funktionerna» för substitutionen* ξ_1, *minskad med permanensernas antal i samma funktionsföljd för substitutionen* ξ_0, *är = antalet reela rötter mellan gränserna* ξ_1 *och* ξ_0.

Anm. Som vi se, är det »Sturmska teoremet» ett ytterst enskildt fall af den allmänna satsen att genom indexsummering bestämma antalet rotpunkter inom en gifven sluten kontur. För det fall, att vi vilja innesluta de imaginära rötterna till en eqvation med reela koefficienter inom en rektangel eller cirkelkontur, ega vi att af de i (56) gifna polynom φ och φ_1 bilda de Sturmska funktionerna efter behörigen enligt (53) och (54) verkstälda substitutioner. För det allmännaste fallet, då det gäller att begränsa rötterna till en eqvation med imaginära koefficienter, ha vi att af de två projektionerna X och Y, som erhålles i (55), bilda Sturmska funktioner och sedan på behörigt sätt enligt nyss antydda formler behandla dessa. Närmare detaljer och belysning genom exempel lemna vi å sido såsom ledande till en här måhända mindre lämplig vidlyftighet.

159. Vi gå nu att beröra några allmänna bestämningar hos konturer, hvilka äro af behof vid våra följande undersökningar rörande ett helt rationelt polynoms derivata.

1. En kontur säges vara *bugtig*, så länge limes för »kontigensvinkeln» * i hvarje punkt är 0. Närmar sig

---

* Kontingensvinkel = vinkeln mellan tvenne konsekutiva tangenter, räknad från den föregående till den efterföljande, då den ordning, i hvilken dessa anses följa på hvarandra äfvensom deras rigtningar (= konturelementens rigtningar), räknas i den led, hvari konturen tänkes beskrifven af komplexen.

denna vinkel 0 från positiva hållet, så säges konturen vara *positivt devierad*, men *negativt devierad* i motsatt fall.

Anm. Öfvergången från en positivt till en negativt devierad kontur sker genom »inflexionspunkten».

2. Med *spets* förstå vi den punkt på en kontur, der kontingensvinkeln är π. Inträffar i någon punkt på en kontur, att kontingensvinkeln har något värde mellan 0 och π eller mellan π och 2π, så kallas en sådan punkt *hörn*, hvilken, som vi skola se, innebär en diskontinuitet, som icke förekommer i våra närvarande undersökningar.

Anm. En spets (eller hörn) kan på samma gång vara inflexionspunkt.

3. Med *slinga* förstå vi en bugtig kontur (således utan spets och hörn), hvars element (»bågelement») från begynnelse- till slutpunkten beskrifver argumentet (»deviationen») $\pm 2\pi$ eller, kortl. uttryckt, hvars konturelements vinkelbana är $\pm 2\pi$. Slingan är antingen sluten såsom fig. 19 a) eller öppen såsom fig. 19 b) eller c). En slinga säges bestå af r hvarf eller vara *r-hvarfvig*, om konturelementets vinkelbana från begynnelse- till slutpunkten är $\pm 2r\pi$. Den enhvarfviga slingan kalla vi i allmänhet *enkel.*

Anm. Den mångvarfviga slingan kan betraktas såsom sammansatt af flere öppna enkla slingor såsom fig. 19 d).

4. Om en del af en enkel slingas plan vrides 180°, så att slingorna a), b), c) fig. 19 forma sig såsom a), b), c) fig. 20, så kallas en sådan slinga *oäkta.* Såsom karakteristiskt för den oäkta slingan är, att hennes konturelements vinkelbana är 0. Den förut definierade slingan kallas i motsats mot denna för *äkta.* Om vi tala om slinga utan vidare tillägg, så förstå vi dermed alltid den äkta.

Följdsats. Vinkelbanan för en mångvarfvig slingas konturelement minskas med 2π för hvarje enkel slinga, som vrides eller öfvergår till oäkta. Om således vinkelbanan för en r-hvarfvig slingas konturelement är $2r\pi$, så blir hon, om p enkla slingor öfvergå till oäkta, $2(r-p)\pi$.

160. Om vi låta punkterna P' och Q' (fig. 12) närma sig att sammanfalla med resp. P och Q, så fås enligt § 145:

$$f'(\varrho_\omega) = \lim \frac{H_E}{h_\varepsilon} = \lim \left(\frac{H}{h}\right)_{E-\varepsilon},$$

då således derivatan $f'(\varrho_\omega)$ är till modylen = limes för qvoten mellan de af $f(\varrho_\omega)$ och ϱ_ω beskrifna bågelement i motsvariga punkter och till argumentet = skilnaden mellan dessa bågelements argument; eller kortare uttryckt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{mod} f'(\varrho_\omega) &= \lim \frac{H}{h} \\ \arg f'(\varrho_\omega) &= E - \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (59).$$

Om derför i punkten P af ϱ_ω:s kontur (fig. 21) en tangent af arbiträr längd PL drages samt i den motsvariga punkten Q af $f(\varrho_\omega)^s$ kontur en tangent QM drages, begge i konturelementens rigtningar, så fås

$$\frac{QM}{PL} = f'(\varrho_\omega),$$

då nämnligen M bestämmes så, att $\overline{QM} : \overline{PL}$* = $\lim (H : h)$. I stället för (59) kunna vi således sätta:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{mod} f'(\varrho_\omega) &= \overline{QM} : \overline{PL} \\ \arg f'(\varrho_\omega) &= \widehat{QM} - \widehat{PL} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (60).$$

161. Likheterna (59) och (60) förklara nu till fullo den geometriska betydelsen af första derivatan med hänseende till ett helt rationelt polynom som »primitiva». Om vi såsom i fig. 21 *a*) och *b*) låta ϱ_ω och $f(\varrho_\omega)$ beskrifva sina resp. konturer PP_1 och QQ_1 med motsvarighet i de lika indicerade punkterna, så måste $f'(\varrho_\omega)$ beskrifva någon motsvarig kontur TT_1 såsom i fig. 21 *c*) och det så, att modyl och argument äro bestämda af (59) eller (60). Om vi nu och framgent antaga ϱ_ω beskrifva sin kontur utan spets eller hörn, d. v. s. utan diskontinuitet i konturelementets argu-

---

* Jfr § 112.

ment, så kunna vi med afseende på sambandet mellan primitivans och derivatans konturer uttala följande satser.

1°. *Emedan derivatan* $f'(\varrho_\omega)$ *lika väl som primitivan* $f(\varrho_\omega)$ *uppfyller det i § 145 gifna kontinuitets vilkoret, så varierar hennes argument* $\widehat{QM} - \widehat{PL}$ *kontinuerligt med undantag möjligen af de fall, då* $f'(\varrho_\omega) = 0$, *då alltså, med iakttagande af anförda inskränkning,* $f(\varrho_\omega)$ *måste beskrifva sin kontur utan spets eller hörn d. v. s. kontinuerligt med afseende på konturelementets argument.*

2°. *Ett helt rationelt polynom såsom primitiva kan icke beskrifva något hörn, ty deraf skulle följa, att dess derivata beskrefve ett hörn i nollpunkten, hvaraf åter skulle följa, att andra derivatan beskrefve ett hörn i nollpunkten o. s. v till och med näst den sista, hvilket är orimligt, enär denna, såsom varande af första graden med afseende på* ϱ_ω, *beskrifver sin kontur på enahanda sätt som* ϱ_ω.

3°. *Om* $f'(\varrho_\omega) = 0$ *på samma gång som* $f''(\varrho_\omega)$ *icke är* 0, *så beskrifver enligt 1°* $f'(\varrho_\omega)$ *sin kontur genom nollpunkten (origo) utan spets eller hörn såsom i* T_1, *fig. 21 c), då alltså i denna punkt* $f'(\varrho_\omega)$ *ändrar sitt argument med* π, *hvilket motsvaras af en spets hos primitivan* $f(\varrho_\omega)$ *såsom i* Q_1, *fig. 21 b).* Och omvändt: *om* $f(\varrho_\omega)$ *beskrifver en spets, så måste* $f'(\varrho_\omega)$, *såsom ändrande sitt argument i den motsvariga punkten med* π, *under alla omständigheter vara* 0.

4°. Är $f''(\varrho_\omega) = 0$ på samma gång som $f'(\varrho_\omega) = 0$, men deremot $f'''(\varrho_\omega)$ icke 0, så erbjuder $f'(\varrho_\omega)$ enligt 3° en spets i origo, för hvilket fall $f(\varrho_\omega)$ är kontinuerlig i konturelementets argument d. v. s. saknar spets; är åter $f'''(\varrho_\omega) = 0$ på samma gång som $f'(\varrho_\omega) = f''(\varrho_\omega) = 0$, men deremot $f^{IV}(\varrho_\omega)$ icke 0, så har $f''(\varrho_\omega)$ en spets i origo, för hvilket fall $f'(\varrho_\omega)$ måste passera 0 utan diskontinuitet i konturelementets argument, hvilket åter motsvaras af en spets hos $f(\varrho_\omega)$, o. s. v., hvadan framgår följande allmänna sats: *Om* $f'(\varrho_\omega) = f''(\varrho_\omega) = \ldots f^{(r-1)}(\varrho_\omega) = 0$, men $f^{(r)}(\varrho_\omega)$ *icke* 0, *så erbjuder* $f^{(r-2)}(\varrho_\omega)$, $f^{(r-4)}(\varrho_\omega)$ *eller hvar annan* *derivata, från* $f^{(r)}(\varrho_\omega)$ *räknad, en spets i origo, då primitivan* $f(\varrho_\omega)$ *har spets eller icke, allt efter som* r *är ett jemnt eller udda tal.*

Anm. 1. Om den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna konturen saknar spets för $f'(\varrho_\omega) = 0$, så måste i stället inträffa en *stadningspunkt* [jfr (59)], d. v. s. $f(\varrho_\omega)$ stadnar ett ögonblick i denna punkt, under det hon med en annars kontinuerlig rörelse beskrifver sin kontur. En spets är naturligen ock på samma gång att betrakta som en standningspunkt (vändpunkt) på konturen.

Anm. 2. Om ϱ_ω ersättes af en reel variabel x och vi ansaga $f(x)$ äfven *reel*, d. v. s. röra sig växande eller aftagande på grundrigtningslinien (x-axeln), så förvandlas spetsarne till öfvergångspunkter från växande till aftagande (maximum) eller från aftagande till växande (minimum), hvarigenom således den vanliga teorien för maxima och minima, åtminstone så vidt hon angår hela rationela polynom, framgår såsom ett ytterst specielt fall af satserna 3° och 4°. Skulle åter $f(x)$ bli *imaginär* för det värde på x, som gör den 1^{ta} eller de $(r-1)^{\text{ta}}$ derivatorna noll (r = ett jemnt tal), så veta vi nu, att den af $f(x)$ beskrifna konturen erbjuder för detta värde på x en spets och att det samma inträffar med hvar och en af dessa noll-derivator, som är af jemn ordningsnummer.

162. Om derivatan $f'(\varrho_\omega)$ af ett n^{te} grads polynom $f(\varrho_\omega)$ uppdelas enligt § 149, så fås, då c_1, $c_2 \ldots c_{n-1}$ utmärka de $(n-1)$ rötterna:

$$f'(\varrho_\omega) = n(\varrho_\omega - c_1)(\varrho_\omega - c_2)\ldots(\varrho_\omega - c_{n-1}) \quad . \; . \quad (61).$$

Om nu ϱ_ω beskrifver en sluten kontur, som icke innesluter någon af de $(n-1)$ rotpunkterna, så är enligt § 151 $f'(\varrho_\omega)^{\underline{s}}$ vinkelbana 0, då alltså argumentet $\widehat{QM} - \widehat{PL}$ (fig. 21) rör sig fram och åter med slutresultatet 0 eller, som är detsamma, vinkelbanorna för $\varrho_\omega{}^{\underline{s}}$ och $f(\varrho_\omega)^{\underline{s}}$ konturelement bli samtidigt 2π, d. v. s. då ϱ_ω beskrifvit en enkel slinga P (fig. 22), så har primitivan $f(\varrho_\omega)$ beskrifvit en enkel slinga Q (med origo inom eller utom henne allt eftersom slingan P innesluter någon af $f(\varrho_\omega)$:s rotpunkter eller icke). Då slingan P kontinuerligt vidgar sig att beröra den första rotpunkten c_1, så förvandlar sig slingan Q kontinuerligt till en kontur med spets (eller stadningspunkt) i den motsvariga punkten C_1 (jfr föreg. §). Då slingan P vidare vidgar sig till P', så att hon innesluter rotpunkten c_1, så blir $f'(\varrho_\omega)$:s eller $(\widehat{QM} - \widehat{PL})$:s vinkelbana 2π, då alltså $f(\varrho_\omega)$:s konturelement beskrifver vinkelbanan 4π eller, som är detsamma, $f(\varrho_\omega)$ beskrifver en tvåhvarfvig slinga Q'. För hvarje derivatans rotpunkt, som på detta sätt öfverfares af den enkla slingan P, ökas således slingan Q med ett nytt hvarf, tills slutligen P innesluter alla derivatans $(n-1)$ rotpunkter, då $f(\varrho_\omega)$:s motsvariga slinga Q måste utgöras af n hvarf. Vi sammanfatta resultaten af detta räsonnement i följande allmänna satser.

1. *En ny slinga kan på en sig kontinuerligt vidgande kontur icke bildas annorlunda än genom en spets (eller stadningspunkt*, jfr föreg. § *anm. 1*).

2. *Ett n^{te} grads polynom $f(\varrho_\omega)$ beskrifver en r-hvarfvig slinga, om ϱ_ω beskrifver en enkel slinga, som innesluter $(r-1)$ af första derivatans rotpunkter.*

3. *Ett n^{te} grads polynom $f(\varrho_\omega)$ kan beskrifva en slinga med n hvarf men icke flere, hvilket inträffar, om ϱ_ω beskrifver en enkel slinga, som innesluter första derivatans alla $(n-1)$ rotpunkter.*

163. Vi kunna nu i öfverensstämmelse med föreg. § lätt föreställa oss, huruledes de successivt sig bildande nya slingorna på den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna konturen undan för undan vidga sig att omsluta $f(\varrho_\omega)$:s origo, hvarigenom $f(\varrho_\omega)$:s vinkelbana för hvarje sådan omslutande slinga ökas med 2π, och att i allmänhet för en på detta sätt bildad slinga, som med r hvarf omsluter origo, $f(\varrho_\omega)$:s vinkelbana är $2r\pi$. Men vi kunna icke sluta omvändt, att, om $f(\varrho_\omega)$:s vinkel-

bana är $2r\pi$, detta med nödvändighet innebär, att den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna konturen utgöres af minst r enkla slingor. Ty vore detta sannt, så skulle alltid en af ϱ_ω beskrifven slu-kontur, som innesluter r rotpunkter, tillhöriga primitivan $f(\varrho_\omega)$, äfven innesluta minst $(r-1)$ rotpunkter, tillhöriga första derivatan $f'(\varrho_\omega)$, hvilket är påtagligen orimligt, enär man kan tänka sig en kontur, som innesluter huru många rotpunkter som helst af det förra slaget utan att behöfva innesluta en enda af det senare. För att förklara denna skenbara motsägelse antaga vi ϱ_ω beskrifva en enkel kontur P (fig. 23), som t. ex. innesluter två rotpunkter a_1, a_2, tillhöriga $f(\varrho_\omega)$ utan att innesluta någon af första derivatans rotpunkter; den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna motsvariga konturen Q måste då vara en enhvarfvig slinga och dertill sådan, att $f(\varrho_\omega)$:s vinkelbana blir 4π, d. v. s. en sammansättning af en enkel äkta såsom AQB och en oäkta slinga såsom BCA. På samma sätt inses, att, om P innesluter r af $f(\varrho_\omega)$:s rotpunkter utan att innesluta någon af första derivatans, så utgöres den motsvariga konturen Q af en enkel äkta och minst $(r-1)$ oäkta slingor. Med stöd af detta räsonnement kunna vi nu uttala följande allmänna satser:

1. *En kontur a) fig. 24 förvandlas till en oäkta slinga b) utan att passera genom någon spets [stadningspunkt]* (d. v. s. utan att $f'(\varrho_\omega)$ blir 0).

2. *En oäkta slinga BCA (fig. 23) kan icke förvandlas till äkta* (d. v. s. $f'(\varrho_\omega)$ öka sin vinkelbana med 2π) *utan att dess ena ygla C försvinner genom en spets [stadningspunkt]*.

3. *Om $f(\varrho_\omega)$:s vinkelbana är $2r\pi$, så måste af de r slingor, som gå omkring origo, minst en vara äkta; de öfriga $(r-1)$ slingorna kunna dels vara äkta dels oäkta.*

4. *Om ett n:te grads polynom $f(\varrho_\omega)$ beskrifver vinkelbanan $2n\pi$ i ständigt samma led, d. v. s. utan någon fram- och återgående rörelse hos argumentet, så måste alla n slin-*

gorna, som omfatta origo, vara äkta; ej heller kan under detta vilkor den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna konturen dessutom ega någon vare sig äkta eller oäkta slinga.

Någon äkta eller oäkta slinga utom origo kan nämnl. icke gifvas ej heller någon oäkta slinga, omfattande origo, ty i begge fallen skulle en fram- och återgående rörelse hos $f(\varrho_\omega)$:s argument bli en nödvändig följd; icke heller kan det gifvas flere än n äkta slingor, omfattande origo, ty polynomet, såsom icke egande flere än n rötter, kan icke beskrifva en mer än n-hvarfvig slinga omkring origo.

164. Vi kunna nu uttala följande vigtiga sats rörande läget af primitivans och första derivatans rotpunkter.

Om primitivans rotpunkter förenas med räta linier så, att dessa bilda en »konvex» * *sluten polygon, hvilken på samma gång innesluter de icke förenade rotpunkterna (om sådana finnas), så äro första derivatans alla rotpunkter belägna inom eller på denna polygon.*

Vi låta a_1, a_2, ... a_n vara primitivans $f(\varrho_\omega)$ n rotpunkter samt $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ (fig. 25) den konvexa slutna polygon, inom hvilken de öfriga rotpunkterna befinna sig. Vi låta vidare ϱ_ω beskrifva en parallelt omslutande polygon P med afrundade hörn och det så, att den inre polygonen i ingen af sina hörnpunkter berör den yttre. Vi kunna enligt § 151 sätta följande likhet

$$f(\varrho_\omega) = X_1 \,.\, X_2 \ldots X_n\,,$$

der X_1, X_2, ... X_n äro resp. a_1P, a_2P, ... a_nP. Om nu ϱ_ω beskrifver konturen P i positiv led, så beskrifver hvar och en af faktorerna X_1, X_2, ... X_n sin vinkelbana 2π i ständigt positiv led, då följaktligen äfven $f(\varrho_\omega)$ beskrifver sin vinkelbana $2n\pi$ i ständigt positiv led. Deraf följer enligt föreg. §, sats 4, att den af $f(\varrho_\omega)$ beskrifna konturen måste utgöras af precist n äkta slingor, då alltså första derivatans vinkelbana måste för konturen P vara $2(n-1)\pi$,

* D. v. s. en sådan polygon, hvars alla inre vinklar äro hvar och en $\leqq 180°$.

hvilket åter innebär, att alla hennes $(n-1)$ rotpunkter måste ligga inom densamma. Nu kan konturen P betraktas såsom i hvarje punkt oändligt nära omslutande den gifna polygonen $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, då deraf inses, att första derivatans alla rotpunkter måste ligga inom eller på denna senare.

Anm. 1. Den gifna polygonen $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ kalla vi primitivans $f(\varrho_\omega)$ *rotpolygon.*

Anm. 2. Ett qvadratiskt trinoms rotpolygon kan icke utgöras af annat än den räta linie, som förenar dess två rotpunkter, då deraf inses, att första derivatans rotpunkt måste ligga på denna (jfr § 129). Ett kubiskt polynoms rotpolygon åter måste utgöras af en triangel, inom eller på hvilken således första derivatans två rotpunkter måste befinna sig, o. s. v.

(Forts.).

Att finna volymen af ett revolutionssolidum, då genererande kurvan är hänförd till polarkoordinater.

Af student BOIJE AF GENNÄS.

Låt kurvans eqvation vara $\varrho = \varphi(\theta)$, O origo samt OX grundrigtning (fig. 26). Tag en punkt P på kurvan och låt denna punkts koordinater vara $OP = \varrho$, $\wedge POX = \theta$. Kalla den volym, som uppkommer genom den utaf OP, den godtyckligt dragna radius vector OC samt bågen PC begränsade plana ytan POC:s rotation kring OX för V. Gifver man θ inkrementet $\Delta\theta = \wedge P'OP$, så erhåller ϱ inkrementet $\Delta\varrho$, så att $OP' = \varrho + \Delta\varrho$. Drag genom P och P' de mot OP vinkelräta linierna RPM och $P'R'M'$ samt från R, P, R' och P' perpendiklarne RT, PS, $R'T'$, $P'S'$ mot OX. Kalla den volym, som plana ytan POP' genom sin rotation omkring OX genererar, i analogi med det föregående för ΔV. Tages $\Delta\theta$ så liten, att radius vector och vectorialvinkeln inom samma intervall PP' vexa eller aftaga kontinuerligt, så måste vol. ΔV till sin storlek ligga emellan vol. $R'OP'$ och vol. ROP. Man har således

$$\text{vol. } ROP \gtrless \Delta V \gtrless \text{vol. } R'OP'$$

eller

$$\text{vol. } ROM - \text{vol. } POM \gtrless \Delta V \gtrless \text{vol. } P'OM' - \text{vol. } R'OM'$$

eller

$$(\text{konen } ROT + \text{kon. } RTM) - (\text{kon. } POS + \text{kon. } PSM)$$
$$\gtrless \Delta V \gtrless (\text{kon. } P'OS' + \text{kon. } P'S'M') - (\text{kon. } R'OT' + \text{kon. } R'TM')$$

eller

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{OM}(\overline{RT}^2 - \overline{PS}^2) \gtrless \Delta V \gtrless \tfrac{1}{3}\pi\overline{OM'}(\overline{P'S'}^2 - \overline{R'T'}^2).$$

Af figuren fås lätt $\overline{OM} = \dfrac{\varrho}{\operatorname{Cos}\theta}$; $\overline{OM'} = \dfrac{(\varrho+\Delta\varrho)\operatorname{Cos}\Delta\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$;

$$RT = \frac{\varrho \operatorname{Sin}(\theta+\Delta\theta)}{\operatorname{Cos}\Delta\theta}; \qquad R'T' = (\varrho+\Delta\varrho)\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\Delta\theta;$$
$$PS = \varrho\operatorname{Sin}\theta; \qquad P'S' = (\varrho+\Delta\varrho)\operatorname{Sin}(\theta+\Delta\theta).$$

Efter insättning af dessa värden och vederbörlig reduktion fås vidare

$$\tfrac{1}{3}\pi\varrho^3\left\{\operatorname{Cos}\theta\frac{\operatorname{tg}^2\Delta\theta}{\Delta\theta} + 2\operatorname{Sin}\theta\frac{\operatorname{tg}\Delta\theta}{\Delta\theta}\right\} \gtrless \frac{\Delta V}{\Delta\theta}$$
$$\gtrless \tfrac{1}{3}\pi(\varrho+\Delta\varrho)^3\left\{\operatorname{Cos}\theta\frac{\operatorname{Sin}^2\Delta\theta\operatorname{Cos}\Delta\theta}{\Delta\theta} + 2\operatorname{Sin}\theta\frac{\operatorname{Sin}\Delta\theta\operatorname{Cos}^2\Delta\theta}{\Delta\theta}\right\}$$

samt vid limesöfvergång, med iakttagande af att limes för

$$\frac{\operatorname{tg}^2\Delta\theta}{\Delta\theta} = 0; \quad \lim.\frac{\operatorname{tg}\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1; \quad \lim.\frac{\operatorname{Sin}^2\Delta\theta\operatorname{Cos}\Delta\theta}{\Delta\theta} = 0;$$

$$\lim.\frac{\operatorname{Sin}\Delta\theta\operatorname{Cos}^2\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1 \quad \text{samt} \quad \lim.\frac{\Delta V}{\Delta\theta} = \frac{dV}{d\theta}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \tfrac{1}{3}\pi\varrho^3 . 2\operatorname{Sin}\theta,$$

hvaraf

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\int\varrho^3\operatorname{Sin}\theta\,d\theta = \tfrac{2}{3}\pi\int_{\theta_2=\wedge COX}^{\theta_1=\wedge POX}\{\varphi(\theta)\}^3\operatorname{Sin}\theta\,d\theta.$$

Exempel.

1. Folium Cartesii.

$$\varrho = \frac{3a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\operatorname{Cos}\theta} \frac{1-2\operatorname{Sin}^2\theta}{1+2\operatorname{Sin}^2\theta}$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi \int \varrho^3 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta = \frac{9\pi a^3}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1-2\operatorname{Sin}^2\theta}{1+2\operatorname{Sin}^2\theta}\right)^3 \frac{\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}^3\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{9\pi a^3}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1-2\operatorname{Sin}^2\theta}{1+2\operatorname{Sin}^2\theta}\right)^3 \frac{\operatorname{Sin}\theta\, d(\operatorname{Sin}\theta)}{(1-\operatorname{Sin}^2\theta)^2}.$$

Sättes $2\operatorname{Sin}^2\theta = \dfrac{\varphi^2}{1-\varphi^2}$, så blifver

$$V = 9\pi a^3\sqrt{2} \int \frac{(1-2\varphi^2)^3 \varphi\, d\varphi}{(2-3\varphi^2)^2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} \left\{ 2\varphi^2 - 6\varphi^4 - \frac{\frac{1}{18}}{\frac{2}{3}-\varphi^2} - \log\left(\tfrac{2}{3}-\varphi^2\right) \right\} + C$$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} \left\{ \frac{4\operatorname{Sin}^2\theta}{1+2\operatorname{Sin}^2\theta} - \frac{24\operatorname{Sin}^4\theta}{(1+2\operatorname{Sin}^2\theta)^2} - \frac{1+2\operatorname{Sin}^2\theta}{12\operatorname{Cos}^2\theta} - \log\frac{2\operatorname{Cos}^2\theta}{3(1+2\operatorname{Sin}^2\theta)} \right\} + C.$$

Volymen, som genereras af kurvans slutna del är

$$= \tfrac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varrho^3 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}(4\log 4 - 3).$$

2. Kurvan $\varrho = \frac{1}{2}a \dfrac{3\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sin}^2\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$

$$V = \frac{\pi a^3}{12} \left\{ -\tfrac{27}{4}\operatorname{Cos}^4\theta - \tfrac{37}{4}\operatorname{Sin}^4\theta - \tfrac{11}{2}\operatorname{Sin}^2\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta - 12\log.\operatorname{Cos}\theta \right\} + C.$$

Kurvans slutna del genererar volymen $\dfrac{\pi a^3}{8}(4\log 4 - 3)$.

3. Lemniscatan.

$$\varrho^2 = 2a^2(\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sin}^2\theta)$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi \int \varrho^3 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta = -\frac{\pi\sqrt{2}}{6a^2} \int \frac{\varrho^4\, d\varrho}{\sqrt{1+\dfrac{\varrho^2}{2a^2}}};$$

sättes $\varrho = a\varphi\sqrt{2}$, så fås

$$V = -\frac{4\pi a^3}{3}\int\frac{\varphi^4 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = -\frac{\pi a^3}{6}\left\{(2\varphi^3-\varphi)\sqrt{1+\varphi^2}+3\log(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right\}+C$$

$$= -\frac{\pi a^3}{6}\left\{\left(\frac{\varrho^3}{a^3\sqrt{2}}-\frac{3\varrho}{a\sqrt{2}}\right)\sqrt{1+\frac{\varrho^2}{2a^2}}+3\log\left(\frac{\varrho}{a\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{\varrho^2}{2a^2}}\right)\right\}+C.$$

Volymen, som hela lemniscatan genererar, är

$$= \frac{\pi a^3}{3}\left\{3\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}\right\}.$$

4. Pascals snäcka.

$$\varrho = b\,\mathrm{Cos}\,\theta \pm a$$

$$\left.\begin{matrix}V'\\V''\end{matrix}\right\} = \tfrac{2}{3}\pi\int_0^{\mp\frac{a}{b}}(b\,\mathrm{Cos}\,\theta\pm a)^3\,\mathrm{Sin}\,\theta d\theta = \tfrac{2}{3}\pi\left\{\frac{a^4}{4b}+\frac{b^3}{4}+\frac{3ba^2}{2}\pm b^2a\pm a^3\right\}.$$

Specialfall.

$$a = b;\quad \left\{\begin{matrix}V' = \tfrac{8}{3}\pi a^3\\V'' = 0\end{matrix}\right. \qquad a = \tfrac{1}{2}b;\quad \left\{\begin{matrix}V' = \tfrac{27}{4}\pi a^3\\V'' = \tfrac{1}{12}\pi a^3.\end{matrix}\right.$$

5. Cardioiden.

$$\varrho = a(1-\mathrm{Cos}\,\theta)$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}(1-\mathrm{Cos}\,\theta)^3\,\mathrm{Sin}\,\theta\,d\theta = \tfrac{8}{3}\pi a^3.$$

6. Cirkeln.

$$\varrho = 2a\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$V = \text{sfæren} = \tfrac{2}{3}\pi\,.\,8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}^3\theta\,d\theta = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

7. Cirkeln.

$$\varrho = 2a\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\,.\,8a^3\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}^4\theta\,d\theta = 2\pi^2a^3.$$

Ett konvergenskriterium för kedjebråk med omvexlande positiva och negativa leder.

Af docent M. FALK.

Om b och a utgöra täljare och nämnare i det gifna kedjebråket, så låter detsamma förvandla sig till

$$B = \cfrac{b'_1}{1 - \cfrac{b'_2}{1 + \cfrac{b'_3}{1 - \cfrac{b'_4}{1 + \dots}}}} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

genom substitutionerna $b'_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $b'_n = \frac{b_n}{a_{n-1}a_n}$, hvilken sista formel gäller för $n > 1$.

Sätt ytterligare i (1)

$$b'_1 = \frac{v_1}{1 - v_1} \quad \text{och för} \quad n > 1$$

$$b'_n = \frac{v_n}{[1 + (-1)^{n-1}v_{n-1}][1 + (-1)^n v_n]}\,{}^*;$$

så erhålles lätt

$$B = \cfrac{v_1}{1 - v_1 - \cfrac{v_2}{1 + v_2 + \cfrac{v_3}{1 - v_3 - \cfrac{v_4}{1 + v_4 + \dots}}}} \quad \dots\dots\dots \quad (2).$$

Låt nu, som vanligt, $\frac{p_n}{q_n}$ beteckna $n^{\underline{te}}$ konvergenten till (2); så finna vi

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= v_1; & p_2 &= (1+v_2)p_1 \\ q_1 &= 1-v_1; & q_2 &= (1+v_2)q_1 - v_2 \end{aligned}\right\} \text{ eller } \begin{aligned} p_2 - p_1 &= v_2 p_1 \\ q_2 - q_1 &= v_2(q_1 - 1) \end{aligned}$$

* Idén till denna substitution hafva vi erhållit ur Prof. C. J. Malmstens afhandling om konvergensen af kontinuerliga bråk i Vet. Akad. Handl. för år 1848.

och i allmänhet

$$\left.\begin{aligned} p_n &= [1+(-1)^n v_n]p_{n-1} - (-1)^n v_n p_{n-2} \\ q_n &= [1+(-1)^n v_n]q_{n-1} - (-1)^n v_n q_{n-2} \end{aligned}\right\} \text{ eller}$$

$$\left.\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= (-1)^n v_n(p_{n-1} - p_{n-2}) \\ q_n - q_{n-1} &= (-1)^n v_n(q_{n-1} - q_{n-2}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ersättes i den första af dessa eqvationer n successivt med n, $n-1, \ldots 3, 2$, i det vi observera, att $p_0 = 0$ och $p_1 = v_1$, så erhålles

$$\begin{aligned} p_n \quad - p_{n-1} &= (-1)^n v_n(p_{n-1} - p_{n-2}), \\ p_{n-1} - p_{n-2} &= (-1)^{n-1} v_{n-1}(p_{n-2} - p_{n-3}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_3 \quad - p_2 \quad &= (-1)^3 v_3(p_2 - p_1), \\ p_2 \quad - p_1 \quad &= (-1)^2 v_2 p_1, \\ p_1 &= -(-1)^1 v_1, \end{aligned}$$

genom hvilkas multiplikation man erhåller:

$$p_n - p_{n-1} = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . v_1 v_2 \ldots v_n \quad . \quad . \quad (4).$$

Genom dylik behandling af den senare af eqvationerna (3) fås

$$q_n - q_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . v_1 v_2 \ldots v_n \quad . \quad . \quad (5).$$

Jemföres (4) med (5), så finner man

$$p_n + q_n = p_{n-1} + q_{n-1} = \ldots = p_2 + q_2 = p_1 + q_1 = v_1 + (1 - v_1) = 1,$$

hvaraf

$$q_n = 1 - p_n$$

och således

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{1 - p_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

I (4) göra vi nu n successivt $= 1, 2, 3, \ldots (n-1), n$ och addera, samt erhålla derigenom

$$\begin{aligned} p_n = v_1 + v_1 v_2 - v_1 v_2 v_3 - v_1 v_2 v_3 v_4 + \ldots \\ - (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} . v_1 v_2 \ldots v_{n-1} - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . v_1 v_2 \ldots v_n \quad . \quad . \quad (7). \end{aligned}$$

Enligt korollariet till teorem XI i § 15 af Björlings Elem. af Alg. Anal. och Diff.kalk. är det för konvergensen af (7) tillräckligt: 1) att aldrig (numeriskt) en term är > än den närmast föregående och 2) att limes för allmänna termen är noll. Vi vilja nu visa, att dessa vilkor äro uppfyllda, om för alla positiva n

$$2b'_{2n} \leqq 1 + b'_{2n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Enligt uttrycket för b'_n i qvantiteterna v är

$$0 < v_1 = \frac{b'_1}{1 + b'_1} < 1\,,$$

$$0 < v_2 = \frac{b'_2}{1 + b'_1 - b'_2} \leqq 1\,, \quad \text{om} \quad 2b'_2 \leqq 1 + b'_1\,,$$

$$0 < v_3 = \frac{b'_3(1 + v_2)}{1 + b'_3(1 + v_2)} < 1\,,$$

$$0 < v_4 = \frac{b'_4}{1 + b'_3(1 + v_2) - b'_4} < 1\,, \quad \text{om} \quad 2b'_4 \leqq 1 + b'_3\,.$$

Antag således, att (8) gäller för alla n, samt att vi för ett visst n funnit $v_1 < 1$, $v_2 \leqq 1$, $v_3 < 1$, $v_4 < 1, \ldots$ $v_{2n-2} < 1$, så hafva vi ur nyss åberopade formel

$$\left.\begin{aligned} 0 < v_{2n-1} &= \frac{b'_{2n-1}(1 + v_{2n-2})}{1 + b'_{2n-1}(1 + v_{2n-2})} < 1 \\ \text{och} \qquad & \\ 0 < v_{2n} &= \frac{b'_{2n}}{1 + b'_{2n-1}(1 + v_{2n-2}) - b'_{2n}} < 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

enär (8) gäller. Vi finna alltså, att alla våra v äro positiva och att intet v är > 1. Häraf följer, att det första vilkoret för seriens (7) konvergens är uppfylldt. Hvad det andra vilkoret beträffar, så kunna vi ej vara förvissade om, att det gäller, förr än vi bevist, att ej på en gång $\lim v_n$ kan vara = 1 för både jemna och udda n. Detta återstår nu att göra. Vi veta om qvantiteterna v, att de aldrig kunna öfverskjuta värdet 1. Vi vilja då se till, om de jemna v kunna hafva 1 till limes. Antag $\lim v_{2n-2} = \lim v_{2n}$ = 1, så ger den senare af formlerna (9)

$$1 = \lim \frac{b'_{2n}}{1 + 2b'_{2n-1} - b'_{2n}}\,*,$$

* Att den i nämnaren negligerade termen $-(1 - v_{2n-2})b'_{2n-1}$ icke ändrar gränsvärdet, bevisas utan svårighet, hvarför vi ej behöfva uppehålla oss dervid.

hvaraf åter, om δ är en positiv qvantitet, som har noll till limes,

$$\frac{b'_{2n}}{1+2b'_{2n-1}-b'_{2n}} = \frac{1}{1+2\delta},$$

hvaraf åter

$$b'_{2n}(1+2\delta) = 1+2b'_{2n-1}-b'_{2n} \quad \text{eller} \quad 2b'_{2n}(1+\delta) = 1+2b'_{2n-1},$$

hvilken eqvation, om $2b'_{2n}$ ersättes med den större qvantiteten $1+b'_{2n-1}$ ur (8) ger olikheten

$$(1+b'_{2n-1})(1+\delta) \geqq 1+2b'_{2n-1} \quad \text{eller} \quad \delta+b'_{2n-1}(1+\delta) \geqq 2b'_{2n-1}.$$

Vi måste nu antaga att $\lim b'_{2n-1} > 0$, samt dividera olikheten med b'_{2n-1}, hvarigenom fås

$$\frac{\delta}{b'_{2n-1}} + 1 + \delta \geqq 2,$$

som i limes blir omöjligheten $1 \geqq 2$. Vi finna således, att, blott $\lim b'_{2n-1} > 0$, aldrig $\lim v_{2n}$ kan blifva $= 1$ (eller om de jemna v oscillera mellan flera limesvärden, att aldrig två konsekutiva jemna v kunna samtidigt hafva gränsvärdet 1). Då $\lim b'_{2n-1} = 0$, visar den förra af formlerna (9), att $\lim v_{2n-1} = 0$. Af allt detta inser man nu lätt, att äfven det andra konvergensvilkoret för serien (7) måste vara uppfylldt, hvaraf således följer, att denna serie nödvändigt konvergerar, då vilkoret (8) gäller. Att, hvilka än de positiva qvantiteterna b' äro, blott de satisfiera vilkoret (8), man alltid kan erhålla de motsvarande qvantiteterna v och blott erhåller ett enda sådant värdesystem, visar omedelbart en blick på eqvationerna näst efter (8) t. o. m. (9).

Användes, hvad vi nu funnit, på formeln (6), så erhålla vi omedelbart följande teorem:

Hvarje kedjebråk med hvarannan led positiv och hvarannan negativ låter förvandla sig till formen (1) *och konvergerar, om vilkoret* $2b'_{2n} \leqq 1 + b'_{2n-1}$ *gäller för alla* n, *blott ej serien* (7) *har gränsvärdet* 1, *hvarom man i hvarje fall har att öfvertyga sig.*

Ett fall, då serien (7) ej kan hafva gränsvärdet 1, är, då $v_1 + v_1 v_2 \leqq 1$ eller (hvilket lätt visas vara detsamma) då $b'_2 \leqq 1$.

Vi begagna på samma gång tillfället att påpeka, att det Malmstenska kriteriet för kedjebråk med blott negativa leder $\frac{a_{n-1} a_n}{b_n} \geqq 4$ visar, att kedjebråket

$$B = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}}$$

konvergerar, så snart $a^2 \geqq b$. Då detta kedjebråk konvergerar, är dess värde $= + \sqrt{a^2 - b}$. Då $a^2 < b$, är kedjebråket ännu reelt och kan således ej representera den i detta fall imaginära $\sqrt{a^2 - b}$. Antaga vi, att det äfven konvergerar för $a^2 < b$, så fås tydligen dess värde ur formeln $B = a - \frac{b}{a + B}$; men detta ger $B = \pm \sqrt{a^2 - b}$ d. v. s. imaginärt. Alltså var vårt antagande, att kedjebråket konvergerar för $a^2 < b$, falskt. Detta är ett enkelt bevis på kriteriets skärpa.

Satser af Lektor LINDMAN.

18. Att finna, när summan af två konjugat-diametrar i en ellips, är störst och minst.

19. Att genom ena brännpunkten i en ellips draga två sådana kordor, att det trapezium, som uppkommer genom att sammanbinda deras ändpunkter, blir det största möjliga.

20. Att i en gifven rät kon inskrifva den största möjliga räta cylinder.

21. Att i ett gifvet sferiskt segment inskrifva den största möjliga räta cylinder.

22. Bevisa, att $\frac{3ab\sqrt{3}}{4} > \frac{12a^4b^2\sqrt{3}}{(3a^2+b^2)^2}$, då $a > b$.

23. Diskutera eqvationen

$$(4-24e^2+9e^4)x^4+2(4-10e^2-3e^4)x^2 = -(2+e^2)^2. \quad (e < 1).$$

24. Att dela en gifven parallelogram i fyra lika stora delar genom två mot hvarandra vinkelräta linier.

AFDELNING III.

Elementärt bevis* för Guldins teorem:

Den volym, som alstras af en plan yta, hvilken vrider sig omkring en i dess plan, ehuru utom densamma, belägen axel, är lika med volymen af ett prisma, hvars bas är lika med den nyssnämnda plana ytan och hvars höjd är lika med den cirkelperiferi, som den plana ytans tyngdpunkt beskrifver.

Låt till en början den plana ytan vara en $\triangle ABC$ (fig. 27), och låt a, b, c beteckna afstånden till axeln från punkterna A, B, C, af hvilka afstånd a antages ligga mellan de båda andra, samt d och e projektionerna på axeln af AB och AC. Den sökta volymen är då den algebraiska summan af tre stympade koner, hvilkas basradier äro a, b, c.

---

* Utarbetadt efter en erinring från en af prof. Zampieris lektioner i Landstrasser Ober-Real-Schule i Wien.

Om K får beteckna den sökta volymen, så är — för den ställning triangeln i figuren innehafver —

$$\frac{3K}{\pi} = d(a^2 + ab + b^2) + e(a^2 + ac + c^2) - (d + e)(b^2 + bc + c^2)$$

$$= d(a^2 + ab - bc - c^2) + e(a^2 + ac - b^2 - bc)$$

$$= \{d(a - c) + e(a - b)\}.(a + b + c).$$

Således är

$$K = \frac{d(a - c) + e(a - b)}{2} \times 2\pi \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

Nu synes af figuren, att $\frac{d(a-c)}{2}$ betecknar ytan af $\triangle ABE$,

och $\frac{e(a-b)}{2}$ » » » $\triangle ACD$,

till följd hvaraf $\frac{d(a-c)+e(a-b)}{2}$ » » » $\triangle ABC$,

hvilken vi hädanefter beteckna med $\triangle$.

Om vidare F är midtpunkten på BC, FG $\frac{1}{3}$ af FA och FH, GK afstånden från F och G till axeln, så är

$$FH = \frac{b + c}{2}$$

och

$$GK = \frac{b + c}{2} + \frac{1}{3}\left(a - \frac{b + c}{2}\right) = \frac{a + b + c}{3}.$$

Men G är tyngdpunkten till $\triangle ABC$ (Cederbloms mekanik s. 22). GK är således afståndet från denna tyngdpunkt till axeln. Sätta vi detta afstånd $= l$, så är

$$K = \triangle . 2\pi l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Om vi nu låta A_n beteckna ytan af en rätlinig n-hörning och l dess tyngdpunkts afstånd från rotationsaxeln samt tänka oss månghörningen genom diagonaler indelad i trianglarne $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_{n-2}$, hvilkas tyngdpunkter ligga på afstånden $l_1, l_2, l_3, \ldots l_{n-2}$ från rotationsaxeln, om vi vidare tänka oss krafter, proportionela mot månghörningens och trianglarnes ytor och parallela med axeln, anbragta i tyngdpunkterna, så är (Cederbloms mekanik sid. 12) resultantens moment i afseende på en punkt hvilken som helst på axeln lika med algebraiska summan af komposanternas momenter i afseende på samma punkt och således

$$A_n \,.\, l = \Delta_1 l_1 + \Delta_2 \,.\, l_2 + \Delta_3 \,.\, l_3 + \ldots + \Delta_{n-2} \,.\, l_{n-2} \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Om K får beteckna den volym, som alstras af månghörningen vid dess vridning omkring axeln, så är enl. (1)

$$K = \Delta_1 \,.\, 2\pi l_1 + \Delta_2 \,.\, 2\pi l_2 + \Delta_3 \,.\, 2\pi l_3 + \ldots + \Delta_{n-2} \,.\, 2\pi l_{n-2}$$
$$= 2\pi(\Delta_1 \,.\, l_1 + \Delta_2 \,.\, l_2 + \Delta_3 \,.\, l_3 + \ldots + \Delta_{n-2} \,.\, l_{n-2}$$

eller ock enligt (2)

$$K = A_n \,.\, 2\pi l\,.$$

Genom limes öfvergång inses slutligen, att satsen fortfar att gälla äfven för de volymer, som alstras genom en plan kroklinig figurs rörelse omkring en i samma plan belägen axel.

LARS PHRAGMÉN.

Om den Stora Pyramiden i Gizeh.

Af A. F. D. WACKERBARTH.

De Egyptiska pyramidernas antal belöper sig till flera hundrade, och den största och äldsta bland dem, nämnligen den stora Pyramiden i Gizeh, har nyligen utgjort ämnet för en vetenskaplig strid, hvars resultat läsarne af denna Tidskrift med intresse sannolikt skola lära känna.

Som bekant är en Egyptisk pyramid i verkligheten ingenting annat än en graf eller minnesvård efter någon Egyptisk konung och vanligtvis konstruerad på följande sätt. En lång, smal och lutande korridor leder nedåt till en med målningar och hieroglyfer smyckad underjordisk kammare, hvarest mumien ligger i en sarkofag, som är försedd med ett tätt inpassadt lock af sten; båda äro vanligtvis prydda med hieroglyfer. Den öfriga delen af byggnaden utgöres helt och hållet af en solid stenmassa. Så snart liket en gång blifvit nedlagdt å dess nyss beskrifna hviloplats, igenmurades ingången, hvarefter pyramiden med dess kungliga invånare öfverlemnades åt den eviga hvilan.

Från detta allmänna inredningssätt afviker den *stora* pyramiden rätt betydligt. Den eger icke allenast en nedåt lutande gång *ab* (fig. 28), som leder till den underjordiska kammaren *c*, hvilken dock ej synes hafva varit begagnad till begrafningsplats, utan derjemte en korridor *de*, med samma lutning uppåt, ledande till ett stort rum *f*, vanligtvis kalladt »kungens kammare», och försedt med en förstuga *g*. En del *he* af denna korridor är mycket högre än de öfriga delarne. Det finnes dessutom en tredje gång *hi*, ledande i horizontel riktning till en kammare *j*, vanligen kallad »drottningens kammare», äfvensom ventilationsrör *k* och *l*, hvilka sätta kammaren *f* i förbindelse med den fria luften, och slutligen ett rör *hb* emellan de båda lutande korridorerna. I kammaren *c* förefans en källa, försedd med vatten från Nilen; i kammaren *f* hade sarkofagen sin plats. Alla kamrarne och korridorerna sakna såväl målningar som hieroglyfer. Till sist må ock nämnas, att ingången *a* var på den norra sidan af pyramiden, och att denna ingång, lika väl som mynningen *d* af korridoren *de*, varit igenmurad med stenblock.

Den väsendtliga olikhet som förefinnes mellan denna och de öfriga pyramiderna, såväl i afseende på dimensioner * som inredning, har gifvit anledning till den förmodan, att denna stora pyramid aldrig varit ämnad till någon graf, utan snarare vore en rikslikare i stort för det gamla Egyptiska riket. Denna egendomliga åsigt framkastades af en med. prof. i Oxford, D:r *Greaves*, som i förra hälften af 1600-talet (1638) besökte pyramiden. Enligt honom skulle ej blott byggnaden i sin helhet och sarkofagen, hvars lock dock förstördes af araberna, utan äfven en i förstugan *g* befintlig stor sten ha utgjort de normala längd-, rymd- och vigtsmåtten för gamla Egypten. Nyligen har denna åsigt blifvit upptagen af K. astronomen för Skottland, Prof. *Piazzi Smyth*, som dock går ännu längre än D:r Greaves. Inom pyramiden finner han ej blott de gamla normalerna för Egypten, utan ock en hel mängd matematiska och astronomiska konstanter, hvilka således redan för forntidens folk skulle varit bekanta, nämnligen förhållandet mellan cirkelns periferi och dess diameter, jordens dimensioner, dess afplattning och medeltäthet (antagen till 5,7), solens afstånd och parallax, jordens hastighet i dess bana, jordens vigt och medeltemperatur (antagen till 20° Cels.),

* Dimensionerna skola i det följande närmare angifvas: i runda tal är sidan = 390 alnar och höjden = 300 alnar.

stjernårets längd i medel-soldygn, precessionskonstanten, (ty summan af pyramidbasens diagonaler, uttryckt i engelska tum, är 25857, d. v. s. ungefärliga antalet af år, som erfordras för 360-graders precession).

De mätningar af pyramidens dimensioner, på hvilka Prof. Smyth grundade sina första beräkningar, äro utförda dels af de franska akademiker, som medföljde Napoleon vid hans egyptiska fälttåg, dels af den engelske resanden, öfverste *Howard Vyze.* Alla äldre resandes uppgifter äro i sjelfva verket så opålitliga och sins emellan så stridiga, att intet vetenskapligt värde kunde tillerkännas dem, ty hela den lägre delen af pyramiden är dold af sand, grus och moras, och ingen af dem hade gräft sig ned till grundvalen, utan de mätte helt enkelt utefter sandytan, sådan denna var vid tidpunkten för hvars och ens besök; — ett förfarande, som tydligen icke kunde leda ens till approximativt riktiga resultat. Också finner man, att dessa uppgifter så betydligt afvika från hvarandra, att skilnaden mellan dem stundom öfverstiger 100 fot. Sedermera har Smyth sjelf 1865, i förening med *Inglis*, anstält en ny mätning och nedlagt resultatet af sina forskningar i flera stora volymer. De tvifvel, som Smyths åsigter framkallade, föranledde till en ny uppmätning af Pyramiden, hvilken för några år sedan anstäldes af den engelska topografiska korpsen, under ledning af Sir *Henry James*, hvars förklaring, med afseende på pyramidens storlek och inredning, helt och hållet afvikande från Smyths, synes vara enkel och tillfyllestgörande. Han finner basens sida vara jemnt 500 grekiska kubiter, och kantens lutning bestämd genom det enkla förhållandet, att densamma stiger 9 enheter i höjd för hvar 10:e enhet längs basens diagonal, samt att gångarnas lutning är beroende af friktionsvinkeln för sten.

Efter denna inledning skola vi nu närmare redogöra för *Smyths* åsigt och vederläggningen af densamma.

---

1. **Pyramidbasens sida.** Vi hafva redan nämnt, att prof. Smyth sökt ur pyramidens dimensioner framleta en mängd matematiska och astronomiska konstanter. För att nå detta mål har han varit nödsakad att göra en mängd godtyckliga antaganden, bland hvilka vi först och främst må nämna, att det hebraiska längdmåttet, eller den s. k. *heliga* kubiten, skulle enligt honom hafva varit 25,025 eng. tum *, d. v. s. en 10-milliondel af jordens halfva polaraxel. Till stöd för detta sitt antagande åberopar Smyth den af Sir *Isaac Newton* författade afhandlingen om de olika kubiterna, i hvilken Newton dock blott visat, att man icke eger några tillförlitliga uppgifter för att noggrannt kunna bestämma den heliga kubitens verkliga längd, men att dess sannolika värde torde ha varit 24,83 eng. t. **, hvilken siffra dock betydligt skiljer sig från det af Smyth antagna värdet. Sifferförändringen söker Smyth emellertid försvara med den anmärkningen, att Newton, om han egt så mycken kännedom om saken som Smyth, visst icke skulle haft något att invända mot denna förändring, hvilket påstående är så mycket förunderligare, som Smyth sjelf ej synes ega några andra uppgifter om det Hebraiska måttet än dem, han ur Newtons ofvannämnda afhandling hämtat. Smyth antager dessutom, i strid mot allt hvad man på historisk väg har sig bekant, att pyramiden, ehuru byggd före Abrahams tid, icke skulle vara någon egyptisk, utan en hebraisk byggnad, som i alla sina detaljer blifvit konstruerad efter en gudomlig uppenbarelse och varit ämnad att för everldliga tider utgöra alla nationers normala likare för mål och vigt.

Då Smyth, i förening med *Inglis*, uppmätte pyrami-

* På somliga ställen synes han föredraga talet 25,07 ± 0,01, men den ofvanstående siffran använder han i sina deduktioner.

** Ett Hebreo-Chaldaiskt kub.mått, som Newton ansåg vara äkta, undersöktes af den lärde fransiskanaren, pater *Mersenne*, hvarvid befanns, att den egypt. kub. var lika med 5 palmi af den Hebr.-Chald. kub., d. v. s. att Hebr. kub $= \frac{6}{5} . 20{,}699 = 24{,}84$ eng. t. $= 25{,}5$ sv. verktum.

dens fyra bas-sidor, befunnos dessa längder vara 9120, 9114, 9102 och 9102, eller i medeltal 9110 eng. tum. Men detta oaktadt föredrager han värdet 9142, och stundom 9166, ehuru ingendera af dessa siffror någonsin genom mätning erhållits. Denna jemnkning förklaras deraf, att Smyth, som hyllar den åsigten, att sidans längd är lika stor med den af honom antagna längden af den hebraiska kubiten, multiplicerad med antalet stjerndygn på ett stjernår (366,257), fann talet 9110 vara för detta ändamål för litet och derför ökade det till 9142 genom att taga mediet mellan den Ingliska och några äldre mätningar, ehuru dessa dock i noggrannhet alldeles icke kunna jemföras med dennes undersökning, af det skäl näinnligen, att Inglis var den förste, som undanröjde grus och moras för att verkligen komma åt hörnstenarne. Icke desto mindre befanns äfven 9142 vara ett för litet värde, och det blef derför i sin ordning utbytt mot 9166, hvilket tal erhölls genom att multiplicera 25,025 med 366,257. På detta sätt lyckades Smyth vinna det resultat, att *pyramidens sida*, eller *det Egyptiska rikets normala längdenhet skulle vara lika med stjernårets längd i stjerndygn, multiplicerad med en 10-milliondel af jordens halfva polaxel.*

Sedermera hafva dock, såsom redan blifvit anmärkt, pyramidens fyra bassidor blifvit uppmätta äfven af den engelska topografiska korpsen, hvars ena afdelning för kort tid sedan varit sysselsatt med en undersökning af den Sinaitiska halfön, och medeltalet befanns nu vara 9130 eng. tum. Mediet mellan denna och den Ingliska siffran är 9120. Som nu den grekiska kubiten, hvilken enligt Herodotus var identisk med den egyptiska*), hade en längd af

---

* Herodotus, Euterpe 168. Ὁ δὲ Αἰγύπτιος πῆχυς τυγχάνει ἴσος ἐὼν τῷ Σαμίῳ. Denna är den vanliga egyptiska kubiten (mahi); den memphitiska kubiten deremot, af hvilken flere stycken finnas i behåll, under form af tumstockar, som arbetarne begagnat, var 20,699 eng. t. eller = 21,249 sv. verktum.

18,2415 eng. tum, hvilket tal går upp 500 gånger i 9120, kunna vi med Sir Henry James antaga såsom sannolikt, att *pyramidens sida var*, eller åtminstone var ämnad att vara, *500 egyptiska* (= grekiska) *kubiter*, och att densamma *icke hade det aldra ringaste att skaffa hvarken med jordens dimensioner eller med årets längd i stjerndygn* *.

2. Vi komma nu närmast till **gradientvinkeln** eller sidoytornas lutning mot horizonten. Enär kaliferna alltid begagnat och araberna fortfarande begagna pyramiderna såsom stenbrott, i följd hvaraf hela den gamla och ursprungligen polerade stenbeläggningen så fullständigt blifvit afskalad, att endast två af de ursprungliga stenarna hafva befunnits vara på sin plats, så att den nuvarande ytan af pyramiden blifvit trappformig, i stället för att densamma fordom var slät, så förstås det af sig sjelft, att någon noggrann bestämning af sidoytornas lutning numera icke kan genom mätning vinnas. Detta oaktadt har Prof. Smyth genom att taga media, och derpå media utaf media, af de olika mätningarna med afseende på de qvarlemnade stenarnas vinklar, för gradientvinkeln funnit slutvärdet $51^0\,51'\,14'',3$. Antages pyramidens horizontela sektion vara en qvadrat, blir hälften af basens perimeter, dividerad med höjden = 4 × cotangenten för gradientvinkeln. Denna cotangent är 3,1415927091, d. v. s. då vi inskränka oss till 7 decimaler = π, periferien för den cirkel, hvars diameter är 1. Smyth antager nu, att Gud, då han inspirerade pyramidens architekt, just valde denna vinkel för att för menniskorna angifva och åt dem för evärdeliga tider bevara värdet på π, men vi betvifla, att någon annan menniska i verlden kan misstänka gudomligheten för ett så hufvudlöst förfaringssätt.

Chefen för den engelska topografiska korpsen, Öfver-

---

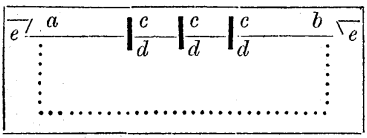
* Notes on the Great Pyramid of Egypt 1869.

ste Sir Henry James har i sitt lilla, men mästerliga arbete: »Notes on the Great Pyramid of Egypt» fullständigt förklarat pyramidens gradientvinkel genom det enkla antagandet, att pyramidens hörnlinie stiger 9 enheter i höjd för 10 enheter af det horizontela afståndet, uppmätt längs basens diagonal, och följaktligen har gradientvinkeln intet afseende på värdet af π. Kalla vi basens sida för a, blir i detta fall pyramidens höjd $= \frac{9}{10} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$, och halfva basens perimeter $2a$; således är $4 \times$ cotangenten för gradientvinkeln $= \frac{10}{9} 2\sqrt{2}$,, och en fjerdedel häraf eller $\frac{10}{9\sqrt{2}}$ är $= 3{,}1427$, men icke $= \pi$. Tangenten för gradientvinkeln är således $\frac{9}{10}\sqrt{2}$, och vinkeln sjelf $= 50^\circ\, 51'$. Detta tal är exakt och alldeles oberoende af vår förmåga att nu mera på mekaniskt vis uppmäta gradientvinkeln. Det var således icke heller nödvändigt vid pyramidens byggnad att ega någon kunskap om vare sig stjernårets längd eller värdet på π.

3. Enligt Smyth är **pyramidens höjd** $\times\ 10^9$ = solens afstånd, hvilket ganska nära öfverensstämmer med verkliga förhållandet. Ty pyramidens höjd är $= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 9120$ $= 5804$ eng. tum. Divideras 3962,4 eng. mil (jordequatorns radie) med $10^9 \times 5804$, erhålles solens parallax $= 8'',925$. Smyths värde på sidans längd och på gradientvinkeln gifva $8'',877$. Men denna koincidens är dock blott och bart tillfällig, ty då pyramidens sida (9120 eng. t.) och stigningen hos hörnlinien (9 på 10) äro gifna, så kunna äfven alla öfriga dimensioner hos pyramiden härur erhållas. Den omständigheten, att dess höjd (5804 eng. t.) har de tvänne första siffrorna identiska med de tvänne första siffrorna i solens afstånd, uttryckt i tum, kan naturligtvis icke ega

någon betydelse. Flere andra mer eller mindre noggranna koincidenser gå vi i tysthet förbi.

4. **Sarkofagen.** En egyptisk sarkofag är vanligtvis inrättad på följande sätt. Den är hel och hållen af sten. En af sidorna har sin öfre del bortskuren, för att locket *ab* (se vidstående fig.) må kunna skjutas horizontelt in i dess riktiga ställning. I locket äro tre hål *ccc* borrade nära kanten, och midt emot dem finnas i kistans vägg tre andra mindre fördjupningar *ddd*.



I de förstnämnda hålen insättas tre cylindriska jernstycken tillräckligt långa för att fylla dem, hvarefter locket inskjutes i urhålkningarne *ee*. Så snart detsamma dervid inkommit så långt som det kan gå, falla de tre jerndubbarne genom sin egen tyngd ned i hålen *ddd*, men då djupleken hos dessa sistnämnda hål är mindre än jernpinnarnas längd, så fastläsa dessa locket, hvilket numera icke kan dragas tillbaka med mindre än att hela sarkofagen vändes upp och ned.

Locket till den ifrågavarande pyramidens sarkofag finnes numera icke till; det blef förmodligen sönderslaget, när kalifen El Mamoun, i det IX:e århundradet, uppbröt pyramiden och sarkofagen i den förhoppningen att derstädes finna dolda skatter. Ehuru de samtidiga berättelserna öfver detta helgerån tydligen tillkännagifva, att El Mamoun funnit i sarkofagen ett lik, förmodligen konung *Cheops*, förklarade Prof. Smyth i början, att sarkofagen alls icke var någon sarkofag, äfvensom att ingen i densamma någonsin blifvit begrafven, att något lock aldrig funnits till, lika litet som några urhålkningar för detsamma, utan att sarkofagen var det egyptiska rikets normala rymdmått, och att dess kubikinnehåll var = $\frac{1}{10}$ × (2 Hebraiska kubiter)^3 × jordens täthet, för hvilken senare faktor han antager siffran 5,7. Man erhåller häraf kub.innehållet = $\frac{1}{10}$. $(50{,}05)^3$. 5,7 = 71464 eng. kub.tum = 447 kannor ungefärligen. När han sjelf för sex år sedan besökte pyramiden, fann han dock, att stenkistan verkligen hade urholkningar för ett lock, äfvensom hål för detsammas fastläsande, följaktligen har nog här en gång funnits ett lock, liksom i alla de öfriga egyptiska sarkofagerna. För öfrigt må nämnas, att sarkofagen, långt ifrån att vara en exakt parallelipiped, till alla sina dimensioner, så väl invändigt som utvändigt, varierade rätt betydligt; medellängden utvändigt uppgifves nämnligen till 90,52, maximilängden till 91,41 eng. tum, och de öfriga dimensionerna förete dylika variationer, hvartill kommer att ingen af ytorna är plan. Och slutligen erinra vi derom, att icke blott pyramidens ingång *a* (fig. 28), utan ock ingången *d* af den uppåt lutande korridoren, voro igenmurade med massiva block af huggen granit. Man skulle då tro, att dessa omständigheter bort vara tillräckliga att öfvertyga enhvar derom, att ifrågavarande stenkärl icke är något normalt rymdemått, utan helt enkelt konung Cheops likkista. Ty hvilken skulle väl göra ett normalmått för rymd med oregelbundet bugtiga ytor, hvars kubikinnehåll det är omöjligt att noggrannt beräkna, eller inmura det i en grift, der det blir alldeles oåtkomligt och dessutom göra det noggrannt i form af en likkista och såsom sådan äfven begagna detsamma. Dylika skäl gälla dock ingenting för prof. Smyth, som fasthållande sin älsklings-idé om ett normalmått tror sig ha funnit, att kistans inre volym är noggrannt (noggrannheten inskränker sig dock endast till de tvenne första siffrorna) hälften af dess yttre volym, och dessutom, att summan af dess största längd och största bredd, dividerad med dess största höjd är = π (till 2 decimaler, ty 3:e decimalen afviker), hvari han finner ett ytterligare bevis för sin åsigt, att kung

Cheops' likkista måste hafva varit Egyptens normala rymdmått.

Framför mig står i detta ögonblick ett pianoforte, hvars längd är 6 fot, dess bredd $2^f 7^t = 2^f,583$ och dess höjd från messingstrissorna $2^f 8^t,75 = 2^f,73$. Nå väl, oaktadt vi äfven här finna, att

$$\frac{\text{längden} + \text{bredden}}{\text{höjden}} = \frac{6 + 2{,}583}{2{,}73} = 3{,}14\,,$$

så tror jag ändock icke, att mitt pianoforte är eller någonsin har varit Sveriges normala rymdmått, ej heller att det blifvit förfärdigadt efter någon gudomlig uppenbarelse.

En stor sten, fästad i muren till förstugan *g*, *antager* Smyth hafva i vigt varit lika med vigten af den vattenmassa vid 20° C. (ungef. 2750 ℔), som motsvarar kistans volym. Denna »normala» vigt var således icke endast förvarad i förstugan *g*, dit ingen under vanliga förhållanden kunde komma, utan ock fästad i muren, så att den ej kunde begagnas för vägningar och justeringar, om den ock i öfrigt varit åtkomlig; — men ändock anser Smyth, att allt detta tillkommit genom en gudomlig ingifvelse!

5. Vidare har prof. Smyth ett kapitel angående **vinkelmåttet** hos pyramid-byggmästarne, hvilka, enligt honom, icke voro Egyptier utan Hebreer af en epok äldre än Egyptens historiska tider, i hvilket kapitel han påstår, att de delade den räta vinkeln i 250 grader, äfvensom ett kapitel om deras termometerskala, der han bestämmer, att deras nollpunkt var densamma som hos oss, d. v. s. temperaturen hos smältande snö, men att kokpunkten var 250°, och således temperaturen af glödgande jern (rödt i mörkret) 1000°. Till stöd för dessa påståenden anföres icke det ringaste bevis, utan de hvila helt och hållet på prof. Smyths nakna utsago, och sakna, så vidt jag kan inse, hvarje spår af sannolikhet för sig. Vi kunna således förbigå dem såsom alldeles oförtjenta af uppmärksamhet.

6. Vi hafva sett, att grundvalen för hela denna fantastiska byggnad är prof. Smyths förmenta Hebraiska heliga kubit, hvilken han förklarar vara = 25,025 engelska tum. Hans enda grund för detta påstående är, att denna längd just är en 10-milliondel af jordens halfva rotationsaxel och således borde vara en passande qvantitet för ett normalmått. Denna kubit indelar han i 25 delar, hvilka han benämner pyramidal-tum. Hvarje pyramidaltum = 1,001 engelska tum. Utgående från denna enhet uppställer han en komplett serie af tabeller för mått, mål och vigt, hvilka icke äro någonting annat än de nuvarande engelska tabellerna med »pints', gallons, yards, feet, pounds, quarters, tons» etc. etc., ökade i det lineära förhållandet af 1,001 : 1, och dessa påstår han hafva varit de allra äldsta prehistoriska Egyptiernas mått-, mål- och vigtsystem, hörande till en urgammal period, innan de blefvo förderfvade genom afgudadyrkan; — äfvensom att pyramiden och dess tillbehör utgjorde de normala likarne för detta system, och voro uppförda för dess förevigande i everdeliga tider, och att detta allt har skett, enheterna blifvit valda, tabellerna uppstälda, decimal- i st. för duodecimal-räknesystemet infördt, och pyramiden byggd efter en speciel uppenbarelse af Gud till herden Philition eller Philites * (ty namnet

* Prof. S. är en förträfflig pyramidbyggare, men hans pyramider hvila på sina spetsar, så att deras jemnvigt icke är synnerligen stabel. Allt hvad man vet om denna pastorala personlighet består uti några få ord hos Herodotus, hvilken berättar (Euterpe 128), att Egyptierna hyste en sådan afsky för de tyranniska konungarne, som byggde pyramiderna, att de icke en gång ville nämna dem vid namn, utan plägade kalla pyramiderna efter herden Philites, hvilken vid den tiden vallade kreatur i nejden. *Τούτους ὑπὸ μὶσευς οὐ κάρτα θέλουσι Αἰγύπτιοι ὀνομάζειν, ἀλλὰ καὶ τὰς πυραμίδας καλέουσι ποιμένος Φιλίτιος, ὃς τοῦτον τὸν χρόνον ἔνεμε κτήνεα κατὰ ταῦτα τὰ χωρία.* Från dessa ord kan man icke en gång sluta till, huruvida Philites var någon verkligt lefvande menniska, eller blott ett namn, diktadt af Egyptierna, för att undvika nämnandet af ett förhatligt föremål; — således ett sådant namn som

skrifves på begge sätt)!! Det vore en förnärmelse mot läsaren, om vi frågade honom, huruvida han tror, att det behöfdes en gudomlig uppenbarelse för att bestämma π till 2 decimaler, (ty flera riktiga siffror gifva icke prof. S:s ur pyramiden hemtade eqvationer), då enhvar kan komma till detta resultat endast genom att lägga en tråd kring ett vagnshjul eller något annat rundt föremål; — huruvida han tror, att Gud skulle taga ett så stort steg baklänges som att afskaffa duodecimal-systemet för att införa det decimala, eller skulle ingifva en profet idéen om sådana enheter för mått och mål som de ofvan beskrifna och sedermera, för att visa att han skämdes för dem, låta inmura dem på en så otillgänglig plats, att ingen kunde derstädes se dem.

Men prof. Smyth är icke nöjd med att begagna sin imaginära heliga kubit såsom måttstock för att uppmäta pyramiden och jorden; han vill, att den äfven skall gälla såsom mått på nationernas civilisation. Hos honom är det en älsklingssats, att de Nord-Europeiska nationerna, som hafva antagit protestantismen, äro afkomlingar af de tio förlorade Israelitiska slägtena, och att invånarne på Brittiska öarne äro i sjelfva verket Efraims slägt. Således finner han, att deras mått- och vigtsystem icke äro annat än hans återuppfunna gamla hebraiska system, ofullständigt konserveradt genom tradition, och han antager såsom mått på nationernas civilisation den grad af approximation, med hvilken deras normala mått och vigt närma sig till hans imaginära pyramid-kubit af 25,025 eng. tum och hans ima-

»Hum-Hum«, med hvilket de satiriska poeterna i början af detta århundrade betecknade den engelska »Prince Regent«, senare Georg IV, eller Dickens' odödliga »M:rs Harris«. Hvad sjelfva namnet angår, är den senare formen den, som vanligtvis förekommer i de moderna upplagorna af den grekiska texten, men de Aldinska och gamla Pariska upplagorna, och de MSS som dessa representera, hafva Philition, hvilken form allmänt varit antagen af öfversättare och historici.

ginära pyramid-pund af 7196 eng. grains. Ordningen är följande:

1.	Pyramiden.	7.	Livorno.
2.	Preussen.	8.	Österrike.
3.	Danmark.	9.	Brittiska Öarne.
4.	Sverige.	10.	Portugal.
5.	Ryssland.	11.	Frankrike.
6.	Spanien.	12.	Turkiet.

Smyth känner sig djupt bedröfvad deröfver, att Britannien, genom sitt ogudaktiga antagande af »yarden» såsom längd-enhet i stället för den förmenta heliga kubiten, har fallit ifrån sin höga protestantiska ställning ibland de Skandinaviska och Germaniska nationerna och kommit att intaga en låg plats bland de katolska och latinska folken. Han är likväl icke utan tröst. Den engelska topografiska korpsens nya karta öfver England är på en skala af 25,344 eng. tum (d. v. s. nästan en Smythsk helig kubit) på en eng. mil, och ehuru det är svårt att begripa, huru detta kan influera på den engelska rikslikaren, gifver det dock honom anledning att återställa England, eller åtminstone topografiska korpsen till ett högt läge, ja, att till och med sätta densamma i spetsen för verldens civilisation. Men detta utgafs naturligtvis innan hans teori hade blifvit så i grund nedergjord af just denna korps och dess högt begåfvade chef. Sverige intager visserligen en hög plats i hans lista, men huru skulle han icke utgjuta sin vredes skålar öfver Stjernhjelm, om han blott visste, att vårt svenska mått- och målsystem, i stället för att vara en tradition från den inspirerade herden Philition, daterar sig från 1600-talet, och ej är annat än ett försök, ehuru visserligen ett misslyckadt, att återställa just de gamla hedniska romerska måtten och vigterna.

7. Det återstår att angifva prof. Smyths förklaring af den långa **korridorens** *ab* (fig. 28) **lutning** mot hori-

sonten. Denna korridor ligger i meridianens plan, och dess inklination är enligt prof. Smyth 26° 18′. Andra pålitliga resande hafva uppgifvit andra siffror från $25°\frac{1}{4}$ till $26°\frac{3}{4}$. Smyth antager såsom den approximativa epoken för pyramidens byggande år 2128. Vid denna tid var α Draconis * den största stjerna i nejden af Nordpolen, och dess afstånd derifrån var ungefärligen 3° 42′. Pyramidens latitud befanns af Smyth vara just 30°. Nu är $30° - 3° 42' = 26° 18'$ = korridorens lutning. Korridorens lutning är således = stjernans höjd vid dess nedre kulmination, och man skulle alltså kunna observera stjernans nedre passage genom den långa mörka gången, antingen den egde rum under dagen eller natten. Denna förklaring af korridorens lutning, som först framkastades ** af Sir *John Herschel,* men af honom sedermera blifvit öfvergifven, har det emot sig, att ingången till korridoren var igenmurad, och i detta skick är det icke lätt att begripa, huru en observation af en stjerna skulle kunnat anställas.

Men samma skarpsinniga officer, som på ett så öfvertygande sätt förklarat pyramidens form och dimensioner, har äfven med afseende på gångens lutning träffat en lika enkel som tillfredsställande förklaring. Ingången *d* af den uppåtlutande gången var, sedan mumien blifvit lagd i sarkofagen, tillpluggad med stora granitblock, och passagens dimensioner äro vid mynningen något förminskade för att mottaga ett sådant block. Dessa stenar måste läggas i öfre delen af korridoren vid *e*, och sarkofagen i rummet *f*, innan dessa tilltäcktes. Hvarje block var nära 8 alnar långt och vägde nära 90 skeppund; det första eller lägsta blocket var noggrannt hugget att passa in i och tilltäppa

* »α Draconis är nu en föga lysande stjerna af 4:de storleken, men det finnes tydliga bevis på, att hon fordom har varit mera lysande«, Herschel. Prof. Smyth, i sin karta öfver denna del af himlen vid pyramidens epok, tecknar henne såsom af 2:dra storleken. I Ptolemæi tid synes hon hafva varit af 3:dje storleken.

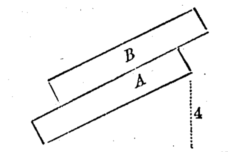
** Herschel. Outlines of Astronomy § 319.

mynningen *d* af uppgången. Lutningen, som just är friktionsvinkeln, är särdeles väl vald, när man betänker, att dessa stenmassor måste åka ned från *e* till *d*; — med en större lutning hade det varit ganska svårt att styra blocken i deras fart nedåt, och med en mindre lutning hade det varit svårt att röra dem.

När en gosse tar fyra tegel för att dermed bygga en fälla för att fånga sparfvar, ställer han ett af dem i en lutande ställning och upphöjer dervid dess ena ända ungefär 4 tum. Nu är ett engelskt tegels längd 9 tum, således hafva vi

$$\tfrac{4}{9} = \text{Sin lutningen} = \text{Sin } 26^0\ 23',$$

d. v. s. gångens lutning.



Låt *A* (se figuren) vara detta tegel. Om man nu lägger ett annat tegel *B* på det förra, skall man finna att det nätt och jemnt skall ligga i hvila derpå, men att en högst obetydlig stöt kommer det att åka ned. Detta bevisar, att för sådana ämnen som tegel och sten,af hvilka pyramiderna äro byggda, denna vinkel är »friktions- eller hvilo-vinkeln», och här hafva vi skälet, hvarför denna vinkel blifvit vald för korridorernas lutning. Då de båda korridorerna hafva samma lutning, är det lätt att inse, huru ett system af afvägda kärror, förenade genom rep, skulle kunna styras af ett enda gångspel, uppställdt antingen i kammaren *c* eller i någon annan af kamrarne, och det är icke osannolikt, att konung Cheops sjelf emellanåt besökte sin egen grift på detta sätt. Vid foten af sidomurarne af den stora korridoren *eh* (fig. 28) är en rad af hålor, ämnade förmodligen att taga emot bjelkar för att förvandla det lutande stengolfvet till en (tillfällig) trätrappa för hans majestäts och måhända äfven för likprocessionens beqvämlighet. De långa urholkningarne i stenarbetet utefter begge sidorna voro förmodligen ämnade för lampor eller facklor vid begrafningen.

Efter konungens död blef mumien i all sannolikhet införd i pyramiden ända till foten af det lägsta stenblocket på ofvanantydda sätt, hvarifrån den måste bäras in i kungens kammare och nedläggas i sarkofagen. Sedan detta blifvit gjordt och processionen lemnat pyramiden, nedsläpptes stenblocken för att stänga ingången *d* till korridoren, och murarearbetet fullbordades för att dölja ingången. Arbetarne, som utfört detta, kunde sedermera, med tillhjelp af en lina komma ut genom röret *hb*, lemna pyramiden och igenmura mynningen *a*, så att hvarje spår af den enda ingången utplånades.

Konung Cheops hoppades, att hans lik »skulle, då »det blef gömdt i midten af denna ofantliga stenmassa, få »hvila i fred till den yttersta domen; och det hvilade verkligen »ostördt i tre tusen år. Men sjelfva griftens herrlighet »väckte i en nedrig muselmans bröst hoppet om att deri »finna ett lika ståtligt rof. Kalifen Al-Mamoun bröt sig »in år 830 i pyramiden, och kungens lik utkastades för »att skymfas och misshandlas af pöbeln på Cairos gator. »Sic transit gloria mundi» *.

8. Jag har i det föregående framstält hufvudpunkterna af prof. Smyths åsigter om den stora pyramiden och de egenheter i denna byggnad, på hvilka han grundar sina påståenden, tillika med den enligt min tanke fullständiga och öfvertygande förklaring af dessa egenheter, som den lärde chefen för engelska Topografiska korpsen har lemnat, hvilken synes mig i grund nedergöra Smyths hela teori. Det är ingen svår sak att finna sätt att ur en byggnads dimensioner frambringa π eller e eller andra af matematikens eller naturens konstanter, utan att denna byggnad har varit ämnad att på något sätt framställa dem.

Halfva pyramidbasens perimeter, dividerad med dess höjd, befanns vara $= 3{,}14 = \pi$ till och med 2 decimaler. Nå väl,

---

* Sir Henry James. l. c.

höjden af spiran på Salisbury domkyrka i England är 4848 tum, d. v. s. längden af en båge af 1″ för en radie af 10^9 engelska tum. Multipliceras $\frac{4848}{10^9}$ med 648000 (antalet sekunder på 180°), så få vi 3,1415 — en något närmare approximation; och i den gamla S:t Pauls domkyrka i London, som förstördes af eldsvådan 1666, var enligt Dugdales planritning längden af tvärkyrkan, trappan vid norra dörren inberäknad, 314 fot, d. v. s. $100 \times \pi$ fot.

Pyramidens höjd $\times 10^9$ befanns vara = solens afstånd, då parallaxen antages = 8″,86. Men längden af Salisbury domkyrka är 480 fot. Detta gifver äfven solens afstånd på samma sätt, om vi antaga en parallax af 8″,99, hvilket värde icke öfverstiger osäkerhetens gränsor. Och återigen: den uppgifna längden af gamla S:t Pauls är 690 fot; — om vi härifrån subtrahera två gånger skeppets yttre bredd, nämnligen 208, enligt Dugdales planritning, när man utelemnar kontreforterna, så få vi 482. Anse vi 10^9 gånger denna siffra för solens afstånd, så få vi en parallax af 8″,95, hvilket är Le Verriers värde.

Längden af den lilla tvärkyrkan i Salisbury uppgifves vara 172 fot. Denna siffra gör icke anspråk på större noggrannhet än att angifva den närmaste foten, och vi kunna således antaga, att den kan vara $1\frac{1}{3}$ tum för stor. I detta fall blir längden

$$2062{,}65 \text{ tum} = \tfrac{1}{100} \times (\text{radien i sekunder});$$

och för gamla S:t Pauls, ehuru den vanligaste uppgiften för spirans höjd är 525 fot, variera de olika uppgifterna mellan 520 och 534 fot, d. v. s.

$$6382 \text{ tum} = 2 \times 3141 \quad \text{eller} \quad 2000 \,.\, \pi \text{ tum}.$$

Salisbury och gamla S:t Pauls skulle förmodligen erbjuda flera koincidenser, i fall vi fortsatte att leta efter dem, ehuru jag valde dessa båda kyrkor alldeles på måfå; hade jag valt Upsala domkyrka eller det i Stockholm år 1866 uppförda industripalatset, skulle de i all sannolikhet icke hafva företett större svårigheter.

Prof. Smyths metod, nämnligen att multiplicera eller dividera med något tal, för hvars införande det vore svårt att lemna något tillfredsställande skäl, såsom t. ex. årets längd, med hvilken basen dividerades, eller jordens täthet, med hvilken sarkofagens innehåll multiplicerades, synes mig i högsta grad farlig. Huru bedrägliga sådana resultat kunna vara, skall jag såsom slut på mina anmärkningar ådagalägga medelst några få exempel.

Ex. 1. I trots af prof. Smyths påstående, att den moderna engelska »inch» är ett gammalt mått från pyramidens tid, förvaradt genom en oafbruten tradition, är det ett välbekant historiskt faktum, att de nuvarande engelska måtten och vigterna icke äro särdeles gamla, utan datera sig från året A.D. 1101. Vid Normanniska eröfringens epok var en engelsk »yard» ungefärligen = 39,6 moderna »inches», d. v. s. litet större än en fransk »Mètre», och således foten ungefärligen = 13,2 moderna »inches», d. v. s. litet större än en Pariserfot. Men året 1101 bestämde konung Henrik I ånyo »yarden» efter längden af sin egen arm, och det är just denna bestämning, som den nuvarande »yard» representerar*. Dessutom har aldrig en »yard», icke en gång i moderna tider, blifvit bestämd såsom någon viss bråkdel af jordens dimension, utan efter sitt förhållande till längden af sekundpendeln vid $51\frac{1}{2}$ graders latitud, och af denna yard är en engelsk fot en tredjedel. Nu är en grad på eqvatorn just = $365\,260^{f},524$. Divideras en tusendedel af detta tal med stjernårets längd i soldygn, 365,256358, så få vi 1,0000114, d. v. s. om vi taga en

* Prof. Smyth påstår visserligen, att denna bestämning af «yard« icke kan influera på «inch« som är ett mycket äldre mått. Att «inch« är äldre än «yard« är obevisadt, begge äro fullt så gamla som vår tidigaste kännedom om engelska språket och literaturen, och då de alltid hafva varit och ännu äro förenade medelst eqvationen

$$\text{yard} = 36 \times \text{inch},$$

har jag svårt att begripa, huru kungen kunde förändra den ena, utan att förändra den andra, och ändock låta eqvationen stå qvar.

1000:de-del af en grad på eqvatorn, och dividera den med stjernårets längd i borgerliga dygn, så få vi en engelsk fot så noga som ett kraftigt mikroskop kan bestämma den; och *dock är det absolut säkert, att detta är blott och bart en tillfällig koincidens.*

Ex. 2. Om jag tar 10 000 gånger e, basen för de hyperboliska logaritmerna, och multiplicerar densamma med den qvantitet, som i mån-teorien kallas för g, d. v, s. förhållandet af skillnaden emellan månens och hans uppstigande nods medelrörelser till månens medelrörelse, och dividerar jordens polar-radius med produkten, blir resultatet längden af pyramidens sida *. Men kan någon tro, att, i fall vår gode vän herden Philition för fyratio århundraden sedan hade, genom den allsmäktige Gudens ingifvelse, erhållit kännedom om mån-teorien, jordens kompression och täthet, och logaritmernas teori och bruk, han skulle hafva dolt denna sin visdom för alla menniskor genom att mura in densamma i pyramiden, nedlagd i mystiska dimensioner, hvilkas betydelse ingen kunde tolka? Är det inte sannolikare, att arkitekten helt enkelt bestämde, att längden af basens sida skulle vara 500 kubiter (760 eng. fot) och således uppmätte detta afstånd.

Ex. 3. Om vi taga medium af de uppgifter om basens längd, som blifvit lemnade af *Vyse*, de franska akademikerna, *Caviglia, Wilkinson, Lane* och *Davison*, så få vi $756\frac{2}{3}$ eng. fot, en siffra, som uttrycker i millimètres barometerns medelhöjd vid Upsala. Men det är föga sannolikt, att konung Cheops byggde med afseende på denna intressanta meteorologiska konstant.

* I detta och i följande exempel, der sidan af pyramidens bas omtalas, så menas den af prof. Smyth i hans första afhandling antagna längden 763,81 eng. fot. Den verkliga längden är 760 eng. fot. Men det var med afseende på denna första afhandling som dessa exempel samlades. Då prof. Smyth för öfrigt, i sina många sedermera utgifna band drifver samma sats medelst samma metod, med blott några få små aritmetiska modifikationer, äro dessa exempel lika lämpliga.

Ex. 4. Om vi multiplicera ihop en 10:de-del af sidan af pyramidens bas, längden af den linie, som förenar pyramidens spets med midten af en sida af basen (d. v. s. höjden hos hvar och en af de fyra likbenta trianglar, som bilda pyramiden) och modylen M för de vanliga logaritmerna, så blir resultatet 3420, mån-parallaxkonstanten, som, i Burgs tabeller, antages = 3420″,96.

Ex. 5. Slutligen, i fall basens sida (763,81 fot) divideras med hyperboliska logaritmen för π, och denna qvot åter med förhållandet (1,00188) mellan gravitationskraften i London och gravitationskraften vid pyramiden (hvars latitud antages vara 30°), blir resultatet 666, vilddjurets mystiska tal i Uppenbarelseboken. Skulle vi deraf kunna sluta till, att vilddjuret i profetens vision var den stora Sfinxen *?

Dessa exempel kunna tjena till att bevisa, att det, med användning af prof. Smyths metod, icke blir svårt att framtrolla hvilken konstant som helst ur den stora pyramidens dimensioner; och de ådagalägga i öfrigt, huru farligt det är att på ofvannämnda sätt *leka med siffror.*

---

*

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Log } 1{,}00188 & = & 0{,}00082 \\
\text{Log}\,(\text{Log}_e \pi) & = & \underline{0{,}05870} \\
 & & 0{,}05952 \\
\hline
\text{Arit kompl.} & = & 9{,}94048 \\
\text{Log } 763{,}81 & = & 2{,}88299 \\
\hline
\text{Log } x & = & 2{,}82347 \\
x & = & 666\,.
\end{array}
$$

AFDELNING IV.

Anmälan och granskning af böcker.

1. MUNDT, C. E. *Lærebog i den elementære plangeometrie tilligemed den plane trigonometrie.* 7:de Udg. Kjøbenhavn 1867. Inbunden 2 rdr 80 öre.

Denna lärobok är ett hufvudarbete i elementargeometrien, skrifvet i enlighet med nutidens fordringar. Detta visar sig af följande redogörelse.

1. Proportionsläran är hänvist till sin rätta plats algebran. Då man läser Euklides' femte bok, har man i sjelfva verket ej lärt sig annat än satserna

$\mu A \pm \mu B = \mu (A \pm B)$.	Eukl. V. 1, 5, 12, 19.
$\mu A \pm \nu A = (\mu \pm \nu) A$.	„ V. 2, 6, 17, 18, 24.
$\mu (\nu A) = (\mu\nu) A = (\nu\mu) A$.	„ V. 3, 4, 20, 21, 22, 23.
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{\mu A}{\mu B}$.	„ V. 7, 14, 15, 16.

μ och ν betyda tal hvilka som helst, rationela eller irrationela.

Dessa satser behöfvas också i algebran, der de bevisas först för rationela tal och sedan medelst antingen exhaustions- eller limesmetoden för irrationela tal. Det är då onödigt att bevisa dem på nytt i geometrien och der ofta under en oigenkänlig form. Icke alla märka t. ex., att satserna om proportionaliteten af likhet hos storhetsgrupper, der storheterna äro proportionela i direkt och omvänd ordning, i sjelfva verket innehålla satsen, att faktorernas ordning är likgiltig äfven då faktorerna äro irrationela. Ännu mera blifva nya bevis för dessa satser onödiga, om såsom ofta händer dessa bevis äro svårfattligare och mera svåra att erinra sig än de algebraiska.

Det är lätt att tänka sig den vinst i tid som genom denna förenkling uppkommer.

2. Mundt har vid många tillfällen i sin geometri begagnat algebran för utförande af sina bevis. Genom att till enhet taga en längd, får han öfriga längder betecknade med tal, samt ytor och kroppar med produkter af respektive 2 och 3 algebraiska tal. Ytterligare enkelhet vinner han genom att härvid begagna de allmänna algebraiska och geometriska tecknen ($+$, $-$, $> = <$, $\wedge$, $//$, $\perp$ m. fl.).

3. Limesmetoden använder han konseqvent vid öfvergång från satser gällande för rationela tal till motsvarande för irrationela, vid öfvergång från rätliniga figurer till krokliniga.

4. Likformighetsbegreppet generaliserar han så, att det passar för plana räta och krokiga linier samt för plana figurer begränsade af räta eller krokiga linier. Härigenom utvidgas elementargeometriens område betydligt.

5. Satserna äro stälda i ett organiskt sammanhang till hvarandra. Detta har blifvit utförbart derigenom, att behöfliga konstruktioner blifvit verkstälda i tanken blott på grund af deras möjlighet.

6. Trigonometrien är synnerligen enkel. Sinus och Cosinus m. m. äro definierade såsom förhållanden mellan linierna i en rätvinklig triangel, hvarvid han dock begagnat den bekanta figuren med cirkeln. För att få begrepp om Sinus och Cosinus m. m. för negativa bågar och för bågar af hvad storlek som helst, generaliserar han den för spetsiga vinklar bevisade formeln

$$\text{Sin}\,(a \pm b) = \text{Sin}\,a\,\text{Cos}\,b \pm \text{Cos}\,a\,\text{Sin}\,b.$$

Vidare visar han, att de Sinus, som man algebraiskt kan beräkna, utgöra hälften af de i planimetrien algebraiskt beräknade och geometriskt konstruerade, då radien tages till enhet. Hans formler för trianglars beräkning äro enkla. Hela trigonometrien är mycket kort.

Mot författarens för öfrigt utmärkta definition på likformiga plana figurer anse vi oss böra anmärka, att den lider af för många bestämningar.

Vidare anse vi att förf. kommer väl sent med sina problem. Detta bör erinra författaren, att han i någon mon bör söka annorlunda gruppera satserna.

För öfrigt allt godt om arbetet.

2. Mundt, C. E. *Lærebog i den elementære stereometrie tilligemed den sphæriske trignnometrie.* 3:e udg. Kjøb. 1868. Inb. 1 rdr 75 öre.

Denna bok har i likhet med plangeometrien egenskapen att vara synnerligen väl redigerad. Särskildt framhålla vi läran om symmetri jämte förklaringen på, huru en kropp, som är symmetriskt lika stor med en annan, genom krängning ut och in, blir kongruent med den samma.

Äfven här finnes en generel definition på (direkt och symmetriskt) likformiga figurer omfattande linier med enkel och dubbel krökning, plana och bugtiga ytor samt kroppar hvilka som helst.

Den sferiska trigonometrien är enkelt och redigt framstäld med hänvisning till den föregående geometriska framställningen af läran om planet och solida vinklar. Här finner man ett synnerligen enkelt elementärt bevis för satsen att en storcirkelbåge är mindre än en småcirkelbåge med samma ändpunkter, vidare ett enkelt bevis för de 5 så kallade platonska kropparnes möjlighet. De antydningar härom, som våra svenska läroböcker innehålla, visa väl att inga andra reguliera polyëdrar kunna sättas i fråga såsom möjliga, men ej att dessa äro verkligen möjliga. — De olika händelserna vid sferiska trianglar äro noga diskuterade med afseende på möjlighet, obestämdhet m. m.

Arbetet är godt. Dock lider definitionen på likformiga figurer af det felet, att den har för många bestämningar. Huru förf. i § 151 i läran om prismer bevisar kongruensen af prismat *FBKIAE* med prismat *GCLMDH*, ha vi ej lyckats finna.

Anm. Förf. indelar begge dessa sina böcker i kapitel och paragrafer, hvarigenom innehållet blir ett mera sammangjutet helt. Hos oss indelar man som bekant de geometriska arbetena i böcker och satser, hvarigenom sammanhanget ej så lätt märkes.

3. Bergroth, J. E. *Elementarkurs i geometrien af C. E. Mundt. Bearbetning efter danskan af J. E. Bergroth.* Helsingfors 1869. 3 rdr 75 öre häftad.

Detta arbete utgör en öfversättning och bearbetning af ofvanstående begge förtjenstfulla Mundtska arbeten med uteslutande af den plana och sferiska trigonometrien. Bearbetaren förtjenar erkännande för detta sitt tidsenliga företag.

Bearbetarens tillägg och förändringar äro ofta värdefulla förbättringar, t. ex. vid satserna om prismer, om sammanhanget mellan antalet kanter, hörn och sidor hos vissa slag af solida figurer, men äro någon gång försämringar i synnerhet i början af arbetet. Förf:s ändring i afseende på det typografiska att ha både paragrafer och satser, ehuru ej i vårt tycke befogad, kan dock försvaras såsom en öfvergång från vårt vanliga indelningssätt till danskarnes. Emellertid göra de ringa afstånden mellan paragraferna i jämförelse med afstånden mellan satserna, att man ofta blir vilseledd i afseende på innehållet. Se t. ex. sid. 16 §§ 52—4.

Förf:ns språk stöter på många ställen oss, som bo vester om Östersjön. Så t. ex. använder förf. konseqvent ordet «så vida« i betydelsen af vårt «emedan«. Af verbum «måste« bildar förf. infinitiven «måsta«, af ordet «ände« bildar förf. pluralisformen «ändor«; vidare låter förf. på en hufvudsats började med en imperativ följa en eftersats började med «så«; vidare skrifver förf. «pappret«, «kannsmått«, «kringom« i st. f. «papperet«, «kannmått«, «omkring«. Slutligen skrifver förf. «sigemellan«, «hvarochen«, «enochsamma« såsom ett ord i st. f. flere.

I händelse af en ny upplaga bör bearbetaren observera, att han genom sin förtjenstfulla förändring af originalet vid läran om prismer dock ingalunda bevisat satsen om kongruensen af trekantiga pyramider med lika stora baser, då sidornas kantlinier äro lika stora. Denna sats behöfves i tolfte bokens andra och nionde teorem.

Arbetet är godt. Vi känna en väl organiserad privatskola, der det redan är antaget.

4. MøLLER, C. F. C. *Læren om Rumstørrelser. Første Del: Plangeometri.* København 1870. Pris 2 rdr 45 öre. Inbunden. 128 sidd.

Då preussarne under sista kriget med Danmark intogo Haderslev, upplöstes elementarläroverket derstädes och lärarne flyttade till Köpenhamn, der de bildade en privatskola under namn af «Haderslev Læreres skole«. Bland desse lärare var också Møller, en man med stort anseende som lärare — hvartill man bland annat kan sluta af den tacksamhet, som prof. Steen i sitt arbete «Hovedformerne i Rummet« egnar honom för hans värdefulla råd. Också genomläser man med nöje hans arbete så väl för dess enkelhet, som för den eleganta och stränga metod, motsvarande nutidens fordringar, hvilken der uppenbarar sig.

Liksom hos Mundt finner man här vanligen åtminstone 4 beslägtade satser intill hvarandra, först en sats om likhet, så en om olikhet, derpå de begge omvändningarne till desse satser. Som exempel härpå omnämna vi följande fyra satser sidd. 4—5.

1. En korda genom medelpunkten halfverar cirkellinien och cirkeln.

2. En korda, som icke går genom medelpunkten, delar cirkellinien och cirkeln i två olika delar.

3. En korda, som halfverar cirkellinien eller cirkeln, går genom medelpunkten.

4. En korda, som delar cirkellinien eller cirkeln i två olika stora delar, går icke genom medelpunkten.

Läran om parallela linier synes Møller med framgång ha behandlat. Hans första sats i denna lära är följande: «En rät linie $A_1B_1C_1$, som icke kan skära det ena benet BC af en vinkel ABC, måste utdragen skära det andra BA« (utdraget, om så behöfs). Vi anföra här beviset. «Hvilken punkt B_1 som helst af den räta linien A_1C_1 kan väljas till spets för en rak vinkel (= 2 räta); antager man nu, att A_1C_1 icke kan skära BC, så måste den kunna skära AB, ty annars finge man, genom att lägga spetsarne B och B_1 samt benen BC och B_1C_1 på hvarandra, $\wedge\ A_1B_1C_1 = ABC$, men det är orimligt.«

Problem följa här ganska tidigt, som tillämpningar af lärosatserna, hvilket har blifvit möjligt derigenom att det enklaste af läran om cirkeln blifvit framstäldt genast i början af boken.

Proportionsläran har Møller öfverflyttat på det algebraiska området. Läran om irrationela storheter grundar han på den satsen, att

«Två storheter äro lika stora, när de ligga mellan samma gränser, hvilkas skilnad kan göras så liten man vill.« Bevis. Ligga A och A_1 mellan G och G_1 och kan $G - G_1$ blifva huru liten som helst, kan icke $A \gtrless A_1$; ty vore t. ex. $A > A_1$, finge man

$$G > A > A_1 > G_1$$

eller

$$G > A$$
$$G' < A_1,$$

alltså

$$G - G_1 > A - A_1,$$

hvilket strider mot förutsättningen om beskaffenheten af $G - G_1$.

För att gifva ett begrepp om bevisningsmetoden och användandet af detta teorem, anföra vi med bevis följande teorem.

«*Rektanglar med lika stora baser förhålla sig som deras höjder.*

Vi beteckna höjderna med h och h_1, rektanglarne med r och r_1.

1. Höjderna *kommensurabla*. Kallas höjdernas gemensamma mått m och innehålles det p gånger i h och q gånger i h_1, har man

$$h = pm, \quad h_1 = qm, \quad \text{alltså:} \quad \frac{h}{h_1} = \frac{p}{q}.$$

Drager man nu genom delningspunkterna paralleler med baserna, delas r i p och r_1 i q lika stora rektanglar; kallas en af dem ϱ, hvilken alltså är det gemensamma måttet för de gifna rektanglarne, får man

$$r = p\varrho, \quad r_1 = q\varrho, \quad \text{alltså:} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{p}{q} = \frac{h}{h_1}.$$

2. Höjderna *inkommensurabla.* Afsättes $\frac{1}{q}\cdot h_1$ på h ifrån den ena ändpunkten, så träffar ingen delningspunkt in på en annan, men man får:

$$\frac{p+1}{q}\cdot h_1 > h > \frac{p}{q}\cdot h_1, \quad \text{alltså} \quad \frac{p+1}{q} > \frac{h}{h_1} > \frac{p}{q}.$$

Drager man nu genom delningspunkterna på h paralleler med basen, framkomma $(p+1)$ rektanglar, som äro hvar och en lika med $\frac{1}{q}\cdot r_1$; man får då:

$$\frac{p+1}{q}\cdot r_1 > r > \frac{p}{q} r_1, \quad \text{alltså:} \quad \frac{p+1}{q} > \frac{r}{r_1} > \frac{p}{q}.$$

Alltså falla $\frac{h}{h_1}$ och $\frac{r}{r_1}$ mellan samma gränser, hvilkas skilnad $\frac{1}{q}$ är ett obenämndt tal, som genom att göra q tillräckligt stor kan blifva huru liten som helst. Följaktligen har man:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1}.«$$

Huru enkelt och lättfattligt är ej detta bevis i jämförelse med det att taga lika mångfaldiga af den första och tredje o. s. v.?

Synnerligen elegant är Møllers definition på *likformiga figurer.* Denna är så generel, att den passar in på alla plana eller solida figurer, begränsade af räta eller krokiga linier eller ytor. Definitionen lyder som följer:

»Två figurer äro likformiga, när de kunna läggas så, att räta linier genom samma punkt skäras af deras omkretsar i samma förhållande, f.«

Ur denna definition härleder han bland annat följande satser:

1. »I likformiga figurer äro ensliggande linier parallela, och förhållandet mellan hvarje par är f.« (Linierna må vara räta eller krokiga).

2. »I likformiga figurer äro ensliggande vinklar lika stora.«

3. «Förhållandet mellan likformiga figurers omkretsar är lika med förhållandet mellan ett par ensliggande linier, lika med f, som derföre också kallas figurernas lineära förhållande.«

Vidare förekomma hos Møller satserna om en triangels transversaler jämte deras vackra korollarier om linier som sammanträffa i en punkt i triangelns plan.

Boken innehåller ock planimetriska, algebraiska och numeriska exempel för trianglar, fyrhörningar, reguliera månghörningar och cirklar.

Arbetet är indeladt i 3 afdelningar eller kurser, hvarje kurs i en mängd paragrafer eller artiklar med siffrorna i kanten. Genom denna anordning läser man boken mera såsom ett sammangjutet helt än då det är indelt i böcker och satser.

Vi rekommendera arbetet såsom synnerligen förtjenstfullt. Det sätter oss in i det moderna sättet att behandla geometrien.

5. I samma mon som det matematiska studiet blifvit mera allmänt och konsten att undervisa deri blifvit fullkomnad, har man allt mer börjat inse, att inledningen till det mera vetenskapliga abstrakta geometriska studiet bör utgöras af en geometrisk åskådningslära. I Sverige har Bergii lärobok i detta ämne redan upplefvat tre upplagor. Som denna undervisningsgren är helt ny, torde för jämförelse skull ej vara olämpligt att taga kännedom af tvänne danska läroböcker i detta ämne. Den ena af dessa är utgifven af professorn i matematik vid Köpenhamns universitet A. Steen och har till titel:

Oversigt over hofvedformerne i rummet som indledning til geometrien ved Adolph Steen. Anden udgave. Kjøbenhavn 1868. C. A. Reitzels forlag. 100 sidor. 1 rdr 35 öre.

Detta arbete börjar liksom Bergii med att betrakta kroppen, öfvergår derefter genom abstraktion af en dimension till ytan och så vidare till linien och punkten. Genom rörelse kan sedan i omvänd ordning punkten alstra en linie, denna en yta och ytan en kropp. Då en hel kropp rör sig omkring 2 fasta punkter, beskrifva linierna genom dessa punkter omhvälfningsytor. Endast en linie har sina punkter orörliga under denna omhvälfning, nämnligen den räta. Planet säger Steen vara den yta, hvari räta linier i hvarje punkt i alla rigtningar kunna nedläggas. Parallela säger han linier i samma plan vara, om de aldrig råkas. De bugtiga ytorna delar han i rätliniga (t. ex. cylinder-, kägel- och skrufytan), hvilka kunna alstras af en rät linies rörelse, och krokliniga (klotytan), hvilka ej af en rät linie kunna framalstras. Han visar att vissa rätliniga ytor (t. ex. cylinderytan) låter utbreda sig i ett plan, andra (t. ex. skrufytan eller öfverytan af qvarnvingar) deremot ej. Han redögör för skruflinien, för åtskilliga egenskaper hos klotet, pyramiden, käglan, cylindern, prismat så väl ostympade som afskurne af plan och andra ytor i olika rigtningar.

Plana vinkeln och rumvinkeln (= lutningsvinkeln mellan tvänne plan) definierar han att vara, den förre = ytan mellan de begränsande linierna, den senare = rummet mellan de begränsande planen. På detta sätt blir den oändliga ytan mellan 2 parallela linier en plan vinkel af 0^o, och det oändliga rummet mellan 2 parallela plan en rumvinkel af 0^o. Ur dessa definitioner härledas med lätthet de enklaste satserna ur plana och solida geometrien.

Synnerligen märkvärdigt och elegant är förf:ns sätt att på åskådningens väg bevisa möjligheten af de 5 platonska kropparne.

Förf. ådagalägger i detta rätt utförliga arbete sin utmärkta förmåga att genom åskådning och eftertanke inviga nybörjaren i ganska många och svåra delar af geometrien. Om för den utvecklade och skarpsinnige geometern vissa bevis såsom grundade på induktion eller vissa definitioner såsom innehållande för många bestämningar synas mindre tillfredsställande, så bör denne betänka, att på åskådningens ståndpunkt förhållandet måste vara sådant.

Vi öfvergå nu till den andra danska läroboken i detta ämne. Dess titel är:

6. *Grundtræk af læren om rumstørrelser som indledning til mathematiken af C. F. C. Møller, lærer i mathematik ved Haderslev læreres skole.* Kjøbenhavn 1868. 38 sidor. 50 öre.

Møllers inledning är ett kompendium, som genom lärarens medverkan skall fyllas med kött och blod. Hans bok är till innehåll och uppställning temligen beslägtad med Steens, men skiljer sig från hans i afseende på läran om vinklar och i afseende på omfattningen. Begreppet vinkel anser han sig ej böra definiera, han visar blott, huru en vinkel uppkommer, huru man kan erhålla en större eller mindre vinkel o. s. v. Med läran om de platonska kropparnes möjlighet sysselsätter han sig ej. Han anser det tillräckligt att ur åskådandet af dessa kunna uppvisa sambandet mellan antalet sidor, kanter och hörn. Møller har lagt vigt vid förmågan att kunna beräkna ytan och rymden hos geometriska storheter.

Om innehållet kan man få ett ungefärligt begrepp genom att anföra slutet i förra afdelningen af boken:

«Kropparne böra nu vara så uppfattade, att man kan afgöra:
af hvilka ytor de begränsas,
huru ytornas delar begränsas,
huru plana skärningar genom kropparne begränsas och huru de dela kropparne,
huru plana skärningar skola läggas för att få en bestämd figur eller för att dela kroppen på ett bestämdt sätt.

Man bör kunna beskrifva:
klotet och dess delar,
prismor hela och stympade,
pyramider hela och stympade,
cylindern,
käglan hel och stympad.

Man bör kunna angifva, huru linier frambringas genom punktens och ytor genom liniens rörelse. — — —«

Så väl denna bok som Møllers plana geometri visa, att Møller är en dugtig pedagog.

7. *Lærebog i stereometri af C. M. Guldberg.* Christiania 1868. Hos Steensballe. 48 sid. 1 rdr.

Professorn i matematik vid Kristiania universitet har i detta arbete utgifvit en med stränga bevis försedd lärobok i stereometri. Det svåra kapitlet om prismer har han genom ett par af honom sjelf uppfunna enkla bevis betydligt förenklat. Satserna äro utförda med synnerligen enkla och korta bevis. Satsen om att finna kubikinnehållet af klotskifvan är också enkelt bevisad. Som denna sats till sitt innehåll är högst märkvärdig hade förf. bort äfven i ord uttrycka den. Den lyder sålunda:

«*En klotskifva är lika med det aritmetiska mediet mellan den in- och omskrifna cylindern tillsammans med ett mellan skifvans parallela plan inskrifvet klot.*«

På den sferiska geometrien finner man ett elegant bevis för den vackra satsen, att den kortaste linien mellan 2 punkter på ett klot är den storcirkelbåge mellan punkterna, som är mindre än 180°. Äfven den sferiska triangelns yta får man lära sig att beräkna uttryckt i vinklarne och klotets radie. Framställningen är god. — Vi sakna dock satserna om symmetri och likformighet.

Vi ha på försök under den förra vårterminen begagnat denna lärobok för latinlinien i sjunde klassen på Stockholms gymnasium äfvensom vid lärarinneseminariet och funnit den ganska god, i det den förenar skärpa med korthet och är en god typ för lärjungar, som vilja lära sig att skrifva ett matematiskt skriptum.

8. P. E. CRONHJELM. *Elementerna af aritmetiken och planimetrien utgifne af P. E. Cronhjelm. Omarbetad och tillökad af Otto Chr. Sylwan*, kapten vid Wendes artilleriregemente. *Första delen: Aritmetik och Algebra.* Kristianstad 1867, 216 sidor samt tillägg XV sidor. 1: 50 häftad.

Förra afdelningen. Aritmetik. (Sidd. 1—134 med tillägg sidd. I—XV).

Författarens aritmetik börjar med läran om tals uppställning, fortsätter med läran om de fyra räknesätten i hela och brutna tal, samt med läran om störste gemensamma divisorn. Läran om decimaler behandlas som specialfall af bråk. Derpå följer en omfattande och intressant redogörelse för mått, mål och vigt, deri inbegripet äfven egentlig vigt. Användning af dessa mått får man i sorträkningen. Härpå följer en fullständig proportionslära för hela och brutna tal jämte redogörelse för sammansatt förhållande. Tillämpning på enkla och sammansatta förhållanden lemnar förf. i enkel och sammansatt regula de tri, bolags-, rabatt-, diskont- och intresseräkning. De 4 sista räknesätten behandlas dock äfven liksom alligations- och kedjeräkning medelst formler.

För att gifva ett begrepp om förf:ns metod, välja vi tvänne exempel.

»§ 65. Att dividera ett tal med ett bråk betyder att söka ett tal, som om det blir multipliceradt med bråket, återgifver det förstnämnda talet. Dividenden är således, äfven då divisorn är ett bråk, lika med den produkt, som uppkommer, då divisorn multipliceras med qvoten. Att dividera ett tal t. ex. $\frac{5}{7}$ är således detsamma som att söka ett tal, som multipliceradt med $\frac{5}{7}$ ger 6 till produkt Kallar man detta tal (qvoten) q, så blir $\frac{5}{7} . q = 6$. Multiplicerar man nu på båda sidor om likhetstecknet med 7, så fås $5q = 6 . 7$. Dividerar man sedan de erhållna produkterna med 5, så får man $q = 6 . \frac{7}{5}$. Således *då ett tal skall divideras med ett bråk, finner man qvoten derigenom att man multiplicerar talet (dividenden) med bråket (divisorn) upp- och nedvändt.*«

«§ 128. Ex. 15. Då 2 man på $1\frac{1}{2}$ dag, med 9 arbetstimmar om dagen, kunna afrödja och upphacka 3600 qvadratfot, huru många dagar behöfva då 8 man använda för att på samma sätt afrödja $4\frac{1}{2}$ tunnland jord, när de arbeta 12 timmar om dagen, men marken här är en tredjedel svårare att uppbryta än den förstnämnde? Svar $26\frac{1}{4}$ dagar.

Uppställning.
$$\left.\begin{array}{r} 8 : 2 \\ 12 : 9 \\ 3600 : 252000 \\ 1 : 1\frac{1}{3} \end{array}\right\} = 1{,}5 : x.«$$

Den vetenskaplighet och den enkelhet i uttryck, som i dessa båda exempel uppenbarar sig, återfinnes öfverallt. Ingenstädes utföres en räkning utan att grunden till förfarandet genom enkla och korta bevis blifvit framstäld. Exemplen äro visserligen ej många, men förf. hänvisar dem, som åstunda flere, till *Palms räknetabeller för elementarläroverk och folkskolor*, tryckte i Kristianstad.

Ett par obetydliga anmärkningar ha vi att göra. Vi finna nämnligen bevisen för tals delbarhet ej tillräckligt klart framställda. Vidare anse vi ej fullt noggranna sådana uttryck som «4 är 2 gånger mindre än 8» eller «8 är 2 gånger större än 4.»

Vår uppfattning af en räkneboks uppställning skiljer sig något från författarens, i det vi anse en räkneboks teoretiska del afslutad med läran om bråk. Förf:ns proportionslära för hela och brutna tal innehåller i sjelfva verket ej annat än hvad som finnes i läran om bråk, om man undantager läran om sammansatta förhållanden. Oaktadt denna olikhet i ståndpunkt kunna vi ej annat än med största nöje genomläsa ett arbete, der vetenskaplighet är förenad med ett så enkelt, klart, nyktert och från ordsvall fritt språk, som författarens.

Vi öfvergå till

Senare afdelningen. Algebra. (Sidd. 135—216).

Förf:ns algebraiska ståndpunkt är följande. Sedan förf. visat de vanliga räknelagarne

$$mn = nm,$$

$$a^m . a^n = a^{m+n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

för hela tal på m och n, visar han lagarne

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[q]{a}\cdot\sqrt[q]{b} &= \sqrt[q]{ab}\\ \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} &= \sqrt[q]{\frac{a}{b}}\end{aligned}\right\}\text{ för } a \text{ och } b \text{ rationela positiva storheter.}$$

$$\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[qr]{a},$$

$$\sqrt[q]{a} = \sqrt[qs]{a^s},$$

$$\sqrt[q]{a^r} = a^{\frac{r}{q}},\ \text{då } \frac{r}{q} \text{ är ett helt tal} \quad . \quad . \quad (4),$$

hvarefter han bevisar rigtigheten af lagarne (1), (2) och (3) äfven då m och n äro brutna tal eller negativa storheter, sedan han genom generalisering af formeln (4) så, att han skall gälla äfven då $\frac{r}{q}$ icke är ett helt tal, gifvit betydelse åt en potens med bråkexponent och sedan han genom generalisering af formeln (2) så, att han skall gälla äfven då $m \overline{\gtrless} n$ gifvit betydelse åt en potens med negativ exponent.

Samtliga dessa formers rigtighet för irrationela tal grundar han på följande hufvudsanning: »*om två irrationela qvantiteter A och B äro båda på en gång större eller båda mindre än en och samma qvantitet C, hvilken är föränderlig och kan tagas huru nära A eller B man vill, så äro dessa båda lika stora.*«

De negativa storheterna definierar förf. såsom storheter mindre än noll och qvalitativt motsatta de lika benämnda positiva.

Den imaginära enheten i definieras såsom medelproportionalen mellan 1 och -1.

För öfrigt omfattar Cronhjelms algebra eqvationer af första och andra graden med en och flere obekanta jemte problem samt läran om qvadrat- och kubikrötter.

Såsom synes, bemödar sig förf. äfven i algebran om ett vetenskapligt system.

Mot förf:ns framställning hafva vi dock att göra följande anmärkningar.

1. Förf. låter t. ex. $\sqrt{9}$ betyda hvilket som helst $+3$, eller -3, oaktadt genom Cauchy och Björling man numera använder $\sqrt{\!\sqrt{9}}$ med

dubbelt rotmärke i denna betydelse. Deremot har man numera vid beteckningen $\sqrt{9}$ eller $\sqrt{3^2}$ eller $\sqrt{(-3)^2}$ fästat betydelsen att den skall vara positiv och således lika med 3. På grund af denna bristande distinktion kan man förklara, att förf. identifierar $\sqrt[n]{x^m}$ med $(\sqrt[n]{x})^m$.

2. Förf:ns sätt att bevisa $a^0 = 1$ på grund af formeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

är ej tillfredsställande, då denna sats ej af förf. blifvit bevist för $n = 0$. Betydelsen af a^0 härledes helt enkelt ur förf:ns def. (2) här ofvan genom att der göra $m = n$.

3. Beviset för satsen

$$(ab)^n = a^n b^n$$

har förf. ej lemnat ens för n = helt tal. Medgifvas måste dock att med ledning af bevisen för de öfriga lagarne, beviset för denna ej möter några svårigheter.

4. Önskligt hade varit, om något mera sammanhållning rådt i afs. på de algebraiska lagarne. Splittringen af dem på flere ställen utan att bestämdt angifva de villkor, under hvilka de gälla, försvårar inlärandet och sammanfattningen af dem.

5. Vissa kapitel äro temligen knapphändigt affärdade t. ex. samtidiga eqvationer, der någon eqvation är af högre gradtal. Vidare får man ej direkt lära sig att i faktorer uppdela uttryck af formen

$$(a^2 - b^2), \quad a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

Dessa anmärkningar visa, att Cronhjelms algebra i vissa delar behöfver omarbetas. Detta hindrar dock icke, att det tydliga, enkla och nyktra språket i förening med bemödandet om vetenskaplighet gör ett godt intryck.

9. P. E. Cronhjelm. *Elementerna af aritmetiken och planimetrien utgifne af P. E. Cronhjelm.* Sjette upplagan, omarbetad och tillökad af Otto Chr. Sylvan. Kapten vid Kongl. Wendes artilleriregemente. *Andra delen. Planimetri.* Kristianstad på Ludv. Littorins förlag 1867. 115 sidor med 4 taflor. Pris 1 rdr häftad.

Liksom förra delen (algebra och aritmetik) utmärker sig äfven denna genom sin enkla, sin klara stil. Bevisen äro enkla och stränga. Innehållet är systematiskt ordnadt, så att satserna om linier och vinklar intaga en afdelning, satserna om trianglar och parallelogrammer en afdelning, de om likformiga trianglar en, cirkeln en och reguliera månghörningar en afdelning. Bevisen för satserna om förhållanden har förf. inskränkt till det fall, att förhållandena kunna uttryckas med rationela tal. Huru de skola utvidgas så, att de gälla äfven för irrationela tal, är ej svårt att inse, om man studerar förf:ns satser i slutet af förra delen om irrationela tals räknelagar. I likhet med hvad geometrerna nu för tiden bruka, ställer förf. sina teorem i bokens förra del och problemen i senare delen. Problemen äro mycket praktiska. Förf. visar, huru de skola utföras dels på papperet, dels på fältet. Han rycker eleverna med sig oemotståndligt, då han ena gången lär dem att finna afståndet från deras plats A till en annan otillgänglig B, andra gången afståndet mellan två otillgängliga ställen, en tredje gång lär dem att kartlägga ett område och att beräkna dess areal. Förf. har i sin bok härigenom realiserat det önskningsmål, till hvilket vi alla vid vår undervisning böra sträfva att med teori förena praktik. Som bekant har nyligen utkommit ett stadgande att eleverna vid våra elementarläroverk skola undervisas i fältmätning. Härigenom blir det en anknytningspunkt mellan matematiska läroböcker skrifna för civila medborgare och dem som blifvit skrifna för militärer. I sjelfva verket är det besynnerligt att en vetenskaps grundläggning skall vara olika för olika klasser af medborgare. Vi skola hoppas att denna olikhet snart skall försvinna, sedan läroboksförfattarne å ömse sidor tagit kännedom om hvarandras literatur och tillegnat sig det goda, som de inhemtat härigenom. — Hvad i fråga varande arbete beträffar, är det ett godt arbete, bygdt på prof. Harfvefeldts geometri, fritt från de språkliga origtigheter, hvaraf flere af våra geometriska läroböcker äro uppfylda, samt temligen nära öfverensstämmande med de åsigter, som tillhöra vår tid. De satser, som finnas i Euklides' andra bok, förekomma ej här, enär de lätt bevisas af den, som förstår att från det geometriska språket öfverflytta sig till det algebraiska och tvärtom. Huru detta tillgår, har förf. visat. — Särskildt är det nyttigt att af en och samma författare ega läroböcker i aritmetik, algebra och geometri. Derigenom undvikes det oformliga deri, att få proportionsläran bevisad på 2 olika sätt, derigenom undvikas luckor, derigenom åstadkommes enhet. Vi rekommendera arbetet.

Anm. Som bekant är en kommission nedsatt, hvilken eger att granska de till undervisningens tjenst utgifne läroböcker. Flere af de af oss anmälda arbeten blifva af denna kommission utan tvifvel granskade och underkastade en mera omsorgsfull granskning än den vi vid vår anmälan varit i tillfälle att göra, och underordna vi då villigt vårt omdöme under kommissionens, för så vidt detta i någon mon kan komma i strid med kommissionens. Emellertid anse vi att ett uppskof af anmälan öfver arbeten, som utkommit under eller strax före den tid, under hvilken Tidskrift för matem. och fysik existerat, skulle blifva för långvarigt.

10. *Solen.* Populära föredrag af C. F. BJÖRLING. Med 3 färglagda plancher och 12 figurer i texten. Andra upplagan. Stockholm 1870. P. A. Norstedt och söner 148 sidor. Häftad 1 rdr och 50 öre.

Detta arbete, hvars första upplaga anmäldes i slutet af förra året i denna tidskrift, är genom dess hänförande och populära språk samt de vackra plancherna en verklig skatt, värd att egas af litet hvar. Här får man på ett ytterst lättfattligt sätt klart för sig, huru man genom planeten Venus' gång öfver solskifvan kan bestämma afståndet mellan solen och jorden. Här får man veta att på solen skulle ett glas vatten väga ett lispund, att en träkäpp skulle väga lika mycket som en dubbelt så stor jernstång på jorden, att vid skjutning med ett godt gevär kulan skulle falla ned på blott några få fots afstånd från skytten. Man får se, huru man medelst ett enkelt prisma kan utröna flere bland solens beståndsdelar. Så t. ex. får man veta, att solen innehåller mycket jern. Man får se, huru de s. k. protuberanserna vexla gestalt från minut till minut genom utmärkt sköna färglagda teckningar af professor Zöllner i Leipzig, hvilken förbättrat Janssens år 1868 gjorda vackra upptäckt att när som helst medelst spektralanalys observera dem. Denna spektralanalys har för oss uppenbarat, att hela solen är omgifven af ett flere tusen svenska mil djupt lager af vätgas, på hvilket protuberanserna äro upphöjningar. Förf. visar slutligen huru solstrålarnes vibreringar framkalla vibreringar (värme) i materien på jorden, hvarigenom all rörelse der åstadkommes, huru solen lyfter vattnet från haf och sjöar upp i luften, hvarifrån det sedan under form af regn och deraf bildade floder strömmar tillbaka i hafvet. Förf. stämmer oss till tacksamhet mot denna vår välgörarinna, vår värmande, vår upplifvande vårdande moder, solen *.

* Vi ha mot förf. att anmärka, att han gör solen till hankön, oaktadt i vårt språk solen är en qvinna, vid hvars åsyn hvarje hjerta klappar varmt.

Warberg, Augusti 1870.

F. W. HULTMAN.

Nya böcker.

Isidor Smedberg. Skolaritmetik. Senare kursen. Stockholm 1870.

Björling, E. G. Noter till Elementarlärobok i algebra, Åttonde upplagan. Westerås 1870. 50 öre.

Lindelöf, L. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renfirment le plus grand volume. (18 sid., tryckt i Bulletin de l'académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.

Den af Steiner (Journal de Crelle, t. XXIV, 1842) uppvisade satsen, att den största polyeder med gifven yta omskrifves omkring en sfer och tangeras af densamma i sina facers tyngdpunkter, utsträckes i denna undersökning att omfatta konvexa polyedrar i allmänhet.

Camillo Tychsen. Grundprinciperne før differentiation og integration af funktioner med een og to uafhængige variabla. Til brug ved selvundervisning. 148 sid. Kjøbenhavn 1870.

Detta arbete synes med fördel kunna rekommenderas dem, som i ett kort sammandrag önska få reda på den högre kalkylens vigtigare teorier och satser.

Fig. 2. (15)

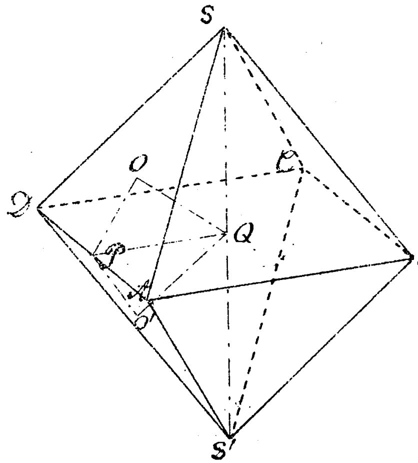


Fig. 1. (14)

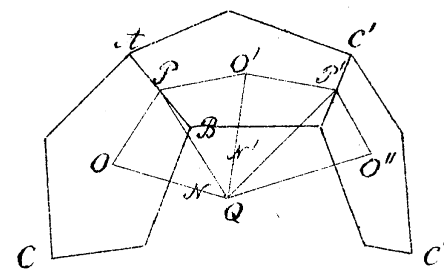
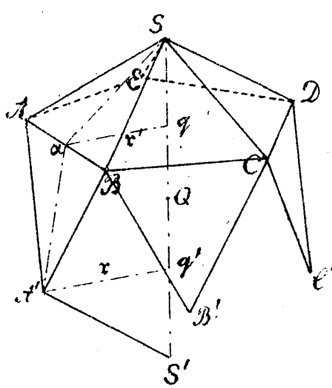
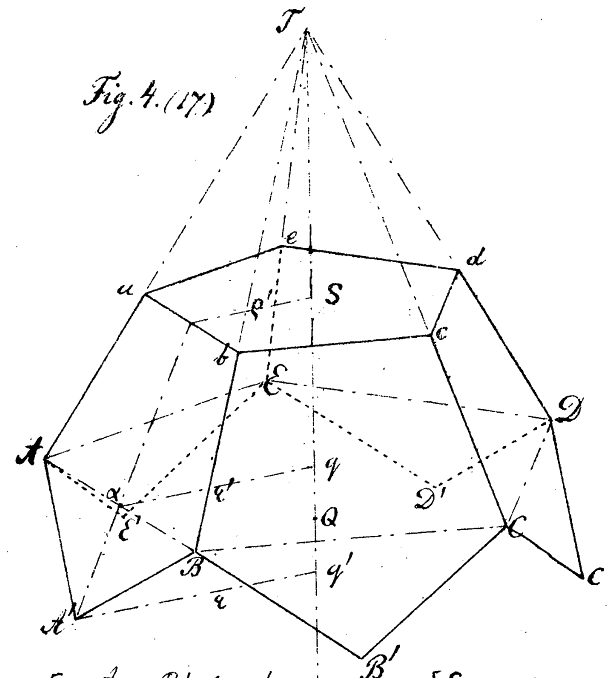


Fig. 3. (16)



$$\left[\begin{array}{l} qq' = r\,, \\ Sq = \tfrac{1}{2} r(\sqrt{5}-1). \end{array}\right]$$

Fig. 4. (17)



$$\left[\begin{array}{l} Aa = Bb \text{ etc.} = k\,, \\ TA = Tb \text{ etc.} = k\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2} = s \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} Sq = \varrho\,, \\ qq' = \tfrac{1}{2}\varrho(\sqrt{5}-1). \end{array}\right]$$

Fig. 18

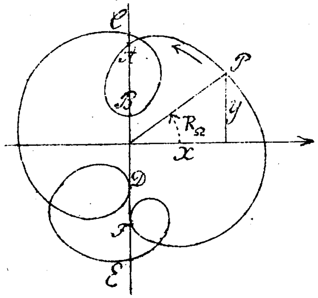


Fig. 19

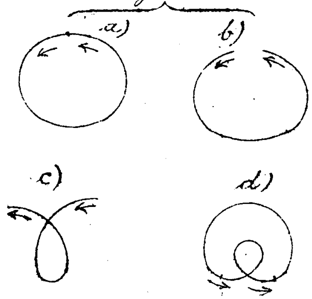


Fig. 20.

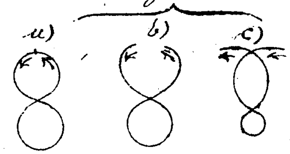


Fig. 21.

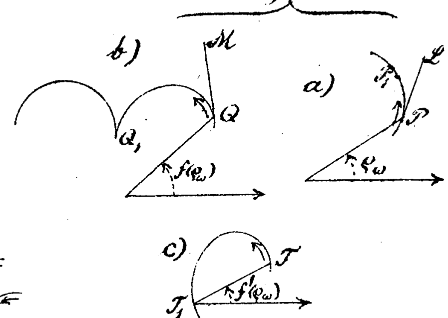


Fig. 22.

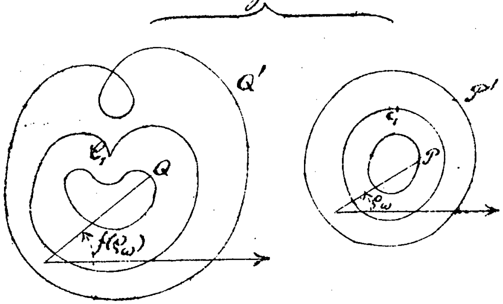


Fig. 24.

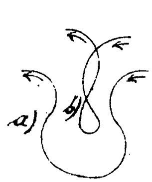


Fig. 23.

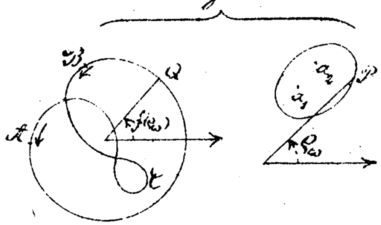


Fig. 25.

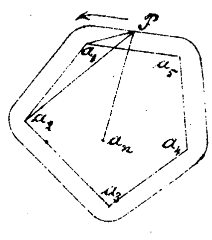


Fig. 26.

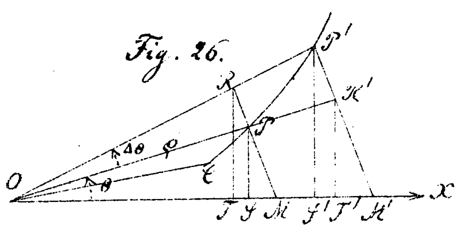


Fig. 27.

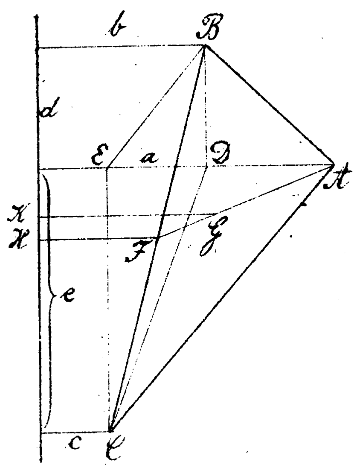


Fig. 28.

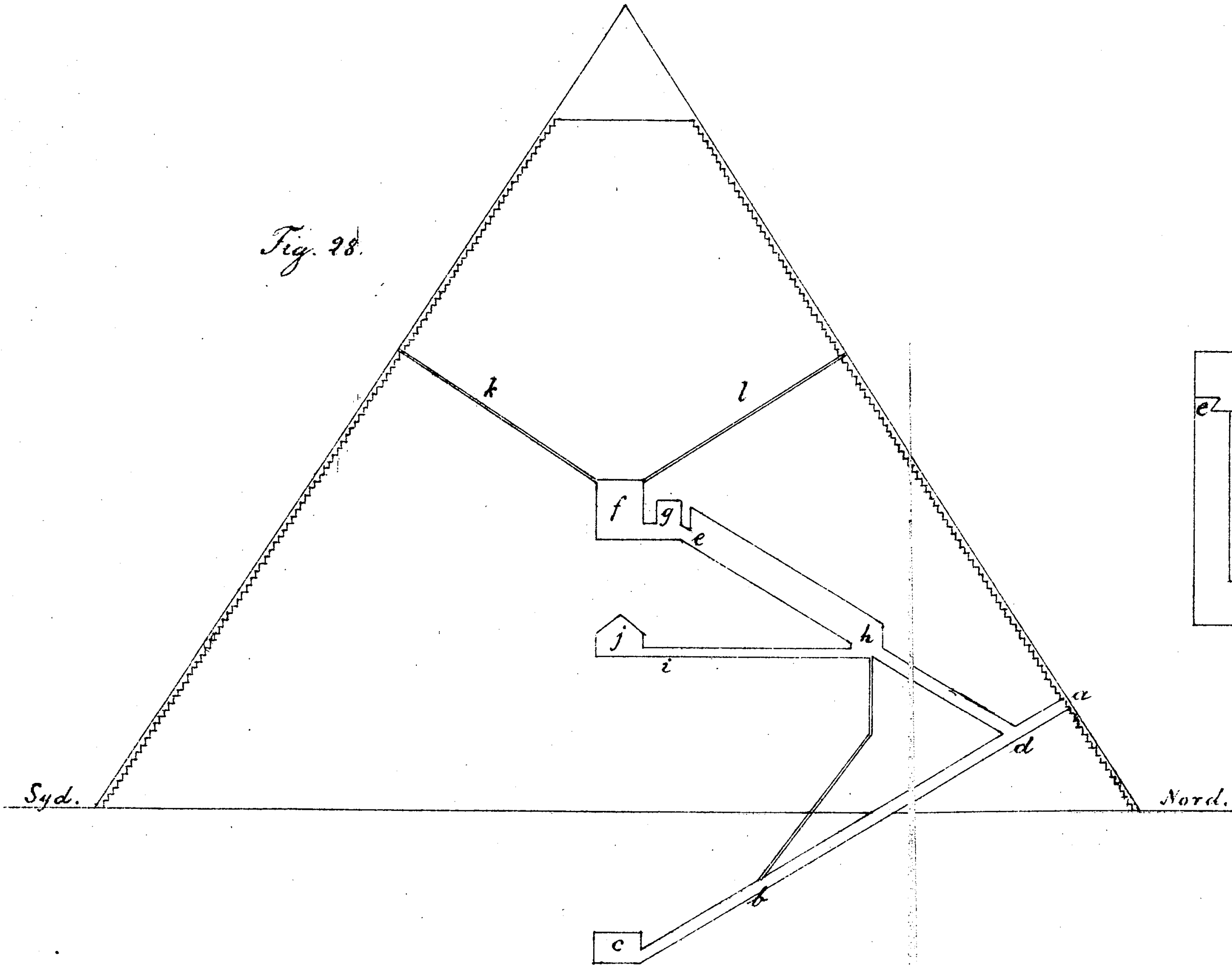
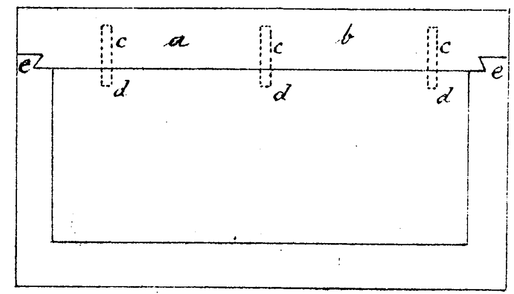


Fig. 29.



AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. Hultman.

(Forts. fr. sid. 95).

9. Peder Månsson (Petrus Magni).

Genom bibliotekarien Klemmings förekommande välvilja ha vi kommit i tillfälle att få studera en af Peder Månsson i Rom i början af 1500-talet under Sten Sture den yngres regering skrifven handskrift i aritmetik. Härigenom har vår kännedom om svenska aritmetikens historia blifvit så utvidgad, att den flyttar denna historia ett helt sekel tillbaka, alldenstund den af oss förut kända äldsta svenska aritmetik eller Olof Bures är tryckt år 1609 *. Som Peder Månssons ** handskrift

* Af de sista tidningarne se vi, att prof. Hill på fysiografiska sällskapets senaste sammankomst i Lund uppgifvit lagman *Hök Erlandssons* räknebok såsom den äldsta i Sverige. Vi skulle stadna i stor förbindelse till prof. Hill, om han ville offentliggöra hvad han om denna räknebok har sig bekant.

** Ur svenskt biografiskt lexikon hemta vi om Peder Månsson följande uppgifter.

Peder Månsson föddes af adlig slägt i Tillberga socken af Westmanland. Hans fader Måns Jönsson, höfvidsman på Westerås slott, korsfästes i hög ålder af Kristian Tyrann och lades på fyra stegel 1520. Sonen studerade först hemma i fäderneslandet och sedan i Tyskland, Frankrike och Italien, hvarigenom han gjort sig värdig att blifva doktor. Han blef sedan munk och presbyter i Wadstena. Från klostret är ganska kort och tillika svårtillgänglig samt svårläst i följd af ålder, stil och de många förkortningarne, införa vi den i sin helhet ordagrannt och bifoga en svensk öfversättning.

---

derstädes sändes han 1507 till Rom för att taga kännedom om heliga Brigittas hospital (i hvilket alla svenska och danska pilgrimer herbergerades), sedan man sport, att denna inrättning fallit i djupaste vanvårdnad. På resan blef han först tillfångatagen af danskarne och sändes till Gotland, der han måste dröja öfver en svår vinter, hvarpå han satt fem veckor fången i Köpenhamn. Ändtligen lösgafs han genom konung Hans' nåd och återkom till Wadstena 1508, hvarifrån han genast ånyo utrustades till Romresan tillsammans med klosterbrodren Petrus Ingemari. Först 1511 kom han genom penningar och brydsamma processer i besittning af hospitalet, som utländska prokuratorer slagit under sig och styrt efter eget godtycke. Han lefde i början i stort armod, så att han såg ut som en fogelskrämma. Småningom vann dock Peder Månsson anseende och gunst vid påfliga hofvet, och som han var en lärd man och kunnig i många språk, blef han snart påfvens kansler.

Samma dag 1523, som biskopen i Vesterås, Peder Sunnanväder, i domkapitlet afsattes, frågade konungen capitulares, hvem de ville hafva till efterträdare, och föreslog Peder Månsson, hvilken enhälligt utvaldes. Konungen skref sjelf till påfven och begärde bekräftelse på valet. Påfven biföll genast och lät den valde vigas af en kardinal. Det är denna biskopsutnämning och dermed förenade omständigheter, som i synnerhet höja Peder Månsson till betydelsen af en historisk person. Den varsamhet att ej säga i tadlande mening slughet, hvarmed Gustaf I framgick till sina syftemål, synnerligen vid utförandet af kyrkoreformationen, förnekade sig icke heller här. Det är sannolikt, att konungen med denna reformation i sigte företrädesvis derföre vändt sin håg till den i påfliga stolens grannskap anstälde P. Månsson och begärt hans invigande i Rom, att han måtte hafva någon canonice vigd biskop i landet, som sedan kunde viga andra, och på det att katolikerna icke måtte oroa svenska församlingen med beskyllningen, att den saknade s. k. successio apostolica eller canonica och icke hade rätteligen vigde prester. Konungen lät ock för detta ändamål denne biskop 1528 viga trenne biskopar samt sjelfve erkebiskopen Laurentius Petri 1531. Den 25 Maj 1524 ankom P. Månsson till Wadstena och reste genast till Jönköping, der han af konungen tillika antogs till riksråd, och var han den siste af andliga ståndet, som erhöll denna värdighet, ty år 1527 faststäldes i Vesterås, att biskoparne ej vidare skulle antagas till riksråd.

P. Månsson anses hafva altjämnt oförändradt hyllat katolicismen, hvilket ock hans bref af 1531 vittnar, ehuru han visade mycken efter-

Regule de tri *.

Arismetricæ regulam quandam invenere generalissimam ad quemcunque ignotum per aliquos notos inveniendum numerum, quam nonnulli regulam auream dixere: Itali vero regulam de tri. per appocopam nominare solent, de tri. quasi de tribus numeris in ea necessariis, ut est numerus empcionis: ex. rei alterius, et numerus precii. ex. quanti-

* Öfversättning.

Regula de tri.

Aritmetrerna hafva uppfunnit en den mest omfattande regel för att finna ett obekant tal hvilket som helst medelst några kända. Denna regel hafva några kallat den gyllene, men italerna hafva kallat den regula de tri eller, genom förkortning, vanligen de tri, liksom af de tre i den nödvändiga talen, såsom antalet köpta saker af (t. ex.) något visst slag, antalet af de för dessa betalta penningar, samt det tredje talet,

---

gifvenhet för konungen, i synnerhet i början. Han dog i temligen hög ålder 1534.

Skrifter. **1.** På Linköpings bibliotek förvaras en duodes af tre fingers tjocklek, skrifven med tät stil under vistelsen i Italien. Denna volym innehåller 4 afdelningar:

1. En sjölag (gotländska sjölagen),
2. En kort läkebok af Johannes de rupe Cisa, den första svenska medicinska skrift,
3. Stridens konst,
4. Stridslag eller krigsartiklar.

2. På riksbiblioteket finnes för närvarande till låns också en tätskrifven duodes af Peder Månsson. Den innehåller:

1. Rosarius, editus ab Alberto Magno. Script. Romæ 1515 per fratrem. P. M.
2. Thesaurus, editus ad S:to Thoma de Aquino.
3. Konsten att bereda och färga skinn.
4. Regula de tri, m. m. (Det är för denna afhandling vi här redogöra).
5. Artes quædam scribendi, et præparatio colorum.

6—15. De alchymia. Romæ 1514—5.

16. Om klockors vidd och rymd efter proportion af deras vigt.
17. Chirurgia. Romæ 1521.
18. De alchimia et lapide philosophico magno.
19. De alchimia. S. Thomæ de Aquino. Romæ 1522.

tatis discretæ, et tercius numerus per quem proponitur quæstio, ut 5 ona emi 3 denariis, quanti emo 206 ona.

Sed ut hanc regulam perfectius intelligas. condiciones istas memoriæ diligenter commenda infrascriptas.

Prima est qua quæstio semper debet poni versus dexteram.

2. Numerus primus et secundus debent correspondere re et nomine.

3. Numerus 4 per regulam inventus debet correspondere secundo re et nomine.

Isti autem 4 numeri ultra hoc hac sibi mutua correspondent proporcione, ut qualis est proporcio primi ad secundum. talis est et tercii ad quartum, et sic insuper qualis est proporcio primi ad tercium. talis est secundi ad quartum, quod facile ex his numeris est videre.

2 . 6 . 12 . 36.

Et ideo hæc regula a philosophicis proporcio ˥ * est vocata.

hvarigenom frågan framställes, t. ex : «jag har köpt 5 mått för 3 denarier, huru mycket får jag då betala för 206 mått?«

Men på det att man fullkomligare må förstå denna regel, bör man flitigt söka att lägga på minnet följande reglor.

Första regeln är, att det tal, hvaraf frågan beror, alltid bör ställas mot höger.

2. Det första och det andra talet böra svara emot hvarandra så väl i afseende på sak som namn.

3. Det fjerde genom regeln funna talet bör till sak och namn motsvara det andra.

Men dessa 4 tal motsvara hvarandra dessutom genom denna ömsesidiga proportionalitet, att sådant som förhållandet mellan den första och andra är, sådant är äfven förhållandet mellan det tredje och fjerde, och dessutom, sådant som förhållandet mellan det första och det tredje är, sådant är förhållandet mellan det andra och fjerde. Detta ses också lätt af följande tal.

2 . 6 . 12 . 36.

Och derföre har denna regel af filosoferna blifvit kallad (rektangel- = geometrisk) proportion.

---

* Vinkelmärket vid slutet af ordet proporcio betyder sannolikt «rectangularis«.

4. Cum numerus dividens major fuerit dividendo, frangatur dividendus in partes minores, ut si fuerit dividendus florenorum, frangatur in denarios;

5. si secundo numero addantur minuciæ, frangantur integra ejus in minucias ejusdem denominacionis.

Si vero primo ex (= et?) tercio minuciæ adjunctæ fuerint, cujuslibet integra in minucias secum ponitas* frangantur. Et hoc facto si minuciæ primæ et terciæ diversarum denominacionum fuerint, ad eandem reducantur. Hiis condicionibus intellectis et servatis varias ac infinitas solvere poteris per regulam sequentem quæstiones.

Regula. Numeris, ut dictum est, dispositis, multiplicetur secundus per tercium et productus dividatur per primum, et proveniet in quociente quartus quæsitus.

Ex. Quanti emo 12 ona si 2 pro sex denariis venduntur, juxta condicionem primam numerum quæstionis de loco primo ad tercium versus dexteram ponas. Ut 2 . 6 . 12. Et tunc secundum regulam operari incipias dicendo.

4. Men om talet, som delar, är större än det som skall delas, så förvandlas dividenden till mindre delar, så att om dividenden varit floriner, förvandlas han till denarier.

5. Om det andra talet innehåller bråk, förvandlas de hela i bråk af samma nämnare. Men om det första och tredje talet innehålla bråk, förvandlas hvarderas hela till bråk af samma natur som de vid dem stälda bråken, och om efter detta det första och tredje bråket äro oliknämniga, bringas de till samma nämnare. Sedan dessa reglor blifvit förstådda och iakttagna, kan man lösa mångfaldiga och otaliga frågor enligt följande regel.

Regel. Sedan talen blifvit uppstälde på sätt som nyss är sagdt, multipliceras det andra med det tredje och produkten divideras med det första. Den erhållna qvoten utgör det sökta fjerde talet.

Ex. 1. Hvad kosta 12 ona (sannolikt vinmått), om 2 stycken säljas för 6 denarier?

Enligt den första regeln skall man flytta det tal, hvilket frågan gäller, från första rummet till det tredje mot höger, såsom 2 . 6 . 12.

---

* = positas.

6 in 12 et proveniet 72. quæ si per duo diviseris 36 numerum quartum et quæsitum procreabis, qui secundo scilicet 6 denariis re et nomine correspondet.

Ex. secundum. Si quæratur 7 poma tribus denariis emi. quanti emo 32 pira. per regulam istam operari non vales ob defectum secundæ condicionis, nam primus et tercius nec nomine nec re conveniunt, poma n:* non sunt pira.

Ex. tercium. Si quæsitum fuerit, duo lotones croci emuntur 9 denariis, quanti duæ libræ croci venderentur. Quia primus et si re qui ubique crocus non tamen correspondet nomine secundo, quia in primo lotones. in secundo libræ, ideo non poteris per regulam operari. nisi libras duas in lotones 64 resolvas. Ut 2 lot. 9 denariis. 64 lot.

Multiplica novem per 64 et 576 producuntur. quæ si per duo diviseris, 288 numerum quæsitum procreabis.

Ex. quartum. Triginta duæ unciæ croci tribus florenis emuntur. quanti una uncia emitur.

Derpå börjar man operera sålunda: 6 gånger 12 gör 72. Då denna produkt divideras med 2, erhålles 36 såsom det fjerde och sökta talet, hvilket motsvarar det andra eller 6 denarier både till sak och namn.

Ex. 2. Det frågas: hvad kosta 32 päron, då 7 äpplen köpas för 3 denarier?

Man kan här ej operera enligt vår regel i följd af det andra vilkorets bristfällighet, ty det första och tredje talet öfverensstämma hvarken i afseende på namn eller sak, ty äpplen äro ej päron.

Ex. 3. Huru mycket kosta 2 skålpund saffran, när 2 lod saffran säljas för 9 denarier?

Emedan det första talet (saffran), om också till saken, hvilken på begge ställen är sa ran, dock icke till namnet motsvarar det andra, alldenstund på det första stället står skålpund, på det andra lod, kan man ej operera enligt regeln utan att först upplösa 2 skålpund i 64 lod, såsom

2 lod . 9 denarier . 64 lod.

Multiplicera 9 med 64, produkten utgör 576. Divideras detta med 2, erhålles 288 såsom det sökta talet.

Ex. 4. 32 uns saffran säljas för 3 floriner, huru mycket kostar ett uns?

---

* = nempe.

Multiplico tria per unum et sunt tria. quia unum nec multiplicat nec dividit. et productum scil. tria per 32 dividere non valeo cum divisor dividendo sit major. Ideo juxta 4 condicionem dividendus scil. 3 floreni in 540 denarios resolvo. et istos per divisorem scil. 32 divido, et si bene operatum fuerit in quocienti 16 denarii et 28 minuciæ denarii pro numero quæsito sunt.

Ex. quintum. Emi tria ona 1 denario et $\frac{2}{3}$. Quanti emuntur 6 ona. Quia jam numero secundo scil. 1 denario adduntur minuciæ scil. $\frac{2}{3}$ unius denarii. Ideo integrum scil. 1 denarium in similes minucias resolvo primum scil. per denominatorem minuciæ scil. tria multiplicando. et minucias productas seu tria aliis duobus addo. et proveniunt pro numero secundo $\frac{5}{3}$ denarii. Illo facto secundum regulam. quinque per sex multiplico et proveniunt 30. Hæc per tria divido et sic in quociente $\frac{10}{3}$ invenio numerum quæsitum precium scil. sex onorum.

Ex. sextum. Emi tres ulnas panni pro 4 florenis, quanti emo sex ulnas et $\frac{3}{4}$ unius ulnæ. Quia jam tercio numero minucia additur et propterea tam primum quam

Jag multiplicerar 3 med ett, produkten blir tre, emedan 1 hvarken multiplicerar eller dividerar. Produkten eller 3 kan jag ej dividera med 32, emedan divisorn är större än dividenden. Derföre upplöser jag enligt fjerde regeln dividenden eller 3 floriner i 540 denarier, och dessa dividerar jag med divisorn eller 32. Dividerar man rätt, erhålles såsom det sökta talet 16 denarier och 28 bråkdelar af en denarie.

Ex. 5. Jag har köpt 3 mått vin för $1\frac{2}{3}$ denarier, hvad kosta 6 mått?

Emedan med det andra talet eller 1 denarier är förenadt ett bråk eller $\frac{2}{3}$ af en denarie, så upplöser jag den hela eller 1 i dylika bråk genom att multiplicera honom med bråkets nämnare eller med tre. Det framkomna bråket, nämnl. de 3 delarne lägger jag till de andra två. I st. f. det andra talet erhåller man sålunda $\frac{5}{3}$ denarie. Härefter multiplicerar jag fem med sex. Produkten 30 dividerar jag med 3, och så finner jag i qvoten det sökta talet $\frac{10}{3}$ eller värdet af de sex måtten.

Ex. 6. Jag har köpt 3 alnar kläde för 4 floriner, hvad kosta $6\frac{3}{4}$ alnar?

Emedan nu i det tredje talet bråk äro tillagde, förvandlar jag så väl det första som det tredje talet till bråk med det tredje talets nämtercium in minucias ad ejusdem denominacionem reduco: scilicet tres ulnas in $\frac{12}{4}$. similiter sex ulnas tercii numeri in $\frac{24}{4}$ frango: quibus addo $\frac{3}{4}$ in eodem tercio numero ponita et erunt $1\frac{3}{4}$ *. Illis ita ad regulam ordinatis secundum quatuor per tercium scil. 27 multiplico et erunt 108. quæ si ** primum 4 s: 12 divisero. in quociente 9 florenis precium s. 6 ulnarum et $\frac{3}{4}$ invenio. Et ita faciendum est si primo additæ fuerint minuciæ.

Ex. septimum. Si quæratur hodie ad cenam cibandi sunt 730 equi et 16 equis modius unus dubitur. Quot modii requiruntur. Ad regulam taliter ponas. Sedecim equi 1 modium. Quot modios 730 equi. Si juxta regulam operatus fueris, in quociente 45 modios et $\frac{10}{16}$ unius modii reperies.

Ex. octavum. Si quæsitum sit, cibandi sunt, 807 homines et pro 4 hominibus 5 mensuræ dabuntur.

Quot in toto mensuræ requiruntur, ponas ad regulam taliter, 4 hominibus necessariæ sunt 5 mensuræ. quot mensuræ necessariæ erunt 807 et provenient in quociente 1008

nare, nämnligen 3 alnar till $\frac{12}{4}$. På samma sätt förvandlar jag det tredje talets 6 alnar till $\frac{24}{4}$, till hvilka jag adderar de i det tredje talet stälda $\frac{3}{4}$, hvarigenom man erhåller $\frac{27}{4}$. Sedan dessa sålunda enligt regeln blifvit ordnade, multiplicerar jag det andra eller 4 med det tredje eller 27 och jag finner 108. Om detta divideras med det första talet 4 eller med 12, finner jag i qvoten 9 floriner såsom värdet på de $6\frac{3}{4}$ alnarne. Och så hade man bort göra, om bråk varit tillagde till det första bråket.

Ex. 7. Det frågas: huru många mått erfordras till en måltid i dag åt 730 hästar, då 16 hästar få ett mått?

Enligt regeln bör du uppställa sålunda:

16 hästar ett mått, huru många mått 730 hästar.

Om du opererar enligt regeln skall du i qvoten finna $45\frac{10}{16}$ mått.

Ex. 8. 807 menniskor skola bespisas, och åt 4 menniskor skola gifvas 5 mått, huru många mått fordras inalles?

Ordna enligt regeln sålunda: för 4 menniskor äro nödvändiga 5 mått, huru många mått behöfvas för 807. Man skall i qvoten erhålla $1008\frac{3}{4}$ mått.

---

* Sannolikt misskrifning i st. f. $6\frac{3}{4}$ eller $\frac{27}{4}$.

** Här är möjligen «per» uteglömdt.

mensuræ et $\frac{3}{4}$ unius mensuræ. Ita similiter, si quæratur cibandi sunt 677 homines et cuilibet dabitur panis unus, quorum 24 ex uno modio fiunt. quot requiruntur modii. Pone ad regulam sec. 24 homines habuerunt unum modium. quot modios 677 homines, et reperies in quociente 28 modios et cum hoc $\frac{5}{24}$ unius modii.

Et quamvis sint multæ aliæ similes regulæ, tamen si istas sciveris locare debite sufficient. Amen.

På samma sätt skulle man förfara, om det frågades:

«677 menniskor skola bespisas, och åt hvar och en skall gifvas ett bröd. 24 sådane bröd utgöra ett mått, huru många mått erfordras?«

Ställ enligt regeln så: 24 menniskor behöfva ett mått, huru många mått erfordras för 677 menniskor? Du skall finna i qvoten $28\frac{5}{24}$ mått.

Och ehuru många andra dylika reglor finnas, äro likväl dessa tillräckliga, om man tillbörligen och omsorgsfullt tillämpar dem. Amen.

Härefter följa den pytagoreiska multiplikationstabellen samt redogörelsen för ett sätt att mäta afstånd och höjder medelst ett s. k. euklideiskt instrument (ett slags qvadrant) samt medelst den s. k. jakobsstafven (en i vissa mått indelad käpp).

Nöjet att få visa så nära som möjligt i dess verkliga skick en räknebok från Sten Sture den yngres tid bör rättfärdiga oss för det, att vi offrat några sidor åt redogörelsen för den latinska texten. Trots den välvilliga hjelp vi erhållit af bibliotekarien Klemming vid läsningen af den mycket svårlästa handskriften, torde dock ett och annat fel ännu qvarstå i texten.

Genom forskningar i arkiv och gamla räkningar hoppas vi att allt mer kunna fylla de luckor i det utarbetande af svenska aritmetikens historia, hvarmed vi för närvarande sysselsätta oss.

(Forts.).

Potensläran *.

Af F. W. HULTMAN.

1. *Definition.* En *potens* har formen a^μ. Man kallar a för potensens bas och μ för potensens exponent. Potensens närmare egenskaper bestämmas deraf, att

$$a^{\mu+\nu} = a^\mu a^\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

μ, ν och a kunna betyda hvilka algebraiska storheter som helst.

2. Att finna betydelsen af a^m, a^0, $a^{-\nu}$, $a^{\frac{p}{q}}$, der m, p och q äro hela tal.

Göres i (1) $\nu = 1$ och $\mu = 1, 2, 3, \ldots . m-1$ successivt, finner man

$$a^2 = aa,$$
$$a^3 = a^2 a = aaa,$$
$$a^4 = a^3 a = aaaa,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a^m = a^{m-1} a = aaaa \ldots . a \ (m \text{ stycken}) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

En potens a^m, hvars exponent är ett helt tal, kallas *dignitet*.

Göres i (1) $\mu = 0$, erhålles

$$a^\nu = a^0 a^\nu$$

och således

$$a^0 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Sätter man i (1) $\mu = -\nu$, så får man

$$a^0 = a^{-\nu} a^\nu,$$

hvaraf

$$a^{-\nu} = \frac{a^0}{a^\nu} = \frac{1}{a^\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

---

* För utredning af ett par punkter i denna lilla teori har undertecknad att tacka professor *Daugs* och lektor *Phragméns* välvilliga medverkan.

Om n är ett helt tal, så är på grund af (2) och (1)

$$(a^{\mu})^n = a^{\mu} \,.\, a^{\mu} \,.\, a^{\mu} \ldots = a^{n\mu} \quad \ldots \quad (5).$$

Här få a och μ betyda hvilka algebraiska storheter som helst, men n måste vara ett helt tal.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q},$$

så framt $a^{\frac{p}{q}}$ är positiv, emedan, om man efter att hafva upphöjt en positiv storhet till en viss dignitet (t. ex. den $q^{\underline{\underline{de}}}$) sedan drager ur digniteten den liknämniga positiva roten (således här den $q^{\underline{\underline{de}}}$ roten), man måste återfinna samma positiva rot.

Nu är på grund af (5)

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p.$$

Således blir

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

allt under förutsättning att $a^{\frac{p}{q}} > 0$. Antaga vi nu att $a > 0$, blir $a^p > 0$ och således äfven $\sqrt[q]{a^p} > 0$, hvaraf synes, att för $a > 0$ man har rättighet att sätta likheten

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

3. *Jämförelse mellan potenser med samma bas men med olika exponenter.*

Sats. Om $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, der p, q, r, s äro hela tal, så är

$$a^{\frac{p}{q}} \gtreqless a^{\frac{r}{s}},$$

alltefter som $a \gtreqless 1$.

Bevis.

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ps}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}},$$

och

$$a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{qr}}.$$

Men af olikheten

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$$

följer, att $ps > qr$ och således

$$a^{ps} \gtreqless a^{qr},$$

allteftersom

$$a \gtreqless 1,$$

och således äfven

$$\sqrt[qs]{a^{ps}} \gtreqless \sqrt[qs]{a^{qr}},$$

d. v. s.

$$a^{\frac{p}{q}} \gtreqless a^{\frac{r}{s}},$$

allteftersom $a \gtreqless 1$.

Med andra ord, en potens med rationel exponent och positiv bas växer samtidigt med det att exponenten växer, om basen är > 1, men är 1 då basen är 1, samt aftager samtidigt med det att exponenten växer, om basen är < 1.

4. *Betydelsen af en exponent med irrationel exponent.* Denna betydelse kan ej ur det föregående finnas. Hvilken betydelse man vid en sådan potens bör fästa, är dock temligen naturligt, sedan man lärt känna att en potens med rationel exponent städse växer eller städse aftager samtidigt med det att exponenten tillväxer, allt efter som basen är $\gtrless 1$, samt är 1 då basen är 1.

Definition. Med en potens a^{μ} med irrationel exponent μ förstå vi ett medelvärde mellan potenserna

$$a^{\frac{p}{q}} \text{ och } a^{\frac{p+1}{q}},$$

hvilkas rationela exponenter $\frac{p}{q}$ och $\frac{p+1}{q}$ ligga på hvar sin sida om μ, och hvilkas skilnad $\frac{1}{q}$ kan bli mindre än hvilket tal man behagar uppgifva.

Häraf följer att

$$a^{\mu} = 1$$

för $a = 1$ äfven för irrationelt μ.

Vidare följer att för $a > 0$ är $a^{\mu} > 0$ äfven för μ negativ.

Slutligen följer att, om $\mu > \nu$,

$$a^{\mu} \gtreqless a^{\nu},$$

allteftersom $a \gtreqless 1$, äfven då μ och ν äro irrationela. Ty tänkom oss rationela bråk $\frac{p}{q}$, $\frac{p+1}{p}$, $\frac{p+2}{q}$ så beskaffade att

$$\frac{p+2}{q} > \mu > \frac{p+1}{q} > \nu > \frac{p}{q},$$

då måste

$$\begin{array}{lccccccccclc} & a^{\frac{p+2}{q}} & > & a^{\mu} & > & a^{\frac{p+1}{q}} & > & a^{\nu} & > & a^{\frac{p}{q}} & \text{för } a > 1, \\ \text{men} & .. & = & .. & = & .. & = & .. & = & .. & \text{för } a = 1 \\ \text{och} & .. & < & .. & < & .. & < & .. & < & .. & \text{för } a < 1. \end{array}$$

Anm. Deraf, att skilnaden $\frac{1}{q}$ mellan de rationela bråken $\frac{p+1}{q}$ och $\frac{p}{q}$ kan bli huru liten som helst, följer att skilnaden

$$a^{\frac{p+1}{q}} - a^{\frac{p}{q}}$$

kan bli huru liten som helst. Ty

$$a^{\frac{p+1}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(a^{\frac{1}{q}} - 1) = a^{\frac{p}{q}}(\sqrt[q]{a} - 1) \quad . \quad . \quad (7).$$

Men $\sqrt[q]{a}$ för växande q närmar sig 1 huru nära som helst, hvaraf följer att för växande q nämnde skilnad kan närma sig noll huru nära som helst.

5. Bevis för grundformeln

$$\frac{a^{\varrho}}{a^{r}} = a^{\varrho - \nu}.$$

Göres i (1) $\mu = \varrho - \nu$, erhålles

$$a^{\varrho} = a^{\varrho - \nu} . a^{\nu},$$

hvadan

$$\frac{a^{\varrho}}{a^{\nu}} = a^{\varrho - \nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

6. Bevis för grundformeln

$$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}$$

uuder förutsättning att $a > 0$.

För ν = ett helt tal n är formeln redan bevist genom formeln (5).

Låt nu ν vara = ett brutet tal $\frac{p}{q}$. Då har man på grund af (6) och (5)

$$(a^{\mu})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\mu})^{p}} = \sqrt[q]{a^{\mu p}} = a^{\frac{\mu p}{q}} = a^{\mu \cdot \frac{p}{q}}, \quad \text{h. s. b.} \ . \ . \ . \ (9).$$

Låt slutligen ν vara irrationel och belägen mellan de rationela bråken $\frac{p}{q}$ och $\frac{p+1}{q}$. Då är, enligt definitionen på en potens med irrationel exponent, $(a^{\mu})^{\nu}$ ett medelvärde mellan

$$(a^{\mu})^{\frac{p}{q}} \quad \text{och} \quad (a^{\mu})^{\frac{p+1}{q}}.$$

Vidare är, enligt artikeln 4, $a^{\mu\nu}$ ett medelvärde mellan

$$a^{\frac{\mu p}{q}} \quad \text{och} \quad a^{\frac{\mu(p+1)}{q}},$$

det vill på grund af (9) säga, emellan

$$(a^{\mu})^{\frac{p}{q}} \quad \text{och} \quad (a^{\mu})^{\frac{p+1}{q}}.$$

Emedan således $(a^{\mu})^{\nu}$ och $a^{\mu\nu}$ begge ligga emellan storheterna $(a^{\mu})^{\frac{p}{q}}$ och $(a^{\mu})^{\frac{p+1}{q}}$, hvilkas skilnad på grund af (7) kan bli huru liten som helst, måste dessa storheter vara lika.

Att satsen gäller äfven för ν negativ $= -\pi$ (π positiv) är ej svårt att bevisa. Man har nämnligen

$$(a^{\mu})^{\nu} = (a^{\mu})^{-\pi} = \frac{1}{(a^{\mu})^{\pi}} = \frac{1}{a^{\mu\pi}} = a^{-\mu\pi} = a^{\mu\nu} \quad . \ . \ . \ (10).$$

Således är vår grundformel (10) sann för alla reela värden på μ och ν, om blott $a > 0$.

Kor. $$\left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} = \frac{1}{a^{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Ty man har

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} = (a^{-1})^{\mu} = a^{-\mu} = \frac{1}{a^{\mu}}$$

7. Bevis för grundformeln

$$(ab)^{\mu} = a^{\mu}b^{\mu}$$

under antagande att $a > 0$ och $b > 0$.

Låt först μ vara ett helt tal m. Då är enligt (2)

$$(ab)^m = ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\,.\,.\,. = a^m b^m \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Låt vidare μ vara ett brutet tal $\frac{p}{q}$. Då är

$$a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q},$$

emedan a och b äro antagna vara positiva. Häraf följer med stöd af (12) och (10) att

$$a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{(ab)^p} = (ab)^{\frac{p}{q}} \quad . \quad . \quad (13).$$

Låt slutligen μ vara ett irrationelt tal samt först a och b begge större eller ock begge mindre än 1. Då är, om

$$\frac{p}{q} < \mu > \frac{p+1}{q},$$

$(ab)^{\mu}$ ett medelvärde mellan $(ab)^{\frac{p}{q}}$ och $(ab)^{\frac{p+1}{q}}$.

Vidare är a^{μ} ett medelvärde mellan $a^{\frac{p}{q}}$ och $a^{\frac{p+1}{q}}$ samt

b^{μ} . . . . $b^{\frac{p}{q}}$ och $b^{\frac{p+1}{q}}$,

och således äfven (enär a och b äro samtidigt $>$ eller samtidigt $<$ 1)

$a^{\mu} b^{\mu}$ ett medelvärde mellan $a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$ och $a^{\frac{p+1}{q}} b^{\frac{p+1}{q}}$

eller enligt (13) mellan . . . $(ab)^{\frac{p}{q}}$ och $(ab)^{\frac{p+1}{q}}$.

Enär således $(ab)^{\mu}$ och $a^{\mu} b^{\mu}$ begge ligga emellan samma gränser $(ab)^{\frac{p}{q}}$ och $(ab)^{\frac{p+1}{q}}$, hvilkas skilnad enligt (7) kan bli huru liten som helst, måste dessa storheter vara lika. Man har således

$$a^{\mu} b^{\mu} = (ab)^{\mu} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

så framt begge baserna a och b äro samtidigt $>$ eller samtidigt $<$ 1.

Om endera basen är $= 1$, är satsen sjelfklar.

Antag nu $\quad a > 1 \quad$ och $\quad b < 1$.

1) $ab > 1$.

Man har då på grund af (11)

$$(ab)^{\mu} = (ab)^{\mu} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{\mu} \cdot b^{\mu} = \left(ab \cdot \frac{1}{b}\right)^{\mu} \cdot b^{\mu}$$

med stöd af (14), enär ab och $\frac{1}{b}$ äro samtidigt $>$ 1. Således är

$$(ab)^{\mu} = a^{\mu} b^{\mu}.$$

2) $ab = 1$.

Man har då i följd af antagandet och (11)

$$a^{\mu} b^{\mu} = a^{\mu} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} = 1 = (ab)^{\mu}.$$

3) $ab < 1$.

Då blir enligt (11)

$$(ab)^{\mu} = (ab)^{\mu} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} \cdot a^{\mu} = \left(ab \cdot \frac{1}{a}\right)^{\mu} \cdot a^{\mu},$$

med stöd af (14), emedan ab och $\frac{1}{a}$ äro samtidigt $<$ 1.

Således är $\quad (ab)^{\mu} = b^{\mu} a^{\mu}$.

Vår sats är således bevist för positivt μ.

Låt nu μ vara negativ och $= -\pi$ (π positiv). Då är

$$(ab)^{\mu} = (ab)^{-\pi} = \frac{1}{(ab)^{\pi}} = \frac{1}{a^{\pi} b^{\pi}} = a^{-\pi} \cdot b^{-\pi} = a^{\mu} \cdot b^{\mu}.$$

Vår sats är således sann för a och b begge $>$ 0 och μ en reel qvantitet hvilken som helst.

Korollarium. $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{b^{\mu}}$.

Ty $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\mu} = (a \cdot b^{-1})^{\mu} = a^{\mu} \cdot b^{-\mu} = \frac{a^{\mu}}{b^{\mu}}$.

Formlerna (1), (8), (10), (14) i förening med (2), (3), (4) och (6) innehålla potenslagarne.

AFDELNING II.

Definita integraler af synektiska funktioner *.

Af G. DILLNER.

1. Vi förutsätta såsom här gifna de allmänna bestämningar rörande komplexa funktioner, hvilka förekomma i Grunddragen af geom. kalkyl §§ 139—143.

I det följande låta vi, der ej annorlunda föreskrifves, enkla bokstäfver såsom z, h etc. beteckna komplexer, hvarvid modylerna utmärkas med $\bar{z}$, $\bar{h}$ etc. och argumenten med $\widehat{z}$, $\widehat{h}$ etc. (jfr Grunddr. af geom. kalk. § 112).

---

* Denna af Cauchy till väsendtlig del funna teori, som, med afseende på sin utomordentliga rikedom på vigtiga och intressanta utvecklingar, utgör ett af matematikens vackraste framsteg under senare tider, är hittills föga allmänt beaktad och studerad och det, som det vill synas, af orsak, att hennes förutsättningar och bevis, såsom stödda på *imaginära* operationer, äro af en allt för svårfattlig och hypotetisk natur för att göra henne allmännare tillgänglig och skaffa henne tillbörligt förtroende. Vi skola här söka visa, huruledes denna teori, såsom stödd på den fullt *reela* betydelsen af geometriska qvantiteter och deras räknelagar, låter utveckla sig på ett lika enkelt som bindande sätt, hvarigenom de särdeles vigtiga satser, som innebära vilkoren för en funktions utveckelbarhet i serie, framstå i den enkla form, att de kunna intaga sin naturliga plats såsom grundval för läran om serier. Det må anmärkas, att denna uppsats med afseende på den formela behandlingen är att betrakta såsom tillhörande den geometriska kalkylen och att den till sin allmänna omfattning förutsätter, utom hvad hittills i denna tidskrift blifvit utveckladt af denna kalkyl, äfven läran om transcendenta funktioner och lagarne för derivation. Vi skola derför begränsa vår uppsats derhän, att, hvad vi förutsättningsvis behöfva, icke blir mer, än som vi vid hvarje särskildt tillfälle kunna antyda eller belysa (jfr Théorie élémentaire des quantités complexes par J. Hoüel, II part.).

En funktion af en komplex variabel, som för hvarje punkt inom ett visst gebit af planet förenar egenskaperna att vara *ensvarig* (monodrom), *ändlig* och *kontinuerlig*, kallas *synektisk* inom detta gebit af planet.

Anm. I den vanliga betydelsen af synektisk funktion ingår ock termen »monogen», hvilken innebär, att funktionens oberoende variabel är af formen ϱ_ω. Denna term blir öfverflödig i och med detsamma, som de variabla, hvilka ingå i våra funktioner, på förhand angifvas såsom fullständiga komplexer.

2. Vi anföra inledningsvis den geometriska betydelsen af sambandet mellan en komplex funktions *derivata* och funktionen sjelf såsom dess *primitiva*.

Om vi antaga $F(z)$ vara en kontinuerlig funktion af z och vi låta $z = OP$ (fig. 30) beskrifva en kontur PP', så beskrifver $F(z) = O_1Q$ en motsvarig kontur QQ'. Antages $OP' = z+h$, då följaktligen $O_1Q' = F(z+h)$, så definieras derivatan af $F(z)$ i punkten P såsom $\lim \frac{QQ'}{PP'}$ * för $PP' = 0$, eller, då QQ' sättes $= \Delta F(z)$ och $PP' = h = \Delta z$:

$$\lim \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \lim \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{dF(z)}{dz} = F'(z) \quad . \; . \; . \quad (1),$$

d. v. s. då dS och ds utmärka de resp. konturelementens modyler i de motsvariga punkterna Q och P samt Σ och σ deras rigtningar (= tangenternas PL och QM rigtningar):

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{(dS)_\Sigma}{(ds)_\sigma} = \left(\frac{dS}{ds}\right)_{\Sigma-\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

då följaktligen en komplex funktions derivata är till modylen = qvoten mellan funktionens och den oberoende variabelns »bågelement» i motsvariga punkter och till argumentet = skilnaden mellan dessa elements argument.

3. Enär tillskottet h icke ingår i derivatan, så är denna densamma, i hvilken rigtning man än drager h, d. v. s.

---

* Jfr Grunddr. af geom. kalk., § 115.

qvoten mellan de två konturernas element i motsvariga punkter äfvensom skilnaden mellan dessa elements rigtningar är densamma, åt hvilket håll man än drager den oberoende variabelns kontur från punkten P. Denna egenskap hos en komplex funktions derivata plägar anföras såsom kännetecken på, att funktionen sjelf är monogen (jfr § 1, *anm.*).

4. Man lägge här märke till, att kontinuitets kriteriet för en funktion $F(z)$ är

$$\lim \{ F(z+h) - F(z) \} = 0$$

för $\lim \bar{h} = 0$, under det argumentet $\widehat{h}$ representerar hvilket värde som helst mellan 0 och 2π. Om vi jämföra detta kriterium med den i § 2 gifna betydelsen på derivata, så framgår, att så ofta som en derivata är ändlig måste dess primitiva med nödvändighet vara kontinuerlig. Dermed är dock icke sagdt, att en funktions kontinuitet är begränsad till endast de fall, då dess derivata är ändlig.

5. Af den i (2) gifna betydelsen på derivata följer omedelbart, *att en ensvarig primitiva $F(z)$ har en ensvarig derivata $F'(z)$. Deremot svarar mot en ensvarig derivata $f(z) = F'(z)$ ett obegränsadt antal primitivor, hvilka alla ha sina konturer kongruenta och parallela och derför kunna representeras af uttrycket*

$$F(z) + C,$$

der C utmärker en arbiträr konstant komplex.

---

6. Om $f(z)$ är en synektisk funktion af z och vi låta z beskrifva en kontur $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n$ (fig. 31), der $z_0 = OP_0$, $z_1 = OP_1$ etc. och der följaktligen kordorna P_0P_1, P_1P_2 etc. äro i ordning

$$\left.\begin{array}{ll} z_1 - z_0 & = h_1 \\ z_2 - z_1 & = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ Z - z_{n-1} & = h_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

och om vidare $Q_0Q_1Q_2\ldots Q_n$ utgör den af $f(z)$ beskrifna motsvariga konturen, der $f(z_0) = O_1Q_0$, $f(z_1) = O_1Q_1$ etc., så utgör serien

$$(P_0P_1).(O_1Q_0) + (P_1P_2).(O_1Q_1) + \ldots (P_{n-1}P_n).(O_1Q_{n-1})$$

eller annorlunda uttryckt

$$\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = h_1 f(z_0) + h_2 f(z_1) + \ldots h_n f(z_{n-1}) \quad \ldots . (4)$$

för $\lim n = \infty$ d. v. s. för oändligt små kordor $h_1, h_2, \ldots h_n$, hvad vi förstå med *definit integral* af $f(z)$ mellan gränserna z_0 och Z, vanligen tecknad

$$\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{n-1}) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad \ldots . (5).$$

Vi säga nu, *att vi integrerat funktionen* $f(z)$ *längs konturen* z *eller* $P_0P_1P_2\ldots P_n$ *från gränsen* z_0 *till gränsen* Z.

En definit integral kan således betraktas som en polygon $R_0R_1R_2\ldots R_n$, der sidorna äro i ordning termerna i (4) och som i limesöfvergången förvandlas i en bugtig kontur, hvilken vi kalla *integralkonturen.* Kordan R_0R_n är såsom *väg* identiskt lika med polygonen $R_0R_1R_2\ldots R_n$ äfven i limes, då alltså den definita integralens betydelse är *att representera den korda, som förenar integralkonturens begynnelsepunkt med dess slutpunkt.*

7. Enär modylen för serien (4) är mindre än summan af termernas modyler eller

$$\operatorname{mod} \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) < \sum_{r=1}^{r=n} \overline{h}_r . \operatorname{mod} f(z_{r-1}),$$

så följer a fortiori, om M utmärker det största modylvärde, som $f(z)$ kan få mellan gränserna z_0 och Z, att

$$\operatorname{mod} \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) < M \sum_{r=1}^{r=n} \overline{h}_r, \quad \text{d. v. s.} \quad < Ms \ldots (6),$$

då s är summan af de oändligt små h-kordorna eller, som är detsamma, då s är $=$ båglängden $P_0P_1P_2\ldots P_n$. På grund häraf kunna vi uttala följande sats: *en synektisk funktions definita integral har alltid ändlig modyl.*

8. Om $f(z) = F'(z)$, så kunna vi i öfverensstämmelse med (1) och med iakttagande af (3) sätta följande likheter:

$$
\begin{aligned}
F(z_1) - F(z_0) &= h_1\{f(z_0) + \varepsilon_1\} \\
F(z_2) - F(z_1) &= h_2\{f(z_1) + \varepsilon_2\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F(Z) - F(z_{n-1}) &= h_n\{f(z_{n-1}) + \varepsilon_n\},
\end{aligned}
$$

der $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ äro komplexer, hvilkas modyler bli $= 0$ för $\lim n = \infty$. Genom att addera dessa likheter fås

$$F(Z) - F(z_0) = \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) + \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon_r h_r .$$

Om m utmärker det största modylvärde, som någon af qvantiteterna $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ kan få, så är enligt (6), då s utmärker båglängden mellan integrations gränserna:

$$\bmod \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon_r h_r < ms ,$$

då alltså för $\lim n = \infty$:

$$F(Z) - F(z_0) = \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = \int_{z_0}^{Z} f(z) dz \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

hvilken sats utsäges: *om $F(z)$ är primitiva till $f(z)$, så är definita integralen af $f(z)$ mellan gränserna z_0 och Z skilnaden mellan primitivans värde för substitutionen Z och primitivans värde för substitutionen z_0.*

Anm. Summering af komplexa serier af formen (4) är nu alltid möjlig, så snart vi kunna finna primitivan till en gifven funktion $f(z)$ som derivata. Primitivan $F(z)$ representerar nu integralkonturen och skilnaden $F(Z) - F(z_0)$ representerar den korda, som förenar integralkonturens begynnelsepunkt med dess slutpunkt.

9. Om vi låta den oberoende variabeln z beskrifva en *sluten* kontur, då följaktligen $z_0 = Z$, så beskrifver $f(z)$, såsom varande en synektisk funktion af z, äfvenledes en

sluten kontur; den motsvarande integralkonturen måste då vara antingen *sluten* eller *öppen*, hvilka tvenne fall gifva uppslag till följande vigtiga klassifikation af de definita integralerna.

1°. *Integralkonturen längs en sluten kontur sluten.*

I detta fall måste enligt (4), för hvarje gång z ånyo beskrifver sin slutna kontur, den deremot svarande integralkonturen lägga sig i alla punkter kongruent på den först beskrifna integralkonturen, då alltså, för huru många gånger z än beskrifvit sin slutna kontur:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = 0.$$

Häraf framgår således, att, om en punkt z tages hvar som helst på den oberoende variabelns kontur såsom öfre gräns och $F(z)$ i enlighet med föreg. § representerar primitivan till $f(z)$, så är alltid integralen

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

en *kontinuerlig* och *ensvarig* d. v. s. *synektisk* funktion af z. Vi kunna alltså uttala följande sats:

Om en synektisk funktions definita integral, tagen längs en sluten kontur, är 0, så är integralen, tagen från en konstant nedre gräns z_0 till en variabel öfre gräns z, en synektisk funktion af z.

2°. *Integralkonturen längs en sluten kontur öppen.*

Om vi i detta fall antaga R_0RR_n (fig. 32) representera den öppna kontur, som beskrifves af integralen, under det z beskrifver sin slutna kontur P, så erhålles enligt (4), då z å nyo beskrifver sin slutna kontur, en kongruent och parallel integralkontur $R_nR'R'_n$, som börjar i den föregåendes slutpunkt, o. s. v. Detsamma inträffar, om vi integrera längs konturen P i motsatt led, d. v. s. om vi summera serien (4) i motsatt ordning. Om vi derför med Ω

utmärka kordan $R_0 R_n$ och med $\varkappa$ ett helt positivt eller negativt tal, så fås för den öppna integralkonturen

$$\int_{z_0}^{Z} f(z) dz = \varkappa \Omega,$$

der $\varkappa$ utvisar antalet gånger, som z beskrifvit sin slutna kontur, och anger för öfrigt med sitt tecken, i hvilken led konturen blifvit beskrifven.

Häraf följer således, att, om en af z representerad punkt P tages hvar som helst på den oberoende variabelns kontur såsom öfre gräns och vi låta R vara dess motsvariga punkt på integralkonturen samt $R_0 R$ sjelfva integralen från P_0 till P, så är, då i öfverensstämmelse med (8) $R_0 R$ sättes $= F(z) - F(z_0)$ och u utmärka integralens *generela* värde:

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z) dz = F(z) - F(z_0) + \varkappa \Omega \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Denna integral är kontinuerlig, men representerar för $\varkappa = 0, 1, -1$ etc. ett obegränsadt antal värden såsom $R_0 R$, $R_0 R'$, $R_0 R''$ etc., hvilka alla bildas genom att till integralens värde från P_0 till P lägga 0, Ω, $-\Omega$ och i allmänhet $\varkappa \Omega$, då $\Omega = R_0 R_n \# RR' \# R''R$. Komplexen Ω kallas *period*, och z betraktad som en funktion af u är *periodisk* d. v. s. bibehåller identiskt samma värde, hvilken multipel af Ω man än må lägga till u. Vi kunna alltså uttala följande sats:

Om en synektisk funktions definita integral, tagen längs en sluten kontur, är en komplex Ω, så är integralen, tagen från en konstant nedre gräns z_0 till en variabel öfre gräns z, en kontinuerlig och mångsvarig funktion af z, och z sjelf är en periodisk funktion af integralen med Ω som period.

Om i (9) $\varkappa$ antages $= 0$, så utgör $F(z) - F(z_0)$ eller, som är detsamma, integralens värde från P_0 till P, hvad vi förstå med den mångsvariga integralens *principalvärde*.

Anm. Af den definita integralens betydelse, sådan hon hittills blifvit utvecklad, ega vi inga allmänna kriterier, som afgöra, då en integral, tagen längs en sluten kontur, bildar en sluten eller öppen kontur eller m. a. o., då en integral utgör en ensvarig eller mångsvarig funktion af sin öfre gräns. Emellertid gifves det en mängd fall, då vi omedelbart kunna afgöra, om en definit integral är af det ena eller andra slaget. Således är enligt (7) definita integralen af en synektisk funktion $f(z)$, som har en känd primitiva $F(z)$, af samma karakter som denna. Så t. ex. är integralserien $\sum_{r=1}^{r=n} h_r \,.\, z_{r-1}$ en ensvarig funktion af z_n, enär $z\underline{s}$ primitiva $\frac{1}{2}z^2$ * är en ensvarig funktion af z; deremot är integralserien $\sum_{r=1}^{r=n} \frac{h_r}{z_{r-1}}$ en mångsvarig funktion af z_n, enär $\frac{1\underline{s}}{z}$ primitiva lz ** är en mångsvarig funktion af z, o. s. v. Dessutom inses, att för $f(z) = \frac{\psi(z)}{z}$, der $\psi(z)$ är en synektisk funktion af z med vinkelbanan 0, integralen $\sum_{r=1}^{r=n} h_r . f(z_{r-1})$, tagen längs en sluten kontur, måste ha en öppen kontur och således utgöra en mångsvarig funktion af sin öfre gräns. Ty hvarje element i integralkonturen har formen $\frac{h_r}{z_{r-1}} \,.\, \psi(z_{r-1})$, men arg $\frac{h_r}{z_{r-1}}$ såsom utgörande vinkeln $\widehat{h_r} - \widehat{z}_{r-1}$, d. v. s. vinkeln mellan rigtningarna af z konturens radius vector och tangent, har

---

* Vi förutsätta här såsom bevisadt, att de kända integrationslagarne för reela qvantiteter äfven gälla för komplexer.

** Betydelsen af transcendenta funktioner såsom lz, e^z etc., då den oberoende variabeln z är en geometrisk komplex, är för vårt närvarande ändamål tillräckligt anvisad af den vanliga teorien för imaginära qvantiteter, hvarför vi här lemna å sido all närmare förklaring af dylika funktioner.

vinkelbanan 0, då följaktligen argumentet för integralkonturens element äfven måste ha vinkelbanan 0, hvarför denna kontur omöjligen kan vara sluten. Så t. ex. är $u = \int_{z_0}^{z} \frac{e^z dz}{z}$ med all säkerhet en mångsvarig funktion af z och följaktligen z en periodisk funktion af u. Det faller af sig sjelf, att ett allmänt kriterium för särskiljandet af de fall, då en synektisk funktions definita integral är en ensvarig eller mångsvarig funktion, måste vara af särdeles stor vigt. Vi öfvergå nu till utvecklingen af de satser, hvarpå detta kriterium beror.

10. Vi utgå från de två integralserierna

$$\sum_{r=1}^{r=n} h_r \, . f(z_{r-1}) \qquad \text{och} \qquad \sum_{r=1}^{r=n} k_r \, . f(\zeta_{r-1}),$$

der vi mellan ζ och z ha följande relation:

$$\zeta = z + \tau \, . \, \varphi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

der τ är ett af z oberoende litet talvärde och $\varphi(z)$ representerar en arbiträr synektisk funktion, blott så till vida bestämd, att

$$\varphi(z_0) = \varphi(Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

eller, som enligt (10) är detsamma:

$$\zeta = z_0 \qquad \text{och} \qquad \zeta_n = z_n = Z.$$

Om vi således låta $z = OP$ och $\zeta = OP'$ (fig. 33) representera de resp. konturerna P_0PP_n och $P_0P'P_n$, så måste $f(z) = O_1Q$ och $f(\zeta) = O_1Q'$ representera motsvariga konturer såsom Q_0QQ_n och $Q_0Q'Q_n$, då följaktligen

$$\left.\begin{aligned} PP' &= \zeta - z = \tau\varphi(z) \\ QQ' &= f(\zeta) - f(z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

hvaraf inses, att, om $\varphi(z) = O_2S$ beskrifver den till sin form fullkomligt arbiträra konturen S, började och slutande i origo O_2 [jfr (11)], så är deviationen $P_0P'P_n$ till sin form beroende af denna arbiträra kontur och det så, att, då τ närmar sig att sammanfalla med 0, närmar sig deviationen $P_0P'P_n$ att i hvarje punkt sammanfalla med konturen P_0PP_n

och konturen $Q_0Q'Q_n$ att i hvarje punkt sammanfalla med konturen Q_0QQ_n. Om slutligen $\sum_{r=1}^{r=n} h_r . f(z_{r-1}) = R_0R_n$ och $\sum_{r=1}^{r=n} k_r . f(\zeta_{r-1}) = R_0R'_n$ representera de mot P_0PP_n och $P_0P'P_n$ svarande integralkonturerna R_0RR_n och $R_0R'R'_n$ och vi kalla föreningslinien $R_nR'_n$ mellan de två integralkonturernas slutpunkter för T, så erhålles:

$$T = \sum_{r=1}^{r=n} k_r f(\zeta_{r-1}) - \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = \sum_{r=1}^{r=n} [k_r f(\zeta_{r-1}) - h_r f(z_{r-1})] \quad (13).$$

Komplexen T utgör nu hvad vi här förstå med den definita integralens $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ *differens* för deviationen $P_0P'P_n$ af konturen P_0PP_n, längs hvilken integralen är tagen. Vår uppgift är nu att bestämma värdet på denna differens för $\lim \tau = 0$, d. v. s. för det fall, att deviationen $P_0P'P_n$ i alla sina punkter närmar sig att sammanfalla med konturen P_0PP_n.

Om under summationstecknet i (13) lägges till och tages ifrån termen $k_r f(z_{r-1})$ och vi teckna

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{f(\zeta_{r-1}) - f(z_{r-1})}{\zeta_{r-1} - z_{r-1}} \\ N &= \frac{\varphi(z_r) - \varphi(z_{r-1})}{h_r} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

samt iakttaga följande från (12) härledda likhet

$$k_r - h_r = \zeta_r - z_r - (\zeta_{r-1} - z_{r-1}) = h_r \tau N \quad . \ . \ . \ (15),$$

så erhålles af (13):

$$\frac{T}{\tau} = \sum_{r=1}^{r=n} h_r \{M\varphi(z_{r-1}) + Nf(z_{r-1})\} + \tau \sum_{r=1}^{r=n} h_r MN\varphi(z_{r-1}) \quad . \ . \ (16).$$

Men enligt (14) och med stöd af (12) är

$$\lim M_{[\tau=0]} = f'(z_{r-1}) \quad \text{och} \quad \lim N_{[h_r=0]} = \varphi'(z_{r-1}),$$

hvaraf följer, då h_r och τ samtidigt konvergera mot 0 och under iakttagande, att senare summan i (16) måste bli 0 samtidigt med τ, då nämnl. $f'(z)$ och $\varphi'(z)$ antagas ändliga:

$$\lim \frac{T}{\tau} = \sum_{r=1}^{r=n} h_r \{f(z_{r-1})\,\varphi(z_{r-1})\}' * = \int_{z_0}^{Z} \{f(z)\varphi(z)\}' dz\,,$$

d. v. s. enligt (7) och med stöd af (11):

$$\lim \frac{T}{\tau} = f(Z)\varphi(Z) - f(z_0)\varphi(z_0) = 0 \quad . \quad . \quad (17),$$

hvaraf framgår följande särdeles vigtiga sats:

Om deviationen $P_0 P' P_n$ närmar sig att i alla sina punkter sammanfalla med konturen $P_0 P P_n$, så närmar sig den mot deviationen svarande integralkonturens $R_0 R' R'_n$ ändpunkt R'_n att sammanfalla med den mot konturen svarande integralkonturens $R_0 R' R_n$ ändpunkt R_n och det med en ojämförligt raskare konvergens; eller annorlunda uttryckt: *differensen T mellan definita integralen $R_0 R'_n$, tagen längs deviationen $P_0 P' P_n$, och definita integralen $R_0 R_n$, tagen längs konturen $P_0 P P_n$, dividerad med det mot 0 konvergerande talet τ, som är måttet på deviationens närmande till konturen, är i limes 0.*

Om vi i öfverensstämmelse med den i Variations kalkylen gifna terminologien benämna $\lim \frac{T}{\tau}$ för *variation*, så kan ofvanstående sats kortligen uttryckas sålunda:

» *Variationen af en synektisk funktions definita integral är 0.*» **

---

* Vi förutsätta här den kända derivations lagen

$$(uv)' = uv' + vu'$$

såsom gällande äfven för komplexa funktioner, hvilket lätteligen låter visa sig.

** Jfr Briot & Bouquet, Fonctions doublement périodiques, p. 21. Det der anförda beviset för denna sats hvilar på tvenne obevisade förutsättningar: 1° antages Variations kalkylen gälla för komplexa funktioner utan att dess betydelse för dessa ens är uppvisad; 2° förutsättes den för reela funktioner af två variabla gällande permutabiliteten af differentions ordningen såsom gällande äfven för komplexa funktioner. Det af

Anm. Man lägge nogsamt märke till den i (10) gifna betydelsen af den arbiträra *hjelpkonturen* $\varphi(z)$ eller S; ty genom att på behörigt sätt variera dess form är det alltid möjligt att gifva deviationen $P_0P'P_n$ hvilken tänkbar form som helst. Vi komma i det följande att draga en synnerlig nytta af denna hjelpkonturens arbiträra karakter.

11. De punkter, i hvilka en funktion $f(z)$ upphör att vara synektisk, kallas »*kritiska*».

På grund af (17) kunna vi nu omedelbart sluta oss till följande vigtiga sats.

Om vi låta konturen z med sina begge ändpunkter z_0 och Z fixa kontinuerligt devieras från läget P_0PP_n (fig. 34) till läget $P_0P'P_n$ och om $f(z)$ inom det af de successiva deviationerna berörda gebitet P_0PP_nP' icke har någon kritisk punkt, så devieras integralkonturen $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ likaledes kontinuerligt inom ett motsvarande gebit af planet från läget R_0RR_n till läget $R_0R'R_n$ med sina begge ändpunkter äfvenledes fixa.

Denna sats kunna vi äfven uttala under följande form.

Om man har att integrera en synektisk funktion $f(z)$ från en punkt z_0 till en punkt Z, så är det likgiltigt, hvilken väg man vid integrationen följer, om nämnligen $f(z)$ mellan de i fråga satta vägarne icke har någon kritisk punkt.

Anm. Att konturen z under den successiva deviationen kan undergå hvilken formförvandling som helst, framgår omedelbart deraf, att formen på hvarje särskild deviation, såsom endast beroende af den arbiträra formen på hjelpkonturen $\varphi(z)$, kan vara hvilken som helst (jfr föreg. § *anm.*). En tydlig föreställning om tillkomsten af en sådan

---

Bertrand, Calcul integral, pag. 295, anförda beviset är begränsadt till det fall, då arg $\varphi(z)$ är konstant $= \frac{1}{2}\pi$, hvilket naturligen för frågans generela behandling på ett högst betänkligt sätt inskränker deviationens form.

formförvandling under en kontinuerlig deviation får man, om man tänker sig en tråd, löpande genom två fasta ygglor, forma sig på alla möjliga sätt, under det han med alla sina punkter i planet glider från ett gifvet läge till ett annat.

12. Emedan enligt (6) modylen af en synektisk funktions definita integral alltid är < längden af den väg, längs hvilken man integrerat, × det största modylvärde, som funktionen kan få mellan integrations gränserna, så inses, att, om vi i fig. 34 låta vägen P_0PP_n närma sig att bli 0 eller, som är detsamma, vägen $P_0P'P_n$ att bli sluten, så närmar sig ock integralen R_0R_n att bli 0 eller, som är detsamma, integralkonturen $R_0R'R_n$ att bli sluten. På grund häraf och med stöd af föreg. § kunna vi således uttala följande särdeles vigtiga sats:

En synektisk funktions definita integral, tagen längs en sluten kontur, inom hvilken funktionen icke har någon kritisk punkt, är 0 eller, som är detsamma, bildar sjelf en sluten kontur.

13. Denna sats, jämförd med den i § 9, 1° uttalade, kan ock uttryckas under följande form:

En synektisk funktions definita integral, tagen mellan gifna gränser på en sluten kontur, inom hvilken icke finnes någon kritisk punkt, är en synektisk funktion af sin öfre gräns.

Anm. Med denna sats ha vi således vunnit en vigtig insigt i det i § 9 *anm.* antydda kriteriet, i det vi utan förutsatt kännedom om primitivan kunna afgöra, då en definit integral med all säkerhet är en synektisk funktion. Huruvida åter den definita integralen af en funktion, som är synektisk längs en sluten kontur, men icke för alla punkter inom densamma, är med bestämdhet en mångsvarig funktion, låter icke afgöra sig af vår hittills gjorda utveckling. Vi blifva framdeles i tillfälle att närmare beröra denna fråga.

14. Om PP' (fig. 35) är en sluten kontur, som fullt omsluter en annan sluten kontur TT', och om $F(z)$ är synektisk för hvarje punkt på dessa konturer äfvensom för hvarje punkt på den mellan dessa konturer belägna »*ring*», så är enligt § 12 integralen längs konturen $TT'T$ = integralen längs konturen $TPP'PT$, begge integralerna tagna i den af pilteckningen antydda leden. Men den senare integralen är = integralen längs den slutna konturen $PP'P$ + integralen längs TP + integralen längs PT, hvilka två senare integraler såsom varande identiskt lika och af motsatta tecken utgå *. Vi kunna alltså uttala följande sats:

Om $F(z)$ är synektisk för hvarje punkt på en ring jämte dess begränsande konturer, så är integralen längs den ena konturen = integralen längs den andra.

15. Såsom en omedelbar följd af föreg. § framgår, att, om $f(z)$ är synektisk för hvarje punkt på och inom en sluten kontur P (fig. 36) och om t är en punkt inom P, omgifven af en oändligt liten cirkel, som vi utmärka med (t), så är, då ζ och z utmärka punkter på resp. (t) och P:

$$\int^{(t)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - t} = \int^{P} \frac{f(z)dz}{z-t} \quad . \ . \ . \quad (18)^{**}.$$

Integralen till venster i (18) likasom hvarje integral, hvilken tages längs en oändligt liten cirkel, som omger en kritisk punkt, kalla vi *punktintegral* ***.

---

* De satser, som här förutsättas, nämnligen

$$1^0 \quad \int_{z_0}^{Z} F(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz + \int_{z_1}^{Z} F(z)\,dz,$$

der z_1 ligger på konturen mellan z_0 och Z, samt

$$2^0 \quad \int_{z_0}^{Z} F(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} F(z)\,dz$$

utgöra omedelbara följder af den i § 6 gifna definition på definit integral.

** Vid en definit integral, tagen längs en *hel* sluten kontur, sättes konturens namn på den öfre integrations gränsens plats.

*** En sådan punktintegral, dividerad med $2\pi i$, utgör hvad Cauchy kallar *résidu intégral*, representerad af ett tecken, hvilket vi af typografiska skäl icke kunna här utsätta.

16. Om till venster i (18) $\zeta - t$ sättes $= \varrho_\omega$, då vi låta ϱ_ω med t som medelpunkt beskrifver den oändligt lilla cirkeln ⓣ, så fås, enär $d\zeta = i\varrho_\omega d\omega$, för $\lim \varrho = 0$:

$$\int^{ⓣ} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - t} = \int_0^{2\pi} if(t + \varrho_\omega)d\omega = 2\pi i f(t),$$

då alltså med stöd af (18):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int^{ⓣ} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - t} = \frac{1}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{z - t} \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

hvilken sats utsäges: *om $f(z)$ är synektisk för hvarje punkt på och inom en sluten kontur P och om t är en punkt inom konturen, så är funktionens värde $f(t)$ för denna punkt*

$$= \frac{1}{2\pi i} \times \textit{punktintegralen} \int^{ⓣ} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - t} \textit{ eller perioden} \int^{P} \frac{f(z)dz}{z - t}.$$

15. Genom att derivera* (19) r gånger med afseende på t och under antagande, att t icke ingår i $f(z)$ eller är af z beroende, erhålles:

$$f^{(r)}(t) = \frac{1.2..r}{2\pi i}\int^{ⓣ} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)^{r+1}} = \frac{1.2..r}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{(z - t)^{r+1}} \quad ..(20),$$

hvilken likhet utsäges: *om $f(z)$ är synektisk för hvarje punkt på och inom en sluten kontur P och om t är en punkt inom konturen, så är $r^{\underline{te}}$ derivatans värde $f^{(r)}(t)$ för denna punkt*

$$= \frac{1.2...r}{2\pi i} \times \textit{punktintegralen} \int^{ⓣ} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)^{r+1}} \quad \textit{eller perioden}$$

$$\int^{P} \frac{f(z)dz}{(z - t)^{r+1}}.$$

---

* Lagen för denna derivation låter uppvisa sig på *formelt* enahanda sätt för komplexa som reela funktioner.

17. Med stöd af (19) och (20) kunna vi nu beräkna hvarje integral af formen

$$\int^{(t)} \frac{f(z)\,dz}{(z-t)^{r+1}} = \int^{P} \frac{f(z)\,dz}{(z-t)^{r+1}},$$

der $f(z)$ representerar en synektisk funktion för alla punkter på och inom P samt t en gifven punkt inom P. Så t. ex. finna vi enligt (19) omedelbart följande integraler:

$$\int^{P} \frac{e^z dz}{z-t} = 2\pi i\,.\,e^t\,; \qquad \int^{P} \frac{\operatorname{Sin} z\,dz}{z-t} = 2\pi i\,.\operatorname{Sin} t\,^{*}\,;$$

$$\int^{P} \frac{l(a+z)\,dz}{z} = 2\pi i l a\,,^{**} \quad \text{o. s. v.}$$

Vidare finna vi af (20) följande integraler:

$$\int^{P} \frac{e^z dz}{z^{r+1}} = \frac{2\pi i}{1\,.\,2 \ldots r}\,; \qquad \int^{P} \frac{\operatorname{Sin} z\,dz}{z^{r+1}} = \frac{2\pi i}{1\,.\,2 \ldots r}\,.\operatorname{Sin}\frac{r\pi}{2}\,;$$

$$\int^{P} \frac{l(a+z)\,dz}{z^{r+1}} = \frac{(-1)^{r-1}\,.\,2\pi i}{r\,.\,a^r}\,, \quad \text{o. s. v.}$$

Anm. Fömedelst formlerna (19) och (20) äro vi nu i tillfälle att beräkna punktintegralerna eller perioderna för en utomordentligt stor klass af funktioner och derigenom afgöra, då dessa gifva slutna eller öppna integralkonturer, d. v. s. då de äro att behandla enligt formeln (8) eller (9) [jfr § 9 *anm.*].

---

* Man lägge märke till, att för $t = 0$ är perioden 0 och således integralen $\int_{z_0}^{z} \frac{\operatorname{Sin} z}{z}\,dz$ en synektisk funktion af z (jfr § 9).

** Man iakttage här, att vinkelbanan för $a + z$ måste vara 0, d. v. s. punkten a ligga utom P. Såsom rätt anmärkningsvärdt framgår, att $\int_{z_0}^{z} \frac{l(a+z)}{z}\,dz$ är synektisk för $a = 1$, men mångsvarig för hvarje annat värde på a.

18. Af (20) framgår omedelbart, att derivatan $f^{(r)}(t)$, såsom utgörande en multipel af perioden $\int^P \frac{f(z)dz}{(z-t)^{r+1}}$, dividerad med $2\pi i$, måste vara *ändlig* och *ensvarig* (jfr § 9) samt *kontinuerlig* (jfr § 4), då vi alltså kunna uttala följande särdeles vigtiga sats:

Om $f(z)$ är en synektisk funktion för hvarje punkt på och inom en sluten kontur P och om t är en punkt inom konturen, så är hvarje dess derivata, af hvilken ordning hon än må vara, en synektisk funktion af t.

19. Om $f(z)$ är synektisk för alla punkter på och inom en sluten kontur P, och om tillika a och $a+h$ utmärka punkter inom denna kontur, så gäller enligt § 8 likheten

$$f(a+h)-f(a) = \int_0^h f'(a+h-x)dx,$$

hvaraf erhålles efter utförd delvis integration

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}.f'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots$$

$$\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(a) + \frac{1}{\lfloor n}\int_0^h x^n f^{n+1}(a+h-x)dx \quad . \; . \; . \; (21).$$

Denna likhet utgör under angifna vilkor en fullkomlig *identitet*, enär vi enligt föreg. § äro försäkrade om de successiva derivatornas synekticitet. Vi hafva således funnit de allmänna vilkor, under hvilka en komplex funktion låter utveckla sig enligt den Taylorska serien, utan att någon af hennes termer upphör att vara ensvarig eller ändlig. Likväl är seriens användbarhet begränsad deraf, huruvida modylen för »resttermen» kan vid något steg af utvecklingen göras mindre än ett talvärde, som på åsyftad noggrannhet i vår räkning icke har något inflytande. Om derför resttermen benämnes R och vi sätta $x = \varrho_\omega$ samt integrera rätlinigt från 0 till h, så erhålles, då i öfverensstämmelse med (6) M utmärker maximi modylen af $f^{n+1}(a+h-x)$ från $x=0$ till $x=h$:

$$\overline{R} < \frac{M}{\underline{|n}} \cdot \int^{\overline{h}} \varrho^n d\varrho \quad \text{d. v. s.} \quad < \frac{\overline{h}^{n+1}}{\underline{|n+1}} \cdot M \quad \ldots \quad (22),$$

hvarigenom vi således erhållit en »öfre gräns» för resttermens modyl, hvilken må tjena som proba på seriens användbarhet.

Anm. 1. I fråga om att utveckla en reel funktion enligt Taylorska serien användes naturligtvis i stället för (22) de kända medelvärdena för resttermen (jfr Årg. 1869, sid. 75).

Anm. 2. Ehuru faktorn $\dfrac{\overline{h}^{n+1}}{\underline{|n+1}}$ i (22) kan genom att öka n tillräckligt göras mindre än hvilket litet talvärde som helst, så följer deraf ingalunda, att produkten $\dfrac{\overline{h}^{n+1}}{\underline{|n+1}} \cdot M$ dervid låter bringa sig under hvilken liten talgräns som helst. Ty maximi modylen M, ehuru alltid ändlig, kan dock vid n:s tillväxt möjligen ökas på ett sådant sätt [jfr (20)], att den i fråga varande produkten får ett ganska högt värde. Vi skola i nästa § finna de närmare vilkoren för den Taylorska seriens användbarhet.

20. Om vi i (21) införa de i (19) och (20) gifna uttrycken på $f(a)$, $f'(a)$ etc., så erhålles

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

$$+ \frac{h^2}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{(z-a)^3} + \ldots \frac{h^n}{2\pi i}\int^{P} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} + R \,..\, (23),$$

der resttermen R har följande form:

$$R = \frac{n+1}{2\pi i}\int_0^{h} x^n \left\{ \int^{P} \frac{f(z)dz}{(z-a+x-h)^{n+2}} \right\} dx \quad \ldots \quad (24).$$

Vi antaga $z = OP$ (fig. 37) beskrifva en cirkel P, hvars medelpunkt A fixeras af $OA = a$ och hvars radie AP sättes $= \varrho_\omega$; vi antaga vidare denne cirkel innesluta den af $a + h = OA + AH$ fixerade punkten H, då således alltid $\varrho > \overline{h}$. Vi få då med begagnande af likheterna

$$z - a = \varrho_\omega, \quad \varrho = \text{konst.}, \quad dz = i\varrho_\omega \,.\, d\omega$$

följande uttryck på (23):

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi}\int^P f(a+\varrho_\omega)d\omega + \frac{h}{\varrho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int^P \frac{f(a+\varrho_\omega)d\omega}{1\omega}$$

$$+ \left(\frac{h}{\varrho}\right)^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int^P \frac{f(a+\varrho_\omega)d\omega}{(1\omega)^2} + \ldots \left(\frac{h}{\varrho}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi}\int^P \frac{f(a+\varrho_\omega)d\omega}{(1\omega)^n} + R.$$

Om m utmärker maximi modylen af $f(a+\varrho_\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = 2\pi$, så fås enligt (6) för $r = 0, 1, 2$ etc.:

$$\text{mod} \int^P \frac{f(a+\varrho_\omega)d\omega}{(1\omega)^r} < m \,.\, 2\pi,$$

hvaraf omedelbart framgår:

$$\text{mod} f(a+h) < m\left\{1 + \frac{\overline{h}}{\varrho} + \left(\frac{\overline{h}}{\varrho}\right)^2 + \ldots\left(\frac{\overline{h}}{\varrho}\right)^n\right\} + \overline{R},$$

hvilket resultat visar, då enligt antagande $\varrho > \overline{h}$, att serien (23), utsträckt i oändlighet, är *konvergent.*

Det återstår nu att visa, att $\lim \overline{R}_{[n=\infty]} = 0$. Om vi för detta ändamål i (24) sätta $x - h = l_\lambda$ samt låta μ utmärka maximi modylen af $\displaystyle\int^P \frac{f(a+\varrho_\omega)1\omega \,.\, d\omega}{\left\{1\omega + \left(\frac{l}{\varrho}\right)_\lambda\right\}^{n+2}}$, under det x går längs räta linien AH från 0 till h eller, som är detsamma, under det l går från $\overline{h}$ till 0, så erhålles i enlighet med (6):

$$\overline{R} < \frac{n+1}{\varrho^{n+1}}\,.\,\mu\int_0^{\overline{h}} \overline{x}^n d\overline{x} \quad \text{d. v. s.} \quad < \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{n+1}\,.\,\mu\,.$$

Men enär $\varrho > l$, så har max. modylen μ alltid ett ändligt värde, då således

$$\lim \overline{R}_{[n=\infty]} = 0 .$$

Vi kunna alltså uttala följande under namn af »*Cauchyanska teoremet*» bekanta sats.

Om $f(z)$ är synektisk för alla punkter på och inom en cirkel P och om a utmärker cirkelns medelpunkt och $a+h$ en punkt inom cirkeln, så låter $f(a+h)$ utveckla sig i en konvergent serie, som till formen är den i (21) gifna Taylorska serien.

Cirkeln P utgör hvad vi förstå med Taylorska seriens *konvergenscirkel.*

Anm. Man lägge nogsamt märke till, att resttermen, endast för så vidt som serien tänkes utsträckt i oändlighet, får försummas såsom varande absolut 0.

21. Om i (19) t sättes $= a+h$, då vi genom division få

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{h}{z-a}+\frac{h^2}{(z-a)^2}+\ldots\frac{h^n}{(z-a)^n}+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}\left(1-\frac{h}{z-a}\right)}\right\},$$

så framgår omedelbart följande likhet

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int^P\frac{f(z)dz}{z-a}+h\int^P\frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+h^2\int^P\frac{f(z)dx}{(z-a)^3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\,h^n\int^P\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right\}+R \quad \ldots (25),$$

der resttermen R har följande form:

$$R = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\cdot\int^P\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+2}\left(1-\frac{h}{z-a}\right)} \quad \ldots . (26).$$

Serien (25), som, oberäknadt resttermen, är af identiskt samma form som serien (23), är *konvergent under samma vilkor som denna.* Genom att ersätta integralerna i (25) med motsvariga uttryck ur (19) och (20) fås den Taylorska serien under följande form:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots \frac{h^n}{\lfloor n}f^n(a) + R \ . \ . \ . \ (27),$$

der resttermen R med begagnande af den i föreg. § gifna bestämning på ϱ_ω äfven kan uttryckas sålunda:

$$R = \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{n+1} . \frac{1}{2\pi} \int^{P} \frac{f(a+\varrho_\omega)\,d\omega}{(1\omega)^{n+1} . \left(1 - \frac{h}{\varrho_\omega}\right)} \ . \ . \ . \ (28).$$

Om μ' utmärker max. modylen af $\dfrac{f(a+\varrho_\omega)}{1 - \dfrac{h}{\varrho_\omega}}$, under det ω går från 0 till 2π, så fås enligt (6)

$$\overline{R} < \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{n+1} . \mu',$$

hvilket uttryck visar, enär μ' på grund af de ponerade vilkoren alltid är ändlig, att

$$\lim R_{[n=\infty]} = 0 .$$

Anm. Den här följda metoden att härleda konvergensvilkoren för Taylorska serien är enklare än den i § 19 och 20 gifna; men den Taylorska serien under formen (21) har det företrädet, att resttermen för reela funktioner låter förvandla sig i de kända medelvärdena (jfr § 19 *anm.* 1), hvilket icke är händelsen med de i (26) och (28) gifna uttrycken på resttermen.

(Forts.).

AFDELNING IV.

Studier öfver sista jernvägslånet.

Med anledning af sist förflutne riksdags beslut uppdrog Kongl. Maj:t de fullmäktige i riksgäldskontoret att för jernvägsbyggnadernas skull å statens vägnar upptaga ett lån af högst 40 000 000 riksdaler samt löpande med högst 5 procents ränta, som halfårsvis förfaller. Detta lån skulle återbetalas genom årlig amortering inom loppet af 40 år, ägande fullmäktige att sjelfve bestämma öfriga vilkor.

På grund häraf «upplade« riksgäldskontorets fullmäktige den 30 Sept. 1870 ett statslån å 40 000 000 rdr genom att låta allmänheten köpa statsobligationer, som betalas med 95,5 procent af deras nominela belopp (eller, som det heter, köparen åtnjöt $4\frac{1}{2}$ procents kapitalrabatt). Innehafvaren af en sådan obligation ägde sedan att hvarje halfår (den 30 Mars och den 30 Sept.) uppbära $2\frac{1}{2}$ procents ränta af det nominela beloppet mot aflemnande af en kupon (= ett obligationen åtföljande tryckt ränteqvitto). Tillika bestämdes att riksgäldskontoret å denna sin skuld ej skulle göra någon afbetalning förrän år 1876, men att från och med detta år annuiteten d. v. s. den sammanlagda årliga räntan och amorteringen (afbetalningen) skulle utgöra 2 450 000 rdr.

Dessa uppgifna data föranleda ett par problem. Innan vi gå att lösa dem, lemna vi här ett aftryck af en till ofvannämnda lån hörande statsobligation å 1000 rdr, till tjenst för dem, som ej varit i tillfälle att se en obligation. Obligationen utgör ett ark å 4 sidor. Ini densamma ligger ett halfark, innehållande kuponer d. v. s. tryckta ränteqvittenser, daterade den 30 mars och den 30 sept. 1870, 1871, 1872 - - - - 1910. Vid köpet af en obligation får köparen tillika dessa kuponer, men hvarje gång han lyfter en halfårsränta på sin obligation, måste han coupera (klippa af) ett sådant qvitto och lemna det i utbyte mot den erhållna räntan.

Första sidan af obligationen.

"Svensk Stats-obligation

å

Riksdaler 1000 Riksmynt

utgörande andel af det utaf 1870 års Riksdag beslutade och under Kongl. Maj:ts garanti stälda Amorteringslån af

Riksdaler 40,000,000 Riksmynt.

Litt. B. N:o 0000.

Rdr 1000 Rmt. Rdr 250 Silfver.

Innehafvaren af denna Obligation har uti ofvan nämnda Amorteringslån deltagit för en summa af

Riksdaler ETT TUSEN Riksmynt,

motsvarande

Riksdaler TVÅHUNDRAFEMTIO i Silfver,

och eger att derå uppbära *Fem* (5) procents årlig ränta, hvilken halfårsvis, den *30 Mars* och den *30 September*, till betalning förfaller och af **Riksgäldskontoret** erlägges emot återställande af den bland bifogade räntekuponer, som för halfåret gäller.

Det förskrifna kapitalet godtgöres i enlighet med härvid fogad, för hela lånet upprättad Amorteringsplan, utvisande det belopp, som från den 30 September 1875 skall årligen af Riksgäldskontoret amorteras, så att samma lån senast Fyratio år härefter blifver till fullo betaldt.

Den årliga amorteringen sker genom *uppköp* och *annulering* af obligationer, då dessa kunna erhållas till ett pris icke öfverstigande det i dem förskrifna kapital, men i annat fall genom *utlottning*, som inför Fullmäktige i Riksgäldskontoret, i närvaro af Notarius Publicus, verkställes första helgfria dag i Juli månad. Dervid utlottade obligationer förfalla till betalning den 30 nästföljande September.

Riksgäldskontoret förbehåller sig rätt att efter den 30 September 1885 uppsäga, antingen alla för detta statslån utgifna, då utelöpande obligationer till betalning Sex månader från uppsägningsdagen, eller ock endast en del af desamma; och skall i senare händelsen genom utlottning bestämmas hvilka obligationer komma att Sex månader från utlottningsdagen till betalning förfalla.

Kungörelse om de efter uppköp under året annulerade obligationer samt om verkstäld utlottning eller uppsägning införes ofördröjligen af Riksgäldskontoret i Sveriges officiella Tidning och i två andra dagliga Tidningar.

Obligation, som företes till inlösen, bör vara försedd med alla dertill hörande, icke förfallna räntekuponer, vid påföljd att eljest de felande kuponernas belopp innehålles.

Ränta å obligation, som är till inlösen förfallen, godtgöres ej längre än till och med förfallodagen. Har obligation eller räntekupon icke inom Tio år från dess förfallodag blifvit till inlösen företedd, upphör all rätt att derför erhålla betalning.

Stockholm den 30 September 1870.

På Riksgäldskontorets vägnar:

Henning Hamilton.

L. Kinnmanson.	*C. G. Hierta.*	*A. H. Fock.*
Sam. Warburg.	*A. A. Berger.*	*Hj. Holmgren.*
		C. G. Stuart."

«Räntan å denna obligation utgör för en dag 13,89 öre och för en månad 4 riksdaler $16\frac{2}{3}$ öre.«

Andra sidan.

"Kongl. Maj:ts nådiga Kungörelse, angående uppläggande af ett lån å högst Fyratio Millioner Riksdaler mot fonderade Statsobligationer i Svenskt mynt; Gifven Stockholms Slott den 20 Maj 1870.

Vi CARL, med Guds nåde, Sveriges, Norges, Göthes och Vendes Konung, göre veterligt: att, sedan senast församlade Riksdag, i underdånig skrifvelse den 13 innevarande månad, anmält, det Riksdagen beslutat uppläggandet af ett större inhemskt amorteringslån, och tillika anhållit, det Vi måtte å samma lån meddela Vår nådiga garanti;

så hafve Vi, som i fråga om nyss nämnda garanti vilje framdeles, uppå framställning af Fullmäktige i Riksgäldskontoret, meddela särskildt nådigt beslut, funnit godt att, på sätt Riksdagen tillika begärt, i nåder fastställa följande, i afseende på ifrågavarande upplåning, af Riksdagen beslutade stadganden, nämligen:

a) åt Fullmäktige i Riksgäldskontoret uppdrages att, till bestridande af de vid innevarande års Riksmöte beviljade anslag till Statens jernvägsbyggnader äfvensom för att bereda tillgång dels för blifvande anslag till jernvägsbyggnader, dels ock för inlösande af 1867 och 1869 års för jernvägsbyggnaderna upptagna lån, mot fonderade Statsobligationer i Svenskt mynt å ett sammanräknadt nominelt belopp af högst Fyratio Millioner Riksdaler samt löpande med högst 5 procent i ränta, som halfårsvis förfaller, upplägga ett lån, att återbetalas genom årlig amortering inom loppet af 40 år; egande Fullmäktige att icke allenast bestämma obligationernas valörer och försäljningspris, utan äfven i öfrigt vid upplåningen tillvägagå på det sätt, de finna lämpligast och med det allmännas fördel mest öfverensstämmande; dock må under åren 1870 och 1871 mot förenämnda obligationer icke upplånas större belopp än Åtta Millioner Femhundratusen Riksdaler;

b) i afseende på föryttrandet af återstående obligationsbeloppet ega kommande Riksdagar att för hvarje gång bestämma det belopp, som för året må i rörelsen utsläppas;

c) Penningar, som genom ifrågavarande upplåning inflyta, må icke användas för andra än de i mom. a) omförmälda ändamål;

d) Till ränteliqvider och kapitalskuldens amortering anvisas ett årligt anslag, motsvarande det belopp, som hvarje år erfordras för sagda liqviders och amorterings verkställande; börande detta anslag, till dess hela skulden blifvit i stadgad ordning betald, årligen af Riksgäldskontorets medel afsättas; samt

e) De uti nästföregående moment omförmälda ränte- och amorteringsanslag skola ingå till en särskildt redovisad liqvidations- och amortissementsfond, hvars behållning skall för det med dessa medel afsedda ändamål oförryckt tillhandahållas och användas, så att ränteliqviderna vid derför bestämda terminer varda ovilkorligen fullgjorda och skuldens betalning i föreskrifven ordning verkstäld; och skola de till liqvidations- och amortissementsfonden influtna medel, så vidt ske kan och denna fond åliggande liqvider medgifva, städse på säkert och ändamålsenligt sätt göras fruktbärande.

Det alle som vederbör hafve sig hörsamligen att efterrätta. Till yttermera visso hafve Vi detta med egen hand underskrifvit och med Vårt Kongl. sigill bekräfta låtit. Stockholms Slott den 20 Maj 1870.

CARL.

(L. S.)

Pehr Ehrenheim.

Transsumt af Kongl. Maj:ts nådiga bref till Fullmäktige i Riksgäldskontoret, angående meddelad garanti å det af 1870 års Riksdag beslutade amorteringslån samt inlösen i Landtränterierna och mottagning i uppbörden af Räntekuponer, tillhörande Obligationerna för detta lån.

CARL, med Guds nåde, Sveriges, Norges, Göthes och Vendes Konung. Vår ynnest — — — Sedan Vi den 20 nästlidna Maj, i sammanhang med utfärdande af nådig Kungörelse angående det lån å högst 40 Millioner Rdr, som, i följd af senast församlade Riksdags, uti underdånig skrifvelse den 13 i nämnda månad anmälda, af Oss faststälda beslut, skall uppläggas emot fonderade statsobligationer i Svenskt mynt, förklarat Oss vilja, uppå Eder framställning, meddela särskildt beslut i fråga om den af Riksdagen begärda nådiga garanti å samma lån; så — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Och hafve Vi dervid funnit godt att å det af Riksdagen beslutade lån, som, under iakttagande af de hos Oss nu anmälda bestämmelser i afseende på betalningsvilkoren för lånet och innehållet af de dertill hörande obligationer, kommer att af Eder uppläggas, meddela Vår nådiga garanti; hvarjemte Vi i nåder bifallit, att de till berörda obligationer hörande halfårsräntekuponer, när de till inlösen förfallit, må, en hvar med det deruti förskrifna belopp, icke allenast uti Landtränterierna, med undantag af Stockholms läns, inlösas i den mån Ränteriernas kassabehållningar sådant medgifva samt derefter vid skeende penningeremisser till Stats- eller Riksgäldskontoret insändas, utan ock vid uppbörden af de till Ränterierna ingående stats- och riksgäldsmedlen emottagas i afräkning å hvad de skattskyldige skola erlägga och sedermera i behörig ordning levereras, äfvensom att de räntekuponer, hvilka förfalla den 30

Mars det år, då uppbörden sker, jemväl må dervid emottagas, fastän de vid uppbördstiden ännu icke förfallit; — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — —

Stockholms Slott den 2 Augusti 1870.

CARL.

C. Fr. Wærn."

Tredje sidan.

Amorteringsplan

för det enligt 1870 års Riksdags beslut upplagda Statslån à 40,000,000 Rdr Rmt.

År.	Ränta.	Amortering.	Kapital-återstod d. 30 Sept.	År.	Ränta.	Amortering.	Kapital-återstod d. 30 Sept.
					Transport	12 659 500	
1876	2 000 000	450 000	39 550 000	1894	1 367 025	1 083 000	26 257 500
1877	1 977 500	472 500	39 077 500	1895	1 312 875	1 137 100	25 120 400
1878	1 953 875	496 100	38 581 400	1896	1 256 020	1 194 000	23 926 400
1879	1 929 070	520 900	38 060 500	1897	1 196 320	1 253 700	22 672 700
1880	1 903 025	547 000	37 513 500	1898	1 133 635	1 316 400	21 356 300
1881	1 875 675	574 300	36 939 200	1899	1 067 815	1 382 200	19 974 100
1882	1 846 960	603 000	36 336 200	1900	998 705	1 451 300	18 522 800
1883	1 816 810	633 200	35 703 000	1901	926 140	1 523 900	16 998 900
1884	1 785 150	664 900	35 038 100	1902	849 945	1 600 100	15 398 800
1885	1 751 905	698 100	34 340 000	1903	769 940	1 680 000	13 718 800
1886	1 717 000	733 000	33 607 000	1904	685 940	1 764 000	11 954 800
1887	1 680 350	769 700	32 837 300	1905	597 740	1 852 300	10 102 500
1888	1 641 865	808 100	32 029 200	1906	505 125	1 944 900	8 157 600
1889	1 601 460	848 500	31 180 700	1907	407 880	2 042 100	6 115 500
1890	1 559 035	891 000	30 289 700	1908	305 775	2 144 200	3 971 300
1891	1 514 485	935 500	29 354 200	1909	198 565	2 251 400	1 719 900
1892	1 467 710	982 300	28 371 900	1910	85 995	1 719 900	—
1893	1 418 595	1 031 400	27 340 500				
	Transport	12 659 500			Summa	40 000 000	

Fjerde sidan (innehållande utanskriften på obligationen).

"Svensk Stats-obligation

å

Riksdaler 1000 Riksmynt

med Fem procents ränta.

Litt. B. N:o 0000."

Vi öfvergå härefter till våra problem.

Problem 1. *Under förutsättning af $4\frac{1}{2}$ procents kapitalrabatt, hvad skall man betala för en statsobligation å nominelt belopp af 1000 rdr den 30 Dec. 1871?*

Svar: $(955 + \frac{3}{12} . 50)$ rdr $= 967{,}5$ rdr.

Man ihågkomme att en ränteliqvid egt rum den 30 Sept. 1871.

Problem 2. *Under antagande af en annuitet af 2 450 000 rdr under åren 1876—1909, huru stor är den sista annuiteten* (d. v. s. afbetalningen å statslånet år 1910)?

Med iakttagande af att ingen amortering äger rum åren 1871—5 och att således statsskulden 40 000 000 under dessa 5 år qvarstår oförändrad, finnes svaret ur eqvationen

$$a\,(1{,}05)^{35} = \frac{49a}{800}(1{,}05)^{34} + \frac{49a}{800}(1{,}05)^{33} + \ldots + \frac{49a}{800}(1{,}05) + x\,,$$

hvarest

$$a = 40\,000\,000\,,$$

$$x = \text{den sökta annuiteten under år } 1910,$$

$$\frac{49}{800} = \frac{2\,450\,000}{40\,000\,000}\cdot$$

Denna eqvation gifver i det närmaste

$$x = 1\,805\,870\,.$$

Enligt riksgäldskontorets fullmäktiges amorteringsplan åter är

$$x = 1\,805\,895 \quad (= 85\,995 + 1\,719\,900).$$

Skilnaden 25 rdr beror derpå, att i praktiken är man tyungen att låta annuiteterna något variera än öfver än under medelannuiteten, emedan alla amorteringar måste ske i jemna hundratal, alldenstund de ske genom att återköpa obligationer, hvilka äro stälda på jemna hundratal. Den variation i annuiteten, som på grund häraf varit af nöden, har riksgäldskontorets fullmäktige serdeles lyckligt utfört, i det att de dels sökt göra den så liten som möjligt, dels ock uppfylt villkoret, att medelannuiteten skall vara 2 450 000 rdr. Enligt amorteringsplanen är nämnligen

$$\text{medelannuiteten} = \frac{45\,105\,910 - 1\,805\,895}{34} = 2\,450\,000\tfrac{15}{34}.$$

Anm. 45 105 910 = summan af samtlige räntor och amorteringar under åren 1876—1910,

1 805 910 = räntan och amorteringen under år 1910.

Problem 3. *Huru stor procent betalar i sjelfva verket staten för detta lån å 40 000 000 rdr, om ofvanstående amorteringsplan med en medelannuitet af 2 450 000 rdr iakttages*, d. v. s. att den i amorteringsplanen uppgifna årsräntan betalas till hälften den 30 Mars och till hälften den 30 Sept.; amorteringen deremot sker endast den 30 Sept. Tillika antages att $4\frac{1}{2}$ procents kapitalrabatt lemnas åt köparne.

Lösning. Kalla kapitalet 40 000 000 för a

och $\frac{5}{200}$ för k

samt 2 450 000 $= na =$ annuiteten.

Då ske utbetalningarne på följande sätt.

År.	Utbetalning d. 30 Mars.	Utbetalning d. 30 Sept.	Amortering d. 30 Sept.	Kapitalåterstod d. 1 Okt.
1871.	ka	ka	—	a,
1872.	ka	ka	—	a,
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1875.	ka	ka	—	a,
1876.	ka	$(n-k)a$	$(n-2k)a$	$(1+2k-n)a$,
1877.	$[k(1+2k)-kn]a$	$[n(1+k)-k(1+2k)]a$ ..	$(n-2k)(1+2k)a$ ..	$\left[(1+2k)^2-n.\frac{(1+2k)^2-1}{2k}\right]a$ $=\frac{n-(n-2k)(1+2k)^2}{2k}\cdot a$,
1878.	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^2}{2}\cdot a$ ..	$\frac{n+(n-2k)(1+2k)^2}{2}\cdot a$ ...	$(n-2k)(1+2k)^2 a$ ...	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^3}{2k}\cdot a$,
1879.	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^3}{2}\cdot a$ ..	$\frac{n+(n-2k)(1+2k)^3}{2}\cdot a$ ...	$(n-2k)(1+2k)^3 a$ ...	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^4}{2k}\cdot a$,
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1909.	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^{33}}{2}\cdot a$ ..	$\frac{n+(n-2k)(1+2k)^{33}}{2}\cdot a$ ..	$(n-2k)(1+2k)^{33}.a$ ..	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^{34}}{2k}\cdot a$,
1910.	$\frac{n-(n-2k)(1+2k)^{34}}{2}\cdot a$ ..	$1\,719\,900+\frac{85995}{2}$	1 719 900	0.

Anm. Uttrycken i första kolumnen från och med 1876 erhållas genom att med k multiplicera kapitalåterstoden i sista kolumnen för nästföregående år.
. . . . andra . . . . erhållas genom att från na subtrahera uttrycken i den första kolumnen.
. . . . tredje . . . . utgör skilnaden mellan uttrycken i andra o. första kolumnen.
. . . . fjerde . . . . erhållas genom att från ett uttryck i fjerde kolumnen subtrahera det uttryck i tredje kolumnen, som hör till närmast följande år.

Siffertalen för året 1910 fattas genom att studera fullmäktiges amorteringsplan för 1910. I st. f. 1 719 900 + $\frac{85995}{2}$ kan man ock skrifva $\frac{705159}{16\,000\,000}\cdot a$.

Förestående alla utbetalningar af riksgäldskontoret med ränta på ränta för hvarje halfår ända till 1910 den 30 Sept. böra vara lika med hvad riksgäldskontoret uppburit, d. v. s. med $0{,}955a$ förräntadt med halfårlig ränta på ränta till samma tid allt efter den för oss ännu obekanta procent, efter hvilken penningarne i detta lån verkligen förräntas. På grund häraf får man följande eqvation, der med r menas värdet af 1 rdr, sedan den blifvit förräntad $\frac{1}{2}$ år efter den i fråga varande räntefoten:

$$
\begin{aligned}
0{,}955r^{80} &= kr^{79} + kr^{78} + \ldots + kr^{69} + (n-k)r^{68} \\
&+ \frac{n-(n-2k)(1+2k)}{2}\cdot r^{67} + \frac{n+(n-2k)(1+2k)}{2}\cdot r^{66} \\
&+ \frac{n-(n-2k)(1+2k)^2}{2}\cdot r^{65} + \frac{n+(n-2k)(1+2k)^2}{2}\cdot r^{64} \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{n+(n-2k)(1+2k)^{33}}{2}\cdot r^2 \\
&+ \frac{n-(n-2k)(1+2k)^{34}}{2}\cdot r + \frac{705159}{16\,000\,000} \\
&= k.r^{69}\cdot\frac{r^{11}-1}{r-1} + \frac{n}{2}\cdot r\cdot\frac{r^{68}-1}{r-1} + \frac{(n-2k)\left[r^2-(1+2k)r\right]}{2} \\
&\qquad \times \frac{r^{68}-(1+2k)^{34}}{r^2-(1+2k)} + \frac{705159}{16\,000\,000}.
\end{aligned}
$$

Hyfsas denna eqvation i afseende på r och införas sedan värdena på k och n, får man följande eqvation:

$$
\begin{aligned}
1528r^{83} - 1568r^{82} - 1604{,}4r^{81} + 1646{,}4r^{80} - 18r^{71} + 18{,}45r^{70} + 25{,}764232r^3 \\
-26{,}4083706r^2 + 72{,}2358336r - 74{,}045695 = 0.
\end{aligned}
$$

Löst genom försöksmetoden (underhjelpt af t. ex. Newtons approximationsmetod) med användande af 10-siffriga decimaler gifver denna eqvation

$$r = 1{,}0262.$$

Staten betalar således 2,62 procent hvarje halfår på detta sitt lån eller 5,31 för helt år.

Man har nämnl. 2,62 + 2,62 . 1,0262 = 5,31.

Problem sådana som detta hafva de af riksdagen tillsatte revisorerne öfver statsförvaltningen att lösa nästan hvarje år.

F. W. Hultman.

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1870.

För latinlinien.

1. Bevisa, att bissectricerna till de inre vinklarne i en 4-hörning bilda en 4-hörning, som kan inskrifvas i en cirkel.

2. Korstruera en triangel, då basen och den inskrifna cirkelns radie äro gifna.

3. En rät linie är gifven. Att dela den i 2 delar, att den ena delen kan vara diagonal, den andra delen sida i samma qvadrat.

4. Att förvandla en trapezoid till liksidig triangel.

5. Att inskrifva en gifven qvadrat i en annan gifven qvadrat.

6. Att i en liksidig triangel inskrifva en rektangel, hvilkens ena sida är dubbelt så stor som den andra.

7. Att på en gifven rät linie upprita en rätvinklig triangel, så att perpendikeln, som fälles från den räta vinkelns spets mot hypotenusan, af henne skär ett stycke, lika stort med en af kateterna.

8. En cirkel och en rät linie äro gifna. Man vill i cirkeln inskrifva en rektangel, hvars perimeter är lika med den gifna linien.

---

9. Om 100 skålp. hafsvatten innehålla 2,7 skålp. koksalt, frågas: hur många skålp. färskt vatten skall man hälla till 150 skålp. hafsvatten, för att 100 skålp. af blandningen må innehålla 0,9 skålp. koksalt?

10. En person tillfrågad om sin ålder svarade: "om man till det tal, som uttrycker min ålder adderar 9 samt från samma tal subtraherar 2, finner man tvenne tal, hvilkas qvadratrötters differens är enheten. Huru gammal var han?

11. Dela talet 6 i två delar, så att summan af deras kuber blir ett minimum.

12. En triangels sidor förhålla sig sinsemellan som talen 2, 3, 4. Triangelns yta är 24 qvadratalnar. Huru stora äro dess sidor.

13. En månglerska som köpt ett parti äpplen efter 4 öre för 3 stycken, säljer detsamma efter 7 öre för 4 stycken. Hela hennes vinst blir derigenom 75 öre. Huru många äpplen hade hon köpt?

14. En rät linie skär 2 parallela linier under half rät vinkel. Stycket af densamma mellan de parallela linierna är 4 alnar. Huru stor är radien till den cirkel, som tangerar både den skärande linien och de parallela?

För reallinien.

15. Att skära en rät linie i fyra delar så att den första delen har till den andra en duplicerad proportion af den, som den andra har till den tredje; och den andra delen har till den tredje en duplicerad proportion af den, som den tredje har till den fjerde.

16. Bevisa att 2:ne 4-hörningar äro lika stora om deras diagonaler äro lika stora och bilda lika vinklar.

17. Att från ena vinkeln af ett paralleltrapezium draga en rät linie, som delar trapeziet midt i tu.

18. Att i en 4-hörning inskrifva en romb, hvars sidor äro parallela med 4-hörningens diagonaler.

19. Att konstruera en rätvinklig triangel, då en spetsig vinkel och öfverskottet, hvarmed snmman af kateterna öfverskjuter hypotenusan, äro gifna.

20. Att från en punkt utanför en cirkel draga en rät linie, som af cirkelns periferi delas så, att rektangeln af hela linien och den ena delen blir lika med qvadraten på den andra delen.

21. Att genom en punkt utom en sfer lägga ett plan, hvars afskärning af sferen får en gifven radie.

---

22. Två resande äro på 33 mils afstånd från hvarandra och fara hvarandra till mötes. Den ene tillryggalägger på första timmen 1 mil och under hvarje följande timme $\frac{1}{20}$ mil mera än under den närmast föregående. Den sednare färdas hvarje timme $1\frac{3}{4}$ mil. När och hvar mötas de?

23. En person köper the för 120 rdr. Hade han för denna summa fått 6 skålp. mera, än han fick, så hade skålp. kostat honom 1 rdr mindre än det nu kostade. Hur många skålp. köpte han?

24. Under tiden från och med den 1 Juli till och med den 10 i samma månad steg termometern hvarje dag $\frac{1}{2}$ grad. Aritmetiska mediet af alla dagarnes termometerstånd utgjorde 19 grader. Hvilket gradtal visade termometern den 1 Juli?

25. Ett samhälle har lånt 1000000 rdr. Hur stor annuitet bör det betala för att på 29 år amortera sin skuld? Räntan beräkuas efter 5 procent.

26. Tre sferer hafva radierna 5, 6 och 7 fot. Hur stor är radien till den sfer, hvilkens volum är lika med volumen af dessa 3 sferer?

27. Sök de tal som satisfiera

$$x - y = 211,$$

$$\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y} = 1.$$

28. Huru stor är ytan af en triangel, i hvilken tvenne sidor, som omfatta en vinkel af 137° 35′ äro 10 och 100 fot?

---

29. Ett kärl af 1 kubikfots rymd innehåller luft, hvars elektricitet, liksom den yttre atmosferens, mätes af en 25,6 tum hög qvicksilfverpelare. Kärlet är tillslutet medelst en ventil, hvars vigt är 25 skålp. och genomskärningsarea 1 qvadrattum. Bestäm, huru många skålp. luft måste i kärlet införas, för att ventilen må nätt och jemnt lyftas. Luftens temperatur är 30°, dess utvidgningskoefficient* $\frac{1}{273}$; *qvicksilfrets egentliga vigt 13,6; vigten af 1 kub.fot vatten 61,5 skålp. och af 1 kub.fot luft under normala förhållandet 8 ort.*

30. En rätvinklig parallelipiped af is, hvars längd är 2 alnar och bredd 5 fot, flyter i vatten med sin öfre yta horizontel, som dervid befinner sig 2 tum ofvanom vattenbrynet. Hur många kannor vatten af 4° erfordras för att smälta detta isstycke? Isens egentliga vigt är $\frac{9}{10}$, *dess smältningsvärme* $79\frac{1}{4}$.

31. Från den öfre af två i samma lodlinie, på 100 fots afstånd från hvarandra, belägna punkter nedsläppes en kropp på samma gång som en annan med 50 fots hastighet slungas lodrätt i höjden från den andra punkten. Hvar sammanträffa de två kropparne, förutsatt att intet luftmotstånd funnes?

32. I sin ena ända begränsas en smal glasstång af en utåt bugtig sferisk yta och träffas derstädes af parallelt med den optiska axeln infallande ljusstrålar, hvilka sedermera sammanbrytas till en enda på den ifrågavarande axeln belägen punkt. Sök afståndet mellan denna punkt och begränsningsytan, hvars radie antages vara $3\frac{3}{4}$ *tum. Glasets brytningsindex är 1,6.*

33. En jemntjock och homogen bordskifva af 4 skålp:s vigt har form af en qvadrat och uppbäres i en punkt af sin yta. Från hvart och ett af de fyra bordshörnen hänga i ordning vigterna 1, 3, 5, 7 skålp. Angif, huru stora afstånden från understödspunkten till sidorna (1, 7) och (5, 7) böra vid horizontalt jemnvigtsläge vara, då qvadratens sida är 2 fot.

34. Man har tolf alldeles lika galvaniska par. Man sammansätter först halfva antalet till en stapel af sex par och förenar medelst två metalltrådar polerna med en af syradt vatten fylld voltameter, i hvilken platinablecken stå en half tum från hvarandra. Strömmen utvecklar då 1 kubiktum knallgas i minuten. Derefter gör man af alla paren en stapel af tolf par, fördubblar poltrådarnes längd, ökar afståndet mellan voltameterns platinableck till en tum, och förenar så stapeln med voltametern. Huru mycken knallgas utvecklas nu på tre minuter?

35. På en ort, der jordmagnetismens hela styrka uppgår till 4,92 och inklinationsvinkeln är 71°, behöfver en gifven, kring vertikallinien rörlig magnetnål 4,6 sekund för hvarje svängning. Angif nålens svängningstid för den ort, der jordmagnntismens horizontela komposant är 1,8.

---

* Skriffel för *elasticitet.*

Fig. 30.

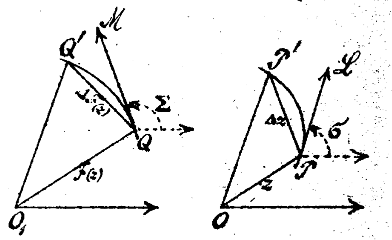


Fig. 31.

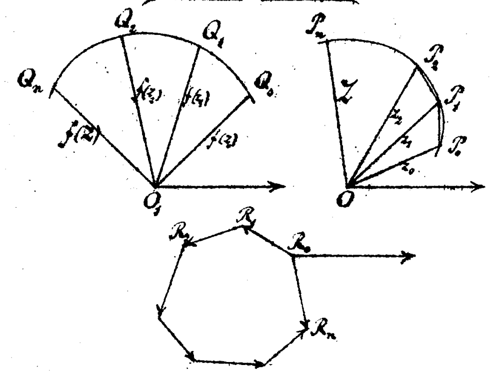


Fig. 35.

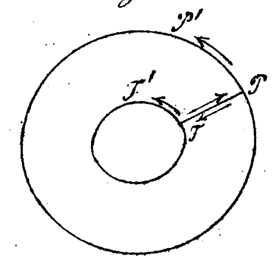


Fig. 32.

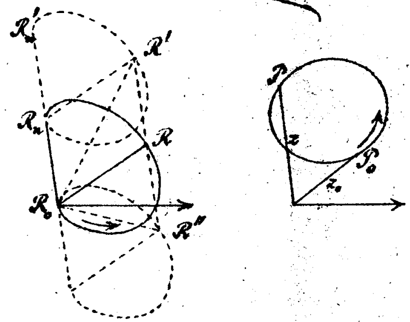


Fig. 33.

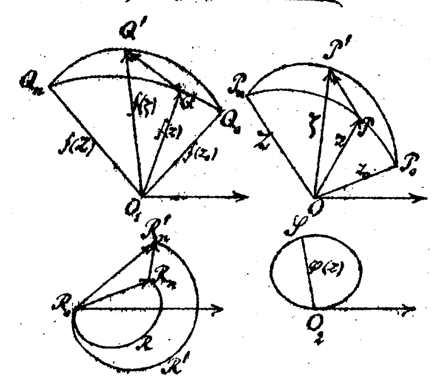


Fig. 34.

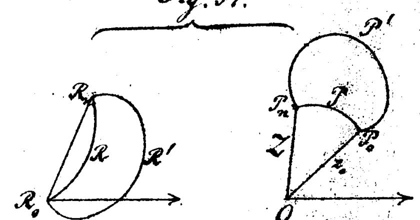


Fig. 36.

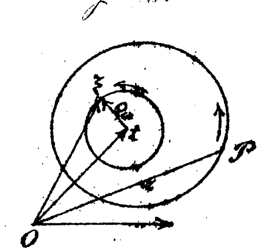
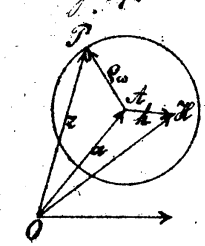


Fig. 37.



Nya böcker.

1. *Guldberg, A. S.* Räknesätten och deras tillämpning, öfversättning af Dieterich. Stockholm 1869. 75 öre.

2. —— Matematikens betydning og anvendelse, fem populære foredrag. Kristiania 1870. 1: 50.

3. *Relander, J. R.* Elementarkurs i räkning, omfattande läran om bråk jemte dess tillämpning på regula de tri, bolags- och bytesräkning. Wiborg 1870. 1: 12. Inbunden.

4. *Sievers, P. Fr.* Räknebok för flickor. Stockholm 1871. 75 öre inbunden.

5. *Wiemer, A.* Elementerna i Geometri. 1. Planimetri. Andra uppl. 2 rdr. Kalmar 1870.

6. *Guthrie.* The laws of magnitude or the elementary rules of arithmetic and algebra demonstrated. London 1870. 5 rdr.

7. *Bienenfeld.* Auflösung der Aufgaben Sammlung aus der Algebra v. Meier Hirsch. Würzburg 1870. 2 rdr.

8. *Prisi.* Unterricht in d. Algebra mit 1500 Aufgaben. 1 Th. 1: 75.

9. *Baltzer.* Elemente der Mathematik. Planimetrie. Leipzig 1870. 5: 50.

10. *Frischauf.* Elemente der Geometrie. Graz 1870. 2: 40.

11. *Harris.* Kuklos (quadratura circuli). Montreal 1870. 10: 50.

12. *Ziegler.* Trigonometrie. München 1870. 1 rdr.

13. *Jochens.* Trigonometrische Aufgaben. Berlin 1870. 1: 15.

14. *Gauss.* Fünfstellige Logaritm- u. Trigonometrische Tafeln. Berlin 1870. 1: 90.

15. *Stampfer.* Logarithmisch Trigonometrische Tafeln (6 decimaler). Wien 1871. 1: 90.

16. *Curtze.* Die mathematische Schriften des Oresme (1320—1382). Berlin 1870. 1: 15.

17. *Bretschneider.* Die geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870. 3: 75.

18. *Frischauf.* Analytische Geometrie. Graz 1871. 2: 40.

19. *Spitz.* Differential- u. Integralrechnung. Leipzig 1871. Erste Liefer. 4: 15.

20. *Schlömilch.* Übungsbuch zum Studien d. höheren Analysis. 2 Th.: Aufgaben aus d. Integralrechn. Leipzig 1870. 5: 50.

21. *Cremona.* Oberflächen, ins Deutsche übersetzt vom Curtze. Berlin 1870. 7: 40.

22. *Weyr.* Regelflächen dritter Ordnung. Leipzig 1870. 3: 75.

23. *König.* Modulargleichungen d. elliptischen Functionen. Heidelberg 1871. 60 öre.

24. *Baltzer.* Determinanten. 3 Auflage. Leipzig 1870. 4: 65.

25. *Lejeune-Dirichlet.* Zahlen-Theorie. 2 Auflage. Braunschweig 1871. 4: 15.

26. *Goldberg.* Rest und Quotient-Rechnung. Hamburg 1871. 5: 50.

27. *Müller.* Die Keplerschen Gesetze, eine neue element. Ableitung derselben. Braunschweig 1870. 1: 40.

28. *Reusch.* Constructionen zur Lehre v. d. Haupt- uud Brennpunkten eines Linsensystems, mit fümf lithogr. Tafeln. Leipzig 1870. 2: 75.

29. *Duhamel.* Des méthodes dans les sciences de raisonnement. IV: Applic. à la science des forces. Paris 1870. 6 rdr.

30. *Wolf.* Handbuch d. Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Erster Band. 11: 35.

31. *Karup.* Theoretisch-Praktisches Handbuch d. Lebensversicherung. 3 Lieferungen. 4: 70.

32. *Aebsch* u. *Neumann.* Mathematische Annalen. Leipzig 1870. Erster Band. 14: 75.

Politisk sifferlek.

Ludvig Filip, konung 1830—1848 = 18 år.
Ludvig Filip född 1773, siffersumman = 18.
Hans gemål „ 1782, „ = 18.
Förmälda 1809, „ = 18.

Ludvig Napoleon, kejsare 1853—1870 = 17 år.
Ludvig Napoleon född 1808, siffersumman = 17.
Hans gemål „ 1826, „ = 17.
Förmälda 1853, „ = 17.

Beräkna sannolikheten af en sådan dubbelhändelses inträffande.

Till vår Allmänhet.

Denna tidskrift har med 1870 års utgång upplefvat sitt tredje år. Liksom under de båda föregående åren vilja vi äfven detta år kasta en blick tillbaka på tidskriftens verksamhet under det senast förflutna året.

På det elementära området möta vi först en uppsats af Dillner om det ofta behandlade ämnet: "*jämnlöpande linier*". Förf. har sökt att ställa sig på en säkrare grundval än hans föregångare derigenom att han utgått från begreppet "vridning" — ett ursprungligare begrepp än begreppet "vinkel". — Synnerligen förtjenstfull anse vi lektor Björlings (senior) uppsats *om de reguliera polyedrarne* (= de s. k. platonska kropparne d. v. s. de reguliera 4-, 6-, 8-, 12- och 20-planingarne) för den enkelhet, likformighet och stränghet han ådagalagt vid härledningen af dessa kroppars konstruktion samt vid bevisen. Att dessa polyedrar verkligen kunna finnas till, följer af de sätt, hvarpå de uppritas.

Den afhandling jemte bifogad teckning om den stora pyramiden i Gizeh, hvilken prof. Wackerbarth meddelat, har ett stort kulturhistoriskt intresse. Ett sådant bör också finnas, särskildt för oss svenskar, i vår redogörelse för Peder Månssons (1514), Anders Bures och Stjernhjelms matematiska skrifter, hvilka hittills ej varit tryckta. Vi finna här bland annat, hvilken kraftig vägbrytare Stjernhjelm varit äfven på det matematiska området.

På den lärda afdelningen ha vi haft nöjet mottaga skarpsinniga uppsatser af prof. Steen i Köpenhamn och af studenten Leffler angående differentialeqvationens integration jämte geometriska tillämpningar derå. Docenten Falk har visat att kurvaturlinierna på developpabla ytor äro af två slag, hvilkas tangenter äro vinkelräta emot hvarandra. — För kedjebråk med omvexlande positiva och negativa leder har doc. Falk lemnat ett enkelt konvergenskriterium. — Löjtnant Almqvist har lemnat en deduktion af sinus- och kosinus-serierna utmärkt genom sin generela och stränga hållning. En vacker seriesummering har ock blifvit lemnad af en förhoppningsfull ung matematiker Åkerlund vid Gefle läroverk.

Icke mindre än tvänne värdefulla uppsatser om sättet att finna volymen af ett revolutionssolidum ha förekommit. I den ena af studenten Boije af Gennäs uttages volymen på ett revolutionssolidum, då alstringskurvan är hänförd till polarkoordinater. I den andra af lektor Phragmén beräknas volymen med tillhjelp af längden på den väg, som den roterande plana ytans tyngdpunkt beskrifvit (Guldins teorem). Den senare uppsatsen förtjenar uppmärksamhet för det att beviset är elementärt.

Dillners uppsats — *grunddragen af den geometriska kalkylen* — har fortgått till en allt större omfattning. Det enkla sätt, hvarpå här bevisas, att hvarje eqvation har en rot, äfvensom den storartade generaliseringen af det sturmska teoremet kan ej undgå att slå an. Denna uppsats har också blifvit uppmärksammad både i Tyskland och Frankrike.

Liksom under de föregående åren ha en mängd satser blifvit inlemnade till tidskriften, äfvensom en mängd böcker granskade.

Å prisuppgiften 1 på elementarafdelningen för år 1870 har under året ingen lösning inkommit, samt å prisuppgiften 2 endast en lösning (från *Padua* i Italien). Detta missförhållande häntyder på, att prisuppgifterna varit antingen för svåra eller ock ej tilldragande.

Afdelningen III för fysik har i följd af ogynnsamma omständigheter detta år varit mindre representerad. Vi hoppas dock att under nästa år kunna glädja vår allmänhet med åtskilliga uppsatser äfven på denna afdelning.

Inneslutande oss i vår allmänhets välvilja skola vi söka att efter samma plan som hittills och efter bästa förmåga medverka till att allt vidare sprida intresset för matematiska studier, och skola vi för detta ändamål söka att hålla tidskriften så elementär som möjligt.

Stockholm, nyåret 1871.

F. W. Hultman.