TIDSKRIFT

FÖR

MATEMATIK OCH FYSIK,

TILLEGNAD

DEN SVENSKA ELEMENTAR-UNDERVISNINGEN,

UTGIFVEN AF

D:R GÖRAN DILLNER
ADJUNKT I MATEMATIK VID UPSALA AKADEMI
(HUFVUDREDAKTÖR),

D:R FRANS W. HULTMAN
LEKTOR VID STOCKHOLMS HÖGRE ELEM.-LÄROVERK.

D:R T. ROB. THALÉN
ADJUNKT I FYSIK VID UPSALA AKADEMI.

FÖRSTA ÅRGÅNGEN.

1868.

MED SEX TAFLOR.

UPSALA,
W. SCHULTZ.

UPSALA.
W. Schultz' boktryckeri, 1868.

Till vår Allmänhet.

Snart har jorden fulländat ett kretslopp, sedan första häftet af denna tidskrift utkom. Det är då i sin ordning, att vi kasta en blick tillbaka på tidskriftens verksamhet under det nu förflutna året för att deraf bedöma hennes karakter.

I ögonen fallande äro den mängd satser, hvilka till stor del blifvit lemnade af ynglingar vid elementarläroverken, och på hvilka äfven en mängd lösningar inkommit, ehuru utrymmet ej tillåtit att deraf intaga mer än ett ringa antal. Om än några måhända finna det tröttande att läsa dylika lösningar, så bör det deremot för andra kännas ljuft att på detta sätt kunna lemna bidrag till tidskriften. I allmänhet väcker ju ett arbete, som man sjelf gjort, större nöje än det, som en annan gjort.

Bland afhandlingar, som för undervisningen böra vara synnerligen värdefulla, räkna vi HOLMGRENS *om den elementära framställningen af maxima och minima*, DILLNERS *om isoperimetriska produkters maxima och minima*, samt den senares afhandling *om grunddragen af den geometriska kalkylen.* Här får man ej glömma PHRAGMÉNS och D—GS geometriska tolkningar af ett par satser i trigonometrien. Inom mekaniken anse vi oss böra påpeka tvenne uppsatser för undervisningen, nämnligen DILLNERS bevis för *kraftparallelogrammen* och THALÉNS framställning af läran om *enkla pendeln.* Utrymmet medgifver ej att anföra öfriga hit hörande uppsatser.

Genom de historiska uppsatserna har tillfälle blifvit beredt att för en stund lyssna på den både såsom vetenskapsman och såsom menniska utmärkte fysikern FARADAY's föreläsningar, då han uppdagar nya, hittills obekanta, hemligheter i naturen. Genom dessa uppsatser har man fått tillträde till den berömde lord ROSSE's palats och verkstad för att derifrån betrakta nya verldar, förut ej skådade af menskligt öga. Genom dessa har man ända från dess början för omkring 250 år sedan fått följa det aritmetiska studiets utveckling i vårt land. Vi hafva äfven dervid fått göra bekantskap med de främmande och svenske män, till hvilka vi i detta afseende stå i stor förbindelse.

På den fysiska afdelningen finna vi en redogörelse för några af nutidens märkligare uppfinningar. Vi erinra härvid om DELEUILS luftpump och om THEORELLS registreringsapparat för barometer- och termometerobservationer.

Genom uppsatsen om bicellen hafva vi sökt ådagalägga, huru matematiken kan bidraga att uppvisa sanningen af den välbekanta satsen: »allt har DU ordnat i mått och tal och vigt» *.

Den diskussion, som uppstått med anledning af under året utkomna arbeten, bör ej vara utan värde för kommande författare och för allmänheten.

Slutligen har tidskriften, genom att redogöra för de i mogenhetsexamina vid elementarläroverken gifna satserna och genom att införa de bästa lösningarna af dessa, sökt dels att gifva ett begrepp om ståndpunkten af de matematiska och fysiska studierna vid våra läroverk och dels att uppmuntra ynglingarne till fortsatta framsteg.

Den i tidskriftens första häfte upptagna prisuppgiften har framkallat en liflig verksamhet. Från många håll i Sverige hafva inkommit lösningar; såsom en synnerligen intressant företeelse må nämnas, att en af dessa är gifven af ett fruntimmer. Äfven från Norge hafva vi haft glädjen emottaga en lösning. Vi hoppas att ännu få emottaga åtskilliga före nyåret.

Utan tvifvel skall en granskare efter denna öfverblick finna mycket att anmärka. *En* förtjenst bör han dock upptäcka hos tidskriften — hennes varma hängifvenhet för det matematiska och fysiska studiets allt vidare utbredande i vårt land.

Tidskriftens program blifver för nästa år oförändradt. Vi tacka för det förflutna året. Under förhoppning, att hvar i sin stad genom bidrag med större eller mindre lättfattliga uppsatser, anmärkningar och granskningar understöder vårt företag, börja vi tillitsfullt det nya kretsloppet. Vi anhålla att fortfarande få vara inneslutne i vår Allmänhets välvilja.

* "Omnia in mensura, et numero, et pondere disposuisti".

F. W. HULTMAN.

Innehåll.

Afdelning I.

Afdelning II.

AFDELNING III.

AFDELNING IV.

AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

I det följande ämna vi framställa en, så vidt möjligt, fullständig redogörelse för de läroböcker i aritmetiken, hvilka blifvit utarbetade af svenskar från äldsta tider till den närvarande, och dervid visa, huru aritmetiken utvecklat sig till sin nuvarande ståndpunkt, samt angifva när tecken, när decimaler började införas, när man började lägga vigt på att ej allenast minnet, utan äfven förståndet fattade de i böckerna meddelade reglerna. Det är tillika af ej ringa intresse att betrakta naturen af de problem, hvarmed läroböckerna under olika tidehvarf sysselsatt sig. Exemplen i de äldsta räkneböckerna beröra vanligen härförare med deras krigshärar, mytologiska guddomligheter (Herkules, Pallas, Edipus, m. fl.), bibliska personligheter och tilldragelser (Moses, Daniel, syndafloden, förföljelser mot judar), lagfrågor af kinkig natur, m. m. Dessutom äro exemplen, att jag så må säga, ganska skarpt färglagda genom en mängd omständigheter, hvilka ej hafva det ringaste att göra med deras aritmetiska lösning. Vissa exempel genomgå en hel följd af räkneböcker t. ex. de om Hieros krona och Augias' stall. Vi skola vid redogörandet för de olika författarne framställa ett och annat exempel, för att gifva en lifligare föreställning om läroböckernas och tidens ståndpunkt.

Som vi skola få se, innehålla de äldsta svenska läroböckerna vanligen regler, på hvilka man skulle blindt tro. Att begripa dem ansågs sannolikt öfvergå sundt förnuft. Sjelfva författarne höllos utan tvifvel för rigtiga trollkarlar eller åtminstone som menniskor utrustade med synnerligen ovanligt förstånd. Ofta inledas nämligen räkneböckerna af verser på latin och grekiska, hvilka till författarnes ära blifvit skrifna af professorer vid universiteten. Sina utgifna läroböcker tillegna författarne vanligen furstar, landshöfdingar, biskopar och andra rikets herrar.

Det är tydligt, att innehållet af läroböcker med obegripliga eller svårfattliga regler endast med svårighet kan bana sig väg till en större allmänhet. Liksom i medvetande häraf hafva de svenska författarne, utom den skriftliga räkningen med siffror, i läroböckerna äfven framstält ett annat (sannolikt mycket gammalt) sätt att verkställa de i praktiska lifvet förekommande räknefrågorna, nämligen medelst ett slag af enkla räknemaskiner, hvilka bestodo af linier, belagda med s. k. räknepenningar. I flertalet af de på 1600-talet utgifna läroböckerna utföras alla räknesätt också med räknepenningar.

Innan vi öfvergå till de af svenska författare utgifna läroböckerna, skola vi redogöra för tvenne utländska, hvilka synas hafva utöfvat ett stort inflytande på våra. Dessa båda utländska arbeten äro författade, det ena af *Ramus*, det andra af *Clavius.*

P. RAMUS (Pierre La Ramée).

Det arbete af Ramus, till hvilket vi haft tillgång *, är utgifvet efter hans död af Stadius och har till titel: *Petri*

* Härmed begagnar jag tillfället att till kongl. bibliotekarien Klemming och kongl. bibliotekets öfriga tjenstemän frambära min hjertligaste tacksägelse för den beredvillighet, hvarmed de tillhandahållit för mig behöfliga böcker och meddelat mig önskade upplysningar.

Rami professoris regii Arithmeticæ libri duo, a Jo. Stadio, Regio et Rameæ professionis Mathematico, recogniti et illustrati. Parisiis 1581. 96 sidor 8:o *.

Första boken behandlar frågor hörande till hela tal, bråk och sorter; den andra innehåller en vidlyftig teori om regula de tri, alligationsräkning samt geometriska serier.

Första boken.

I afseende på siffrornas namn förtjenar det att anmärkas, att han kallar nollan för »*circulus.*»

Såsom exempel på *addition* har han bland andra följande: »*om någon frågar för huru länge sedan Homerus*

---

* Ur *Firmin Didot's Nouvelle biographie générale. Paris 1862* hemta vi nedanstående biografiska underrättelser om Petrus Ramus. Ramus var född 1515 i Cuth i Vermandois och mördades på det parisiska brölloppet 1572 den 26 Aug. Fadren var en fattig arbetare. Sonen Pierre hade att utstå en stor kamp för att under sina studier ej blifva öfverväldigad af fattigdomen. Då han vid 21 års ålder aflade sin examen, försvarade han på ett lysande sätt en af honom mot den peripatetiska skolan (till hvilken hans lärare hörde) utgifven sats: "*quæcunque ab Aristotele dicta essent, commentitia esse*" (allt hvad Aristoteles har sagt är falskt). Derefter undervisade han i filosofi och angrep skarpt skolastiken med alla dess onyttiga finesser, sökte reformera logiken och bildade en särskild skola, som efter honom kallades *den rameiska.* År 1544 blefvo hans skrifter fördömda och han sjelf förbjöds att undervisa i filosofi. Detta förbud återtogs år 1547, och fyra år senare (1551) blef han professor i filosofi och vältalighet vid Collége royal. Här föreläste han de första 8 åren grammatik, retorik och logik. Men efter Henrik II:s död 1559 egnade han sig åt matematiken och öfvergick samtidigt från katolicismen till kalvinismen. Ifrån denna stund var hans lif ständigt utsatt för förföljelser. Då kalvinisterna blefvo förjagade från Paris, erhöll han en fristad i Fontainebleau, men flydde sedan hit och dit, tills han efter freden i Amboise 1563 återfick sin professorsstol. Derpå studerade han teologi, kom på nytt med i de borgerliga krigen och återvände 1568 till Paris. Nu begärde han afsked och besökte de flesta europeiska universitet (Strassburg, Basel, Zürich m. fl.). Han återkallades till Paris för tredje gången 1570 efter freden i S:t Germain en Laye. Såsom kalvinist fick han dock ej vidare föreläsa. I stället offent-

lefde, och Gellius svarar, att han lefde 160 år före Roms grundläggning, hvilket skedde 752 år före Kristi födelse, hvilket åter inträffade för 1567 år sedan; hvad skall man svara?

Vid *subtraktion*, hvilket räknesätt han kallar *subductio*, verkställer han subtraktionerna från venster till höger eller i motsatt ordning emot hvad man nu brukar. Resten sattes *ofvan* minuenden. Ex.: Från 432 skall borttagas 345. Hvad återstår? Räkningen utföres sålunda:

---

liggjorde han sina afhandlingar. Ett för honom fördelaktigt anbud af en katolsk furste afslog han, emedan han ej ville tjena en katolik. Få dagar derefter inträffade den förfärliga bartolomeinatten. Han omkom på den tredje dagen. Hans kropp blef genomborrad och, innan ännu lifvet slocknat, utkastad genom fönstret från femte våningen, släpad på gatorna och kastad i Seinen.

Hela Rami lif var en strid, de första 20 åren mot armodet, de följande 37 åren mot obskurantism och skolasticism inom vetenskaperna och religionen. Ramus har i vetenskapen försökt en reform analog med Luthers och Calvins. Han proklamerade förståndet såsom sanningens högsta kriterium, sökte reformera alla vetenskaper. Han var sin tids störste matematiker i Frankrike, öfversatte Euklides' elementer, författade en aritmetik, en geometri, en algebra, som ännu i det följande seklet begagnades. Slutligen upprättade han i Collége royal med egna medel en professorsstol i matematiken, hvilken sedermera illustrerades af Roberval. Copernici system räknade Ramus bland sina första anhängare. I fysiken visade han sig såsom fiende till hypoteser och abstraktioner.

Med förbigående af hans många öfriga arbeten upptaga vi endast hans matematiska och fysiska.

Arithmeticæ libri tres. Paris 1555 in 4:o, åter utgifna flere gånger till 1627.

Scholarum physicarum libri VIII. Paris 1565 in 8:o (en kritik af Aristoteles).

Procemium mathematicum. Paris 1567 in 8:o.

Geometriæ libri XXVII. Bâle 1569 in 4:o.

Scholarum mathematicarum libri XXXI. Bâle 1569 in 4:o.

Arithmeticæ libri II et algebræ totidem. Francfort 1586 in 8:o. } publicerade efter Rami död.

Opticæ libri IV. Cassel 1606 in 4:o. } publicerade efter Rami död.

87
432
345

Man säger: 3 från 3 gör noll; 4 från 12 gör 8; 5 från 12 gör 7. De siffror i minuenden och subtrahenden, med hvilka man räknat, öfverstrykas * omedelbart efter deras uppnämning, oberoende af s. k. låning.

Multiplikation definierar han rigtigt att vara det räknesätt, i hvilket multiplikanden lika många gånger adderas, som enheten innehålles i multiplikatorn. Resultatet kallas *factus*. Liksom fallet var med addition, så utföres äfven detta räknesätt alldeles på samma sätt som i våra dagar. Bland exemplen har han följande: »det frågas, huru många gyllen (»aureos») i månadtlig sold 456 soldater skola hafva, då hvarje soldat får 4.»

Division bestämmer Ramus att vara det räknesätt, i hvilket divisorn borttages från dividenden lika många gånger, som han innehålles i densamma. Resultatet kallas qvot. Uträkningen af divisionsexempel afviker i afseende på uppställningen betydligt från vårt vanliga. Divisorn till venster om dividenden skrefs under denna på nytt för hvarje operation, resterna stäldes ofvan dividenden och qvoten på sidan till höger om dividenden på sätt som vidfogade exempel närmare upplyser. Man skall dividera 7476 med 6:

123
6) 7476 (1246
6666
1246
23

För att göra förfaringssättet fullt tydligt, framställa vi här en tabell, som visar räkningens olika utseenden under divisionsoperationen, i förhoppning att derigenom all beskrifning blir öfverflödig.

---

* Öfverstrykningen utmärkes här med streckar ofvan siffrorna.

1.

6) 7476

2.

6) 7476
6

3.

6) 7476 (1
6

4.

1
6) 7476 (1
6

5.

1
6) 7476 (1
66

6.

1
6) 7476 (12
66

7.

1
6) 7476 (12
66
12

8.

12
6) 7476 (12
66
12

9.

12
6) 7476 (12
666
12

10.

12
6) 7476 (124
666
12

11.

12
6) 7476 (124
666
124
2

12.

123
6) 7476 (124
666
124
2

13.

123
6) 7476 (124
6666
124
2

14.

123
6) 7476 (1246
6666
124
2

15.

123
6) 7476 (1246
6666
1246
23

16.

123
6) 7476 (1246
6666
1246
23

Alltefter som siffrorna under operationen blifvit begagnade, öfverstrykas de.

Vi vilja nu framställa utseendet på en division med flersiffrig divisor. 841 »coronati» skola fördelas såsom byte mellan 29 soldater.

26

29) 841 (29

29

58

29

261

Hvarje soldat bekommer således 29 coronati. Mot detta exempel skulle man kunna göra den anmärkning, att det enligt hans definition på division ej hör under detta räknesätt.

Läran om *bråk* upptager endast halfannan sida. Bråks förkortning sker medelst den största gemensamma divisorn enligt den i Euklides' sjunde boks andra sats framstälda vanliga metoden att dividera det större talet med det mindre, det mindre med den i den föregående divisionen erhållna resten o. s. v. Vid bråks *addition* adderas endast två bråk hvarje gång. Bråks *division* sker genom att dividera täljare med täljare och nämnare med nämnare. Ex.: $\frac{8}{27}$ divideradt med $\frac{4}{9}$ gifver $\frac{2}{3}$. Af decimalbråk finnes icke en tillstymmelse.

Första boken afslutas med *sorträkning*. Vi meddela endast ett exempel. »Från 86 libellæ 1 as 7 denarii skola borttagas 47 lib. 10 asses 3 denarii.»

Räkningen utföres enligt följande schema med resterna ofvanom minuenden och med iakttagande af att 1 libella är 20 asses och att 1 as är lika med 12 denarii.

38	11	4
86 l.	1 a.	7 d.
47 l.	10 a.	3 d.

Återstoden blir 38 libellæ 11 asses 4 denarii.

Andra boken.

Denna bok börjar med att omnämna den hos Euklides VII. 19 framstälda s. k. »*gyllene regeln*»: »*då fyra tal äro proportionella, så är produkten af de yttersta lika stor med produkten af de medlersta*»; och »*om fyra tal äro så beskaffade, att produkten af de medlersta är lika stor med produkten af de yttersta, så äro talen proportionella*».

Ramus karakteriserar 4 proportionella tal, då han säger, att om det första är t. ex. $\frac{2}{3}$ af det andra, så skall det tredje vara $\frac{2}{3}$ af det fjerde.

Derpå följa många exempel först för det fall, att de tre gifna talen äro hela, sedan för det, att en eller flera af dem äro brutna.

Vidare visar han på ett utmärkt sätt, att en mängd exempel äro så beskaffade, att man måste göra åtskilliga förberedande räkningar, innan man kan erhålla de tre tal, på hvilka den gyllene regeln skall tillämpas. Somliga problem fordra en föregående addition, andra subtraktion, multiplikation eller division, andra åter fordra upprepade tillämpningar af den gyllene regeln.

Bland exempel, hvilka erfordra *en föregående addition*, upptaga vi endast tvenne, hvilka vi sedermera komma att återfinna i många af våra svenska räkneböcker.

Ex. 1.

»Augeam interrogavit magna virtus Alcidæ
Multitudinem armentorum quærens, ipse vero respondit,
Circa quidem Alphæi fluvium, amice, dimidium quidem horum:
Pars autem octava collem Saturni circumpascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem.
Circa vero Elidem divinam vigesima pascuntur.
Verum in Arcadia trigesimam reliqui.
Reliquos autem videto greges, hic quinquaginta.»

Ur Agners i Stockholm år 1743 tryckta Arithmetica meddela vi följande öfversättning af detta problem:

»Augea tilfrågat blef
af Hercule, den man så gäf,
huru många Nöth han äger?
Augea svarar och säger:
Halfparten lät jag qvar i bet,
vid Alphæi strand: jag wist nu wet,
en ottonde del förwist
vid Saturni berg, förutan brist
de wandra, om de födo få,
tolfte delen lika så.
Tjugonde med Elida.
Tretijonde uti Archadia fins
och här på denne Strand
50 mig när til hand.
Huru stor all Summan är,
af tig weta jag begär?»

Ramus löser detta problem på det sättet, att han först adderar bråken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, hvarigenom han får summan $\frac{95}{120}$ eller den del af hans hjord, som är frånvarande. Den återstående delen utgör således $\frac{25}{120}$, men denna var ock enligt uppgift 50. De tre tal, på hvilka gyllene regeln skall tillämpas, blifva följaktligen: 25, 50, 120 *, hvaraf finnes, att antalet kreatur i Augeas hjord utgjorde 240.

Ex. 2. En damm har tre aflopp, af hvilka det första ensamt kan tömma dammen på $\frac{1}{4}$ timme, det andra ensamt på $\frac{1}{2}$ timme, det tredje ensamt på 1 timme. Frågas, på huru lång tid kunna alla tre afloppen tillsammans tömma dammen.

Ramus räknar först ut huru många gånger dammen kan tömmas på en timme genom hvardera afloppet, och finner då för det första afloppet 4 gånger, för det andra 2 gånger och för det tredje 1 gång. Summan af 4, 2 och

* Ramus tecknar: 25 . 50 . 120 . 240.

och 1 gör 7. Deraf erhåller han sedan analogien: 7 . 1 . 1 . $\frac{1}{7}$. Det sista talet ($\frac{1}{7}$) angifver det sökta timantalet.

Bland exempel, som erfordra en *föregående multiplikation* upptaga vi ett i våra dagar på s. k. sammansatt regula de tri förekommande exempel:

»Om 10 oxar på 7 dagar plöja 35 tunland, huru många tunland kunna då 20 oxar plöja på 24 dagar?»

Genom lämplig multiplikation erhåller Ramus de tre talen 70, 35, 480, af hvilka han medelst användande af den gyllene regeln erhåller det fjerde talet 240.

Som man ser, ställer Ramus det ena paret storheter, som äro af samma slag, i första och tredje rummet, och det andra paret i andra och fjerde rummet.

Härefter kommer i ordning att behandla *alligationsräkning*, hvilken Ramus liksom större delen af hans efterföljare behandla mycket utförligt. Exemplen äro nämligen af den obestämda natur, att flere svar äro möjliga. Vi uppskjuta dock denna redogörelse, tills vi komma till nästa författare, Clavius, hvilken serdeles fullständigt och lättfattligt visar förfaringssättet vid detta slag af räkning.

Efter att hafva talat om storheter som äro proportionella i ordning och i motsatt ordning (»*de æquatione*» och »*de æquatione turbata*»), öfvergår Ramus till summering af serier. Serien

$$2, 4, 8, \ldots\ldots 64$$

summerar han på det sättet, att han från den andra termen (4) och sista termen (64) subtraherar den första termen (2), hvarigenom han erhåller återstoderna 2 och 62. Derpå söker han fjerde proportionalen till dessa båda återstoder 2, 62 och första termen 2. Summan af den erhållna fjerde proportionalen 62 och sista termen 64 utgör seriens summa.

Här liksom nästan öfverallt i Rami bok saknas bevis för rigtigheten af förfaringssättet. Med tillhjelp af algebran är det dock för detta fall ej svårt att åstadkomma ett bevis. Låt nämligen den geometriska serien vara följande:

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \ . \ . \ . \ aq^{n-1}.$$

De båda differenserna blifva alltså $a(q-1)$ och $a(q^{n-1}-1)$. Den fjerde proportionalen till dessa båda differenser och till seriens första term a är $\frac{a(q^{n-1}-1)}{q-1}$, hvilken lagd till sista termen aq^{n-1} gifver $a.\frac{q^n-1}{q-1}$, såsom det bör vara.

Om än i pedagogiskt hänseende Rami lärobok i aritmetiken lemnar åtskilligt öfrigt att önska, kunna vi ej annat än beundra den skarpsinnighet *, hvarmed han reducerar en mängd problem till regula de tri.

(Forts.)

Problem af F. W. Hultman.

En fader förordnar i sitt testamente, att det äldsta af hans barn skall af hans efterlemnade egendom hafva en summa a r:dr och dertill en viss del $\frac{1}{n}$ *af resten; det andra 2a r:dr och dertill* $\frac{1}{n}$ *af det, som då är qvar, det tredje 3a r:dr och dertill* $\frac{1}{n}$ *af det, som då är qvar o. s. v. Vid verkställandet af testamentet befanns, att alla barnen fått lika mycket. Huru stor var egendomen, huru stor var hvarje barns del, och huru stort var barnens antal?*

Vid uppställandet i eqvation af detta problem, hvilket förekommer i flere af våra algebraiska läroböcker, plägar man vanligen begagna sig af endast den uppgiften, att det

---

* *Bure*, den äldste svenske författare af en räknebok, säger i sin Abacus om Ramus, att hans metod i regula de tri är snillrik men svår (»Ramus docet ingenioso quidem, sed difficili negotio«).

första och andra barnets delar äro lika. Det funna värdet af egendomens storlek är följaktligen oberoende af storlekarne på de öfriga barnens andelar. Det bör derföre vara af intresse att undersöka, huruvida icke en likhet mellan andelarne af tvenne barn hvilka som helst möjligen medför likhet mellan alla barnens lotter, så snart dessa bestämmas enligt den i problemets uppgift angifna lagen. Vi gå att företaga en sådan undersökning.

Sättes egendomens värde $= x$ och barnens andelar respektive

$$A_1, A_2, A_3, \ldots . A_m,$$

erhålles

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= a + \frac{x-a}{n}, \\
A_2 &= 2a + \frac{x - A_1 - 2a}{n}, \\
A_3 &= 3a + \frac{x - A_1 - A_2 - 3a}{n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{m-1} &= (m-1)a + \frac{x - A_1 - A_2 - \ldots - A_{m-2} - (m-1)a}{n}, \\
A_m &= ma + \frac{x - A_1 - A_2 - \ldots - A_{m-1} - ma}{n}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Genom att successivt subtrahera en föregående eqvation från en efterföljande elimineras x. Man finner på detta sätt

$$\left.\begin{aligned}
A_1 - kA_2 &= -a, \\
A_2 - kA_3 &= -a, \\
A_3 - kA_4 &= -a, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{m-1} - kA_m &= -a,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

hvarest

$$k = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1},$$

Förmedelst eqvationssystemet (2) kan man utan svårighet uttrycka de $(m-1)$ obekanta

$$A_1\,,\quad A_2\,,\;\ldots\; A_{m-1}$$

i A_m och kända storheter. Eqvationerna gifva

$$\left.\begin{aligned}
A_{m-1} &= kA_m - a\,.\,\frac{k-1}{k-1}\,,\\
A_{m-2} &= k^2A_m - a\,.\,\frac{k^2-1}{k-1}\,,\\
A_{m-3} &= k^3A_m - a\,.\,\frac{k^3-1}{k-1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_1 &= k^{m-1}A_m - a\,.\,\frac{k^{m-1}-1}{k-1}\,.
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(3)$$

Hittills är om andelarne ingenting annat bestämdt än att de skola bildas enligt den i problemets uttryck angifna lagen. Skulle nu det vilkoret tilläggas, *att tvenne bestämda af dessa m andelar skola vara lika stora*, t. ex. att $A_p = A_r$, erhåller man eqvationen

$$k^{m-p}A_m - a\,.\,\frac{k^{m-p}-1}{k-1} = k^{m-r}A_m - a\,.\,\frac{k^{m-r}-1}{k-1}\,,$$

hvilkens lösning gifver

$$A_m = \frac{a}{k-1} = (n-1)a\,.\,\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

Häraf visar sig, att värdet på A_m är oberoende af p, r och m eller af ordningsnummern på de tvenne andelar, hvilka voro lika stora. Ur eqvationssystemet (2) finner man sedan, att

$$A_m = A_{m-1} = A_{m-2} = \ldots = A_1 = (n-1)a\,.$$

Den första eqvationen i systemet (1) gifver vidare

$$x = a(n-1)^2\,,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(5)$$

hvaraf sedan följer, att barnens antal är $= n - 1$.

Anm. Skulle man i stället för vilkoret, att två delar skola vara lika stora, införa det, *att egendomen skall* *vara helt och hållet utdelad, då det m:te barnet fått sin andel*, blefve tydligen detta barns del A_m lika med ma, och man erhölle de öfriga barnens andelar genom att i eqvationssystemet (3) i st. f. A_m sätta ma. Delarnes och egendomens storlek blifva

$$A_m = ma,$$

$$A_{m-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{k[km-(m+1)]a}{k-1},$$

$$A_{m-2} = \frac{a}{k-1} + \frac{k^2[km-(m+1)]a}{k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1 = \frac{a}{k-1} + \frac{k^{m-1}[km-(m+1)]a}{k-1},$$

$$x = a(n-1)^2 + \frac{n^m[m-(n-1)]a}{(n-1)^{m-1}}.$$

Emedan

$$km-(m+1) = \frac{m-(n-1)}{n-1},$$

synes, att dessa värden på de obekanta sammanfalla med de förut i (4) och (5) funna värdena, om man gör

$$m = n-1,$$

d. v. s. låter barnens antal blifva $= n-1$; ett resultat, som man kunde vänta sig.

Geometriskt bevis af formlerna för tredje händelsen vid snedvinkliga trianglars beräkning. (Jfr Lindmans Trigonometri, s. 73).

Gifna: a, b och *C*.

Om a och b äro olika, så låt a beteckna den större.

Konstruktion (se fig. 1): $\wedge C$ skäres midt i tu genom CD. BD och AE dragas $\perp$ mot CD och AF mot BD.

Bevis. $\wedge CBD = 90^\circ - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(A + B);$

$\wedge ABD = \frac{1}{2}(A + B) - B = \frac{1}{2}(A - B).$

$AF = CD - CE$ och $BF = BD + DF.$

Men nu är

$AF = c \sin \frac{1}{2}(A - B);$ $CD = a \cos \frac{1}{2}C;$ $CE = b \cos \frac{1}{2}C;$

$BF = c \cos \frac{1}{2}(A - B);$ $BD = a \sin \frac{1}{2}C;$ $DF = b \sin \frac{1}{2}C.$

Således är

$$c \sin \tfrac{1}{2}(A - B) = (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$c \cos \tfrac{1}{2}(A - B) = (a + b) \sin \tfrac{1}{2}C.$$

Af dessa erhållas slutformlerna

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{(a - b) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C}{a + b},$$

$$c = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \quad \text{eller} \quad c = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}.$$

LARS PHRAGMÉN.

Satser af F. W. HULTMAN.

1. I Åstrands *Aritmetiska Genvägar*, Göteborg 1852, andra upplagan, förekommer följande genväg för att förvandla sådana bråk, hvilkas nämnare är 19, 29, 39, 49, . . . o. s. v. till decimalbråk.

»Täljaren divideras med första siffran af nämnarens nästa tiotal; qvoten anses såsom ny dividend, hvilken åter divideras med samma divisor o. s. v., då qvoterna uppskrifne formera det sökta decimalbråket.

Om t. ex. $\frac{16}{19}$ skall reduceras till decimalbråk, så säger man 2 uti 16, 8 gånger; 2 uti 8, 4 gånger; 2 uti 4, 2 gånger; 2 uti 2, 1 gång; 2 uti 1, 0 gång med 1 till rest; 2 uti 10, 5 gånger; 2 uti 5, 2 gånger, med 1 till rest; 2 uti 12, 6 gånger; o. s. v., så att man har $\frac{16}{19} = 0{,}84210526315 \ldots$».

Bevisa rigtigheten af detta förfaringssätt.

2. I nyssnämnda bok, sid. 53, förekommer ett sätt att förmedelst successiv division utdraga qvadratroten ur ett gifvet tal.

»Om t. ex. qvadratroten begäres ur 124, så divideras 124 med rotens närmaste tiotal, nemligen 10; emellan detta och qvoten 12,4 sökes medeltalet 11,2, hvarmed det gifna talet återdivideras, då qvoten blifver 11,07. Medium af denna och det förra medeltalet är 11,135, som är den sökta roten med trenne decimaler. Önskas den noggrannare, så divideras det gifna talet 124 med den sistfunna roten, då qvoten blifver 11,1360574 och medium af detta tal samt den sistfunna roten 11,135, gifver roten = 11,1355287 rigtig intill sjunde decimalen, så att man i allmänhet för hvarje division får ett dubbelt antal decimaler.»

Visa detta förfaringssätts rigtighet.

3. Samma bok angifver följande sätt att genom successiv division utdraga kubikroten ur ett gifvet tal.

»Om t. ex. kubikroten begäres ur 72, så divideras detta tal med dess närmaste heltaliga kubikrot, nemligen 4; qvoten 18, dividerad med samma tal 4, gifver en qvot = 4,5. De båda divisorerna 4 och 4 samt sistfunna qvoten 4,5 hopadderas; summan divideras med den konstanta divisorn 3, då ett nytt närmningsvärde å roten erhålles = 4,167. Denna rot begagnas nu på samma sätt, som det först antagna närmningsvärdet 4, hvarvid sista qvoten blifver 4,14653. Medium af denna och två gånger 4,167 gifver ett tredje närmningsvärde å den sökta roten = 4,16017, rigtigt intill femte decimalen.»

Visa orsaken till detta förfaringssätt.

---

4. I problemen 4—11 äro en triangels tre sidor gifna (a, b, c). Att finna uttrycken på längderna af de tre li-

nier, som dela vinklarne midt i tu (bissektricerna af triangelns tre vinklar) och äro utdragna, tills de träffa motstående sidor.

5. Att finna uttrycken på längderna af de tre linier, hvilka dela triangelns yttre vinklar midt i tu och äro utdragna, tills de träffa förlängningen af den triangelsida, som står emot den intill ifrågavarande vinkel belägna inre vinkeln i triangeln. (Bissektricerna af triangelns yttre vinklar).
6. Att finna uttrycken på triangelns tre höjder.
7. Att finna uttrycken på de tre räta linier, som från vinkelspetsarne dragas till motstående sidors midtpunkter (triangelns midtellinier).
8. Att finna uttrycken på de tre linier, som förena triangelns vinkelspetsar med de punkter på deras motstående sidor, der dessa tangeras af
   α) den i triangeln inskrifne cirkeln;
   β) den cirkel, hvilken tangerar en sida i triangeln och de båda andra sidornas förlängningar (utanförinskrifven cirkel).
9. Att finna uttrycken på ytorna i de tre trianglar, af hvilka hvarje har den omskrifne cirkelns medelpunkt till spets och till bas en sida i den gifna triangeln.
10. Att finna uttrycken på ytorna af de tre trianglar, af hvilka hvar och en har sin spets i den inskrifne cirkelns medelpunkt och till bas en af triangelns sidor.
11. Att finna uttrycken på ytorna af de tre trianglar, hvilka hafva sina spetsar i medelpunkten till den cirkel, som tangerar en sida och de båda andra sidornas förlängningar, och hvilka hafva triangelns tre sidor till baser.

Att, om möjligt, uttrycka en triangels vinklar, sidor och yta i

12. triangelns bissektricer (se probl. 4);

13. triangelns bissektricer af de yttre vinklarne (se probl. 5);
14. triangelns tre höjder;
15. triangelns tre midtellinier (se probl. 7);
16. de tre linier, som förena triangelns vinkelspetsar med de punkter, der dessa tangeras af
    α) den i triangeln inskrifne cirkeln;
    β) den cirkel, hvilken tangerar en sida i triangeln och de båda andra sidornas förlängningar;
17. radierna till de tre utanför inskrifna cirklarne (se probl. 8 β);
18. triangelns omkrets och radierna i de in- och omskrifna cirklarne.

I problemen 19—28 äro längderna på de tre kantlinier, hvilka bestämma den solida vinkeln vid spetsen i en triangularpyramid, lika med respektive a, a_1, a_2, samt längderna på de tre kantlinierna, hvilka bilda bastriangeln, lika med b, b_1, b_2, dock så att b_2 sammanbinder ändpunkterna af a och a_1, b ändpunkterna af a_1 och a_2 samt således b_1 ändpunkterna af a och a_2.

19. Att finna uttrycket på radien i det inskrifna klotet.
20. Att finna uttrycket på radien i ett klot, som tangerar pyramidens basyta och de tre sidoplanernas förlängningar.
21. Att finna uttrycket på radien i det kring pyramiden omskrifna klotet.
22. Att beräkna ytorna af de tre trianglar, af hvilka hvar och en bildas af en från pyramidens spets gående kantlinie, en från samma spets i motstående sidoplan gående *bissektrice* och af en linie, som förenar nyssnämnda liniers ändpunkter.
23. Att beräkna ytorna af de tre trianglar, af hvilka hvar och en bildas af en från pyramidens spets gående kantlinie, af en från samma spets i motstående sido-

plan gående *höjdlinie* och af en linie, som förenar nämnda liniers fotpunkter.

24. Att beräkna ytorna af de tre trianglar, af hvilka hvar och en bildas af en från pyramidens spets gående kantlinie, en från samma spets i motstående sidoplan gående *midtellinie* samt af en linie, som förenar nämnda liniers fotpunkter.

25. Att beräkna ytorna af de tre trianglar, af hvilka hvar och en bildas af en från pyramidens spets gående kantlinie, af en linie, som är dragen från samma spets i motstående sidoplan till tangeringspunkten för den i samma plan inskrifne cirkeln, och af en linie, som förenar nämnda liniers fotpunkter.

26. Att beräkna ytorna af de trianglar, hvilka hafva sina spetsar i det *inskrifna klotets medelpunkt* och hvilka till baser hafva pyramidens kantlinier.

27. Att beräkna ytorna af de trianglar, som hafva sina spetsar i *medelpunkten af ett af de utanför inskrifna kloten* och hvilka till baser hafva pyramidens kantlinier.

28. Att beräkna ytorna af de trianglar, som hafva sina spetsar i det *omskrifna klotets medelpunkt* och till baser pyramidens kantlinier.

Att, om möjligt, upprita en triangel, då man känner

29. sidornas midtpunkter;
30. fotpunkterna af höjderna;
31. de punkter, der sidorna skäras af bissektricerna till de inre vinklarne;
32. de punkter, der sidornas förlängningar skäras af bissektricerna till de yttre vinklar, som ligga bredvid de emot dessa sidor stående vinklar i triangeln;
33. de punkter, der sidorna tangeras af den inskrifne cirkeln;

34. de punkter, der en sida och de båda andras förlängningar tangeras af en cirkel;
35. då man känner medelpunkterna till de tre cirklar, som tangera en sida i triangeln och de båda andras förlängningar.

Satser af Knut Wicksell,

elev vid Stockholms gymnasium.

36. Om man af sidorna i en triangel, hvilken som helst, afskär en tredjedel från vinkelspetsarne räknadt och åt samma led och sammanbinder skärningspunkterna med motstående vinkelspetsar, så bildas en triangel, som är $\frac{1}{7}$ af den ursprungliga.
37. Att med en gifven medelpunkt upprita en cirkel, som skär två gifna cirklar så, att kordan, som förenar skärningspunkterna blir parallel med en gifven rigtning.
38. ABC är en triangel, der vinkeln vid C är $\frac{2}{3}$ af en rät. På sidorna äro uppritade liksidige trianglar; bevisa, att triangeln på AB tillsammans med triangeln ABC är lika med triangeln på AC tillsammans med triangeln på BC.
39. Om två linier, som skära två yttre vinklar till en triangel midt i tu och begränsas af de motstående sidorna, äro lika stora, så äro de tudelade vinklarne lika stora.
40. I ett tvåsiffrigt tal är den venstra siffran udda och den högra jemn och dubbelt så stor; om man tager hälften af talet och ställer siffrorna i det derigenom bildade talet i omvänd ordning, uppkommer ett tal, som är $\frac{9}{4}$ af det ursprungliga. Hvilket är detta tal?
41. Två personer P och Q skiljas vid hörnet af ett qvadratiskt torg $ABCD$ med 225 fots sida. P går i rigtningen AD, Q i rigtningen AB med $\frac{3}{4}$ af P:s hastighet. Hunnen till E vill P för någon angelägen-

het åter uppsöka Q och begifver sig derföre i rät linie mot Q utefter EF (Q befinner sig nämligen nu i punkten F) samt framkommer till F i samma ögonblick, som Q kommer till B; Q har nämligen alltjemt fortsatt sin väg. Bestäm punkterna E och F.

Satser af G. H. Lindqvist,

elev vid Stockholms gymnasium.

42. Att från en punkt utom en gifven cirkel draga en sekant till cirkeln så, att stycket mellan punkten och den utböjda delen af periferien blir lika stort med vinkelräta afståndet från medelpunkten till sekanten.

43. I en cirkel äro dragna två radier vinkelräta mot hvarandra. Att från den enas ändpunkt draga en rät linie, som skär periferien och den andra radiens förlängning så, att stycket mellan afskärningspunkterna blir lika med sidan i den i samma cirkel inskrifna qvadraten.

Satser af A. E. Hellgren,

forne elev vid Stockholms gymnasium.

44. På sidan AC af en triangel ABC är en punkt D tagen efter behag. Från D är dragen en rät linie DE, som träffar sidan BC i E, så att vinkeln CDE är lika stor med vinkeln B. Bevisa, att de tangenter, hvilka dragas från C till hvilka cirkelbågar som helst på styckena AD och BE, äro lika stora.

45. Att upprita tvenne cirklar med gifna medelpunkter så, att radiernas summa blir lika med en gifven rät linie, samt att den gemensamma tangenten (stycket mellan tangeringspunkterna) till de båda cirklarne, blir lika med en gifven rät linie.

46. Att med gifna medelpunkter upprita tvenne cirklar, hvilka skära hvarandra så, att deras gemensamma korda blir lika stor med en gifven linie och att deras gemensamma tangent blir lika stor med en gifven linie.
47. Att med gifna medelpunkter upprita tvenne cirklar, hvilka skära hvarandra så, att vinkeln, som bildas af den utdragna gemensamma kordan och den gemensamma tangenten, blir lika med en gifven vinkel, samt så, att denna vinkels spets ligger på ett gifvet afstånd från en af de gifna medelpunkterna.
48. Medelpunkterna A och B äro gifna. Det begäres, att man skall upprita cirklarne, då man känner längden af den gemensamma tangenten CD och längden DE af förlängningen af tangenten CD, som ligger emellan tangeringspunkten D och räta linien ABE.
49. Att mellan en gifven vinkels A ben inpassa en gifven begränsad rät linie B så, att, om man skär den inpassade linien B i tre lika stora delar och sammanbinder den ene af dessa skärningspunkter med vinkelspetsen A, vinkeln A blir skuren midt i tu.
50. Att mellan en gifven vinkels ben inpassa en gifven rät linie så, att om man skär henne i tre lika delar och sammanbinder en af hennes delningspunkter med vinkelspetsen, vinkeln mellan den inpassade linien och den sist dragna räta linien blir rät.
51. Att från en gifven punkt utom en cirkel draga en rät linie, som skär cirkeln så, att det stycke af henne, som ligger inom cirkeln, är lika med det, som ligger utom densamme.

Satser af lektor Lindman.

52. Om närliggande sidor i ett trapezium skäras i samma proportion, så bilda närliggande skärningspunkters sammanbindningslinier en paralellogram, hvars diago-

naler skära hvarandra på den linie, som förenar de punkter, i hvilka trapeziets diagonaler äro midt i tu skurna, samt skära denna linie i samma proportion, hvari sidorna blifvit skurna.

53. Att geometriskt och trigonometriskt bestämma en triangel, då man känner två af hans sidor samt att den enas motstående vinkel är dubbelt så stor som deras mellanliggande vinkel.

54. Att bestämma φ ur eqvationssystemet

$$R \cos (B + \varphi) = (b - y) \cos C - (a - x),$$
$$R \cos (A + \varphi) = (a - x) \cos C - (b - y),$$
$$x \sin (B + \varphi) + y \sin (A + \varphi) = c \sin \varphi,$$

hvarest

$$R = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 - 2(a - x)(b - y) \cos C}$$

och a, b, c sidor, A, B, C vinklar i en triangel.

55. Om en udda dignitet af 2 ökas med 1 och om en jemn dignitet af 2 minskas med 1, så uppkomma tal, som hafva 3 till faktor.

Satser af student E. Lundberg.

56. Lös eqvationen $\sqrt[5]{1 - 3x^2} + \sqrt[5]{36x^2 - 1} = 3\sqrt[5]{x^2}$.

57. Att genom ändpunkten af en gifven korda i en cirkel draga tvenne andra kordor så, att de med den gifna kordan bilda lika stora vinklar, och så, att dessutom deras summa eller skilnad blir lika med denna korda.

58. Bevisa geometriskt, att, om de punkter, der en triangels sidor tangeras af den inskrifna cirkeln, sammanbindas med motstående vinkelspetsar, sammanbindningslinierna råkas i en punkt.

59. Bevisa geometriskt, att, om man har figuren till Eukl. I. 47 uppritad, de två räta linier, som sammanbinda de yttersta punkterna af hypotenusan med spetsarne

af de på motstående kateter uppritade qvadraterna, råkas på perpendikeln, som från den räta vinkelns spets är nedfäld mot hypotenusan.

(Lösningar af satserna 1—59 remitteras till lektor Hultman).

Satser af student N. PETERSON,

forne elev vid Upsala priv. elem.-läroverk.

60. ABC är en rätvinklig triangel, uti hvilken den ena kateten AB är dubbelt så stor som den andra AC. Öfver AB och BC såsom diametrar äro tvenne cirklar uppritade, och från B är en godtycklig korda dragen i segmentet ACB. Huru denna korda än må dragas, så är dock alltid hennes afstånd från den mindre cirkelns medelpunkt lika stort med det stycket af henne, som begränsas af de båda cirklarnes periferier.

    Anm. Detta teorem, jemnfördt med Eukl. III. 7, gifver vid handen, huru en korda skall dragas i cirkeln, för att summan af henne och hennes afstånd från medelpunkten må blifva ett maximum.

61. Tvenne cirklar $CABD$ och $EABF$, hvilkas medelpunkter äro Q och P, skära hvarandra i A och B. Radierna PA, PB, QA, QB förlängas till punkterna C, D, E och F. Visa, att skilnaden mellan vinklarne AQB och APB är lika stor med dubbla skilnaden mellan vinklarne CGD och EHF, då G och H äro tvenne punkter, den förra på cirkelperiferien $CABD$ och den senare på cirkelperiferien $EABF$.

62. A, B, C och D äro medelpunkterna, E, F, G och H tangeringspunkterna för fyra cirklar, af hvilka hvarje tangerar tvenne. Visa, att kring fyrhörningen $EFGH$ kan omskrifvas en cirkel, som tillika är inskrifven i fyrhörningen $ABCD$.

63. En cirkel $ABDEC$, uti hvilken O är medelpunkt och AE en diameter, är gifven. Genom en punkt P

på radien OA drages en korda BC så att PB blir lika stor med PO, och från C drages en diameter CD. Visa, att bågen AB är hälften af bågen BD.

64. På periferien af en cirkel, hvars medelpunkt är A, tages en punkt B till medelpunkt för en mindre cirkel CDE, hvilkens periferi råkar den större cirkeln i C, linien AC i D och linien AB i E. Visa, att vinkeln AED är 3 gånger så stor som vinkeln ADE.

65. Trenne cirklar skära hvarandra. De linier, som förena intersektionspunkterna för hvarje cirkelpar, råkas i en punkt.

66. Att i en gifven cirkelsektor (radien $= r$, vinkeln $= 2\omega$, kordan $= c$) inskrifva en maximirektangel, som har tvenne hörn belägna på bågen. Trigonometrisk behandling.

67. Samma problem. Algebraisk behandling.

68. Samma problem. Geometriskt bevis.

69. Tvenne lika stora cirklar (radierna $= r$ fot) skära hvarandra så, att den enes periferi går genom den andres medelpunkt. Att uti den för de båda cirklarne gemensamma ytan inskrifva en maximirektangel.

70. Att i en gifven triangel (höjden $= h$ fot, basen $= b$ fot) inskrifva ett parallel-trapezium, hvars sidor äro parallela med triangelns sidor, hvars *mindre* bas utgör en del af triangelns bas, och hvars yta är ett maximum.

71. Hvilken är den största rektangel, som har två spetsar belägne på hvardera af tvenne med hvarandra koncentriska cirkelperiferier (radierna $= R$, r fot)?

72. Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner höjden mot hypotenusan jemnte katetsumman.

73. Om man till produkten af fyra konsekutiva tal adderar 1, så är summan en jemn qvadrat.

74. I Todhunters algebra (ex. 40 på multiplikation) förekommer följande räknesats: bevisa, att $x^8+y^8+(x+y)^8 = 2(x^2+xy+y^2)^4+8x^2y^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$. Kan detta bevis utföras medelst successiva upplösningar i faktorer?

Satser af L. J. Björkman,

elev vid Upsala priv. elem.-läroverk.

75. Tvenne koncentriska cirklar äro uppritade, hvilkas radier förhålla sig som 1 : 2. I den större cirkeln är en korda dragen, som tangerar den mindre cirkelns periferi. Visa, att denna korda är fyra gånger så stor som höjden i en liksidig triangel, hvars sida är lika stor med den mindre cirkelns radie.

76. Tvenne berg, hvardera af 12000 fots höjd, äro belägna på hvar sin sida om ett haf. Om jorden antages vara fullt sferisk och hennes diameter 1190 sv. mil, huru långt är det mellan bergspetsarne,

a) om synlinien mellan dem tangerar vattenytan?

b) om synliniens kortaste afstånd från vattenytan är 3000 fot?

c) om synlinien skär vattenytan så, att höjden i det af henne och vattenytan bildade segmentet är 4000 fot?

Huru stor vinkel bilda bergspetsarnes lodlinier med hvarandra i de tre anförda fallen?

(Lösningar af satserna 60—76 remitteras till doc. Dillner).

Märk: endast de svårare af de anförda satserna upptagas i de följande häftena till diskussion.

Prisuppgift för 1868.

(Priset är Traité de Calcul Differentiel par J. Bertrand).

Att upprita en quadrat, hvars sidor (förlängda, om så behöfves) gå genom hvar sin af fyra gifna punkter.

Anm. Problemet bör fullständigt diskuteras. Lösningarna böra vara insända till lektor Hultman före den 1 Januari 1869.

AFDELNING II.

Je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre magnitudinem.

LEIBNITZ.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. DILLNER.

Inledning.

Hvad vi inom aritmetiken beteckna med talet 1 eller den s. k. *aritmetiska enheten* är, som bekant, en *konventionel* eller *arbiträr* storhet, genom hvars mångfaldning eller delning eller genom dessa två åtgärder tillsammans de *aritmetiska talen* hafva sin naturliga uppkomst *. Den allmänna grundsats, hvarpå all aritmetisk räkning bygges och som finnes *axiomatiskt* gifven hos äfven den förste nybörjaren, lyder: *storheter, som ingå i samma räkning och äro af samma slag, måste vara hänförda till samma konventionella enhet.* Då enheten såsom konventionel kan vara olika för särskilda storheter, så följer deraf, att *reduktion till ny enhet* (den aritmetiska multiplikationen jemte dess omvändning divisionen) utgör en nödvändig förutsättning för den aritmetiska kalkylens utveckling. Öfvergå vi nu till algebran, så ligger likaledes den aritmetiska enheten till grund för det algebraiska talet, men med en ny konventionel bestämning. Så t. ex., om vi med talet 1 beteckna 1 r:dr, så beror det på godtycke eller fri öfverenskommelse, om denna etta skall beteckna *fordran* eller *skuld* (tillgång eller brist); likaledes, om 1 betecknar en grad på termometerskalan, så beror det på konvention, om dermed menas en grad *öfver* eller *under* nollpunkten, o. s. v. Denna nya konventionella bestämning på enheten kalla vi hennes *sättning* eller *position*, hvilken således enligt sin natur är *tvåfaldig* och *subtraktivt motsatt* den ena

---

* Genom en delning af enheten, som går i det oändliga, och genom en motsvarande mångfaldning af delarne kan det irrattionella talet anses ha sin uppkomst.

den andra. Enheten sjelf på detta sätt bestämd kallas *algebraisk enhet* och tecknas ± 1. Genom denna enhets mångfaldning eller delning eller genom dessa två åtgärder tillsammans har det *algebraiska talet* * sin naturliga uppkomst. Den sättning af enheten, som vi lägga till grund för ett problems uppställning i eqvation, kallas *positiv* och utmärkes med tecknet $+$, då den motsatta sättningen utmärkes med tecknet $-$ och kallas *negativ.* Att det är fullkomligt likgiltigt, hvilkendera af de två möjliga sättningarna det är, som lägges till grund för problemet eller tages positiv, inses lätt af följande två exempel:

1:o) en person har en räntefri skuld af K r:dr samt en icke räntebärande årlig inkomst af p r:dr; huru stor är hans *skuld* efter t år?

$$x = K - pt;$$

2:o) en person har en räntefri skuld af K r:dr samt en icke räntebärande årlig inkomst af p r:dr; huru stor är hans *tillgång* efter t år?

$$x = pt - K;$$

der således i 1:o skulden och i 2:o tillgången har *positiv* sättning **. Dock måste, såsom af sig sjelf inses, den sättning man väljer för ett problems uppställnlng i eqvation vara *genomgående*, så att man icke i en och samma eqvation betecknar t. ex. en skuld på ena stället såsom positiv och på andra stället såsom negativ. Den allmänna axiomatiska grundsats, hvarpå den algebraiska kalkylen måste byggas, blir således: *storheter, som ingå i samma eqvation och äro af samma slag, måste vara hänförda till samma konventionella enhet och samma konventionella sättning.* Då sättningen såsom konventionel kan vara olika för särskilda storheter, så följer deraf, att *reduktion till ny sättning jemte den förut afhandlade reduktionen till ny enhet*

---

* Vi kunna icke sluta oss till deras åsigt, som anse algebraiska tal (synnerligen de negativa) böra uteslutande benämnas qvantiteter, och det så mycket hellre, som *positiva* och *negativa tal*, *positivt* och *negativt talsystem* äro allmänt gängse termer inom vetenskapen.

** Af det redan anförda inses, att allt tal om utstötning af de negativa qvantiteterna ur algebran såsom orimliga förfaller af sig sjelf. Ty hvilka qvantiteter äro väl genom sig sjelfva positiva eller negativa? — inga; den negativa får nämligen sin tillvaro först sedan den positiva är satt och ingenting hindrar, att man efter godtycke kastar om sättningen, så att den negativa blir positiv och tvärtom. Hvilkendera qvantiteten skall nu utstötas såsom orimlig? Svaret kan icke bli annat än: begge eller ingendera. Åsyftar man åter med sin förkastelsedom de negativa qvantiteternas räknelagar, så framgå dessa, som vi skola se, ur sättningens begrepp såsom lika nödvändiga och vissa, som någonsin lagarna för de positiva qvantiteterna.

(den algebraiska multiplikationen jemte dess omvändning divisionen) måste utgöra den nödvändiga förutsättningen för den algebraiska kalkylens utveckling. Betydelsen af den algebraiska multiplikationen innefattas således i följande två momenter: 1:o) *reduktion till ny enhet eller den aritmetiska multiplikationen;* 2:o) *reduktion till ny sättning eller den s. k. teckenmultiplikationen.* Således, om en med $+1$ betecknad storhet, d. v. s. positivt satt, inflyttas i en eqvation med *oförändrad* positiv sättning, måste hon fortfarande tecknas $+1$, hvaraf reduktionslagen:

$$+(+1) = +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

om åter samma storhet inflyttas i en eqvation med *omkastad* positiv sättning, måste hon tecknas -1, hvaraf reduktionslagen:

$$-(+1) = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Om en med -1 betecknad storhet, d. v. s. motsatt den positivt satta, inflyttas i en eqvation med *oförändrad* positiv sättning, så måste hon fortfarande tecknas -1, hvaraf reduktionslagen:

$$+(-1) = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

om slutligen samma storhet inflyttas i en eqvation med *omkastad* positiv sättning, så måste hon, såsom först hänförd till en sättning motsatt sin egen samt sedan till denna sättnings motsats, tecknas $+1$, hvaraf reduktionslagen:

$$-(-1) = +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Till belysning af de i (3) och (4) uttryckta lagarna må anföras följande exempel: om en skuld införes i en eqvation, i hvilken dess motsats fordran är satt såsom positiv, så måste hon tecknas negativ; införes hon åter i en eqvation med omkastad positiv sättning, der således fordrans motsats d. v. s. skuld blifvit positivt satt, måste hon tecknas positiv.

Om vi nu med de i (1)—(4 uttryckta reduktionslagarna sammanfatta den aritmetiska multiplikationen, så få vi följande fyra former för den algebraiska multiplikationen:

$$(+a) \times (+b) = +ab \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

$$(-a) \times (+b) = -ab \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

$$(+a) \times (-b) = -ab \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

$$(-a)(-b) = +ab\,* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4').$$

Dessa grundsatser, ehuru fullt tillräckliga att på ett tillfredsställande sätt förklara de reela qvantiteternas räknelagar, lemna icke den

* Man lägge märke till, att en multiplikation sådan som $(-3) \times (+4)$ eller $(-3) \times (-4)$, der multiplikatorn är ett negativt tal (multiplikatorn måste nämligen enligt sin natur vara ett abstrakt tal) saknar helt och hållet betydelse, så vida man icke tolkar den i enlighet med ofvan anförda grundsatser.

ringaste upplysning om betydelsen af de imaginära qvantiteterna. För algebristen är $\sqrt{-1}$ eller i ett blott tecken utan något *reelt* underlag; att bygga en kalkyl på detta tecken, d. v. s. att utveckla tankens lagar om ett tecken utan innehåll eller begrepp, synes vara en orimlighet eller en ovärdig fantasilek. Och likväl lemnar denna kalkyl, efter att hafva fört sina innehållstomma tecken genom en labyrint af hypotetiska operationer, de mest glänsande resultater, hvilkas sanning trotsar den skarpaste kontroll: det tomma tecknet pekar öfverallt på ett innehåll, som, engång rigtigt funnet, måste ge upphof åt en kalkyl, som under sig subsumerar såsom enskilda species de hittills utvecklade grenarna af matematiken. För att finna detta innehåll uppställde redan Wallis (1693) en analogi, $+1 : i = i : -1$, hvilken Euklides svårligen skulle hafva erkänt såsom sin, men ur hvilken Wallis drog följande för den imaginära kalkylens utveckling epokgörande slutsats: *om* $+1$ *och* -1 *tänkas förlagda i motsatta rigtningar från en punkt på en rät linie, så måste* i *såsom medelproportional beteckna en rät linie, som till sin storlek är* 1 *och som är förlagd i den vinkelräta riktningen från punkten* (jfr Eukl. VI: 8). Det är i sjelfva verket på denna hypotes som senare tiders matematici byggt sina teorier om de imaginära qvantiteterna, hvarvid gången i allmänhet varit följande: den imaginära kalkylen med sina hypotetiska räknelagar har satts i första rummet såsom någonting i och genom sig sjelf teoretiskt berättigadt; i andra rummet har kommit den geometriska tolkningen med den Walliska hypotesen i spetsen. År 1847 utgaf Cauchy sin »Mémoire sur les quantités géométriques,« hvari han inslog en motsatt väg, i det han antydde en utveckling ur geometriens egna begrepp, en verklig *geometrisk kalkyl*, som är oberoende af den imaginära kalkylens tecken och hypoteser, men i sig innehåller algebrans såväl reela som imaginära räknelagar såsom enskilda species. Inom denna kalkyls område återfinna vi vidare lagarna för den plana och sferiska trigonometrien, den analytiska geometrien samt mekaniken. Infinitesimalmetoden, tillämpad på de geometriska qvantiteterna, är synnerligen rik på intressanta och vigtiga resultater. Vi skola på den af Cauchy beträdda vägen egna denna tidskrift en serie uppsatser i den geometriska kalkylen, hvarvid vi skola bemöda oss om korthet, tydlighet och bestämdhet samt en bindande bevisning. Kalkylens praktiska betydelse kommer att belysas genom talrika öfningsexempel. Såsom förkunskaper förutsättas endast elementär geometri och algebra samt för räkneexemplen derjemnte de första grunderna af mekaniken.

Om den elementära framställningen af teorien för maxima och minima.

Af Hj. Holmgren.

I de flesta — för att ej säga alla — läroböcker i differentialräkning är teorien för funktioners maxima och minima enligt vår åsigt ofullständig i det hänseendet, att den ej gör afseende på vissa slag af funktionsvärden, hvilka dock vid teoriens tillämpning stundom äro af stor vigt att iakttaga. Vidare anse vi den framställning af ämnet, som grundar sig på funktioners utveckling i serie, vara mindre lämplig, då det är lätt att inse, att hela den ifrågavarande teorien är en af de närmast liggande följdsatser af definitionen på funktionen sjelf och dess derivata.

Det faller af sig sjelf, att närvarande uppsats icke afser en fullständig och detaljerad framställning af det välbekanta ämnet, utan endast uppmärksamhetens fästande på de antydda anmärkningarna mot det formella i den vanliga framställningen af detsamma. Vi skola derföre inskränka oss till behandlingen af det enklaste fallet eller utvecklade (explicita) funktioners af en oberoende variabel maxima och minima, fastän samma anmärkningar gälla om de mera sammansatta frågornas behandling, och ett förfaringssätt, likartadt med det vi nu gå att framställa, äfven kan tillämpas på dessa.

Med $$y = f(x)$$
förstås i det följande en *reel* och *entydig* funktion af x, eller en sådan, som för hvarje reelt värde på x, för hvilket den sjelf har reelt värde, i allmänhet antager *ett enda* och bestämdt sådant, och endast undantagsvis för vissa enskilda x-värden (nämligen då den är *diskontinuerlig*) kan antaga *tvenne* olika och reela värden.

Då man tänker sig den oberoende variabeln x i en sådan funktion genomlöpa alla värden från $-\infty$ till $+\infty$, så kan dervid funktionen $y = f(x)$ sjelf genomlöpa flere eller färre från hvarandra åtskilda kontinuerliga följder af reela värden. Begynnelse- och slutvärdena på x i hvar och en af dessa kontinuerliga följder angifva hvad vi skola, för korthets skull, kalla funktionens *slutpunkter*. Benämningen häntyder derpå, att mot dessa ställen svara ändpunkter på de särskilda grenarna af kroklinien $y = f(x)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem.

Sådana *slutpunkter* eller ställen, från hvilka räknadt funktionen har en kontinuerlig följd af reela värden åt den ena men ej åt den andra sidan, äro af 4 olika slag. De förekomma nämligen:

1) Då funktionen öfvergår från reelt till imaginärt värde eller tvärtom. *En* slutpunkt. Ex. $y = lx$ för $x = 0$, $y = \sqrt{(x-1)(2-x)}$ för $x = 1$ och $x = 2$, $y = \arcsin x$ för $x = -1$ och $x = +1$.

2) Då funktionen är diskontinuerlig eller för vissa värden på x antager *tvenne* olika reela värden. *Två* slutpunkter. Ex. $y = \frac{1}{(x-a)^3}$ och $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-a}$ för $x = a$.

3) Då funktionen för $x = -\infty$ eller $x = +\infty$ har reelt värde, så motsvarar detta en slutpunkt.

4) Då funktionen tillfölje af särskilda inskränkande vilkor i en framstäld fråga skall anses gälla endast mellan gifna reela gränser $x = a$ och $x = b$ på den variabla, äro dessa ställen slutpunkter. — Sådana fall förekomma ofta nog, såsom i de följande exemplen skall närmare visas. Här kan vara tillräckligt erinra, att om t. ex. $\varrho = f(x)$ skall vara uttrycket för krökningsradien i en ellips, hvars ena axel är parallel med x-axeln, så är funktionen ϱ inskränkt af vilkoret, att i frågan gälla endast mellan de värden på x, som motsvara den nämnda figuraxelns ändpunkter, äfven

om $f(x)$ i sin allmänna betydelse skulle hafva reela värden utanför dessa gränser.

Hvarje funktion har således åtminstone *två* slutpunkter. Bland en entydig funktions maximi- och minimivärden räkna vi nu alltid dess värden i slutpunkterna, derföre att dessa värden äro antingen större eller mindre än de närmaste i den kontinuerliga följd af värden, som slutpunkterna afsluta eller börja, så framt ej funktionen i närheten af dessa punkter är en blott konstant, såsom t. ex. $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, i hvilket fall dess värden i slutpunkterna dock åtminstone kunna sägas vara *lika* med ett funktionens största eller minsta värde.

En entydig funktion $y = f(x)$ har alltså maximi- eller minimivärde

a) i alla slutpunkter, eller för sådana x-värden, från hvilka räknadt en kontinuerlig följd af reela funktionsvärden ansluter endast åt *ena* sidan;

b) för alla öfriga x-värden, der funktionsvärdet $f(x)$ är på samma gång antingen större eller ock mindre än de åt *begge* sidor i kontinuerlig följd närmast anslutande reela värdena.

Man kan anmärka, att vanligen endast de under b) upptagna värdena räknas som en funktions maxima och minima. Häraf blir bland annat den följd, att funktioner skulle finnas, som hade hvarken maxima eller minima, ett antagande, som åtminstone strider emot språkbruket, eftersom det är tydligt, att hvarje funktion måste — om den ej är rentaf en konstant — hafva ett största och ett minsta värde. Då slutpunkterna medtagas, får hvarje funktion minst ett maximum och ett minimum. De cyklometriska funktionerna arc sin x, arc cos x o. s. v. erbjuda exempel på funktioner, hvilkas reella maxima och minima finnas endast i slutpunkterna.

Gå vi nu till uppsökandet af alla dessa under a) och b) definierade maxima och minima, så finna vi först, att slutpunkterna för $y = f(x)$ måste anses omedelbart gifna genom funktionens definition.

Hvad åter de maximi- och minimi-punkter beträffar, från hvilka räknadt funktionen åt begge sidor har en kontinuerlig följd af reela värden, så motsvarar värdet $x = a$

ett *maximum* för $f(x)$, om $f(a-h) < f(a) > f(a+h)$ . . (1),
ett *minimum* » » » $f(a-h) > f(a) < f(a+h)$ . . (2),
då h är en positiv qvantitet huru liten som helst.

Man har alltså att uppsöka *alla* värden på x, som hafva denna analytiska karakter. De erhållas genom följande betraktelse:

Af definitionen på funktionens $y = f(x)$ *derivata*

$$y' = f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

följer omedelbart, att derivatan $f'(x)$ för hvarje värde på x angifver genom sitt tecken, om funktionen $f(x)$ vid detta värde på x *tillväxer* med x, eller *aftager*, när x växer. Det förra eger nämligen rum, när derivatan har *positivt* värde, det senare, då den är *negativ*. Som nu den analytiska karakteren (1) af ett värde $x = a$, som motsvarar ett *maximum* för $f(x)$, var, att $f(x)$ vid passerandet af detta värde öfvergår från *växande* till *aftagande*, så kan denna analytiska karakter ersättas med den lika gällande, att funktionens derivata $f'(x)$, då x under växande passerar ett sådant värde a, *vexlar tecken*, så att den öfvergår från *positivt* till *negativt* värde. På samma sätt finner man, att den analytiska karakteren (2) på ett minimum för $f(x)$ kan ersättas med den, att $f'(x)$, när x under växande passerar ett sådant ställe, *vexlar tecken*, så att den från att vara *negativ* öfvergår till att vara *positiv*.

För att finna *alla* sådana maximi- och minimiställen för den entydiga funktionen $y = f(x)$, från hvilka räknadt denna har kontinuitet åt begge sidor, är alltså nödvändigt och tillräckligt att uppsöka alla värden $x = a$, för hvilka derivatan

$f'(x)$ *vexlar tecken.*

Sker denna teckenvexling (för växande x) från + till −, så har $f(x)$ ett *maximum* på detta ställe; sker den från − till +, så har $f(x)$ ett *minimum*.

För att åter finna alla de värden, för hvilka $f'(x)$ *vexlar tecken*, erinras, att denna teckenvexling kan ske endast på tvenne sätt, nämligen antingen genom *kontinuerlig* öfvergång från det ena tecknet till det andra, d. v. s. genom passerande af nollvärde, eller ock på *diskontinuerligt* sätt. Det är således tillräckligt att upplösa eqvationen

$$f'(x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

och derjemnte angifva de ställen, der

$$f'(x) \text{ är } \textit{diskontinuerlig}.$$

Uttagas sedan bland dessa x-värden de, för hvilka *teckenvexling* af $f'(x)$ eger rum, så har man nödvändigt *alla* maxima och minima; nämligen *maxima* de, för hvilka teckenvexlingen för växande x eger rum från + till −, *minima* de, för hvilka den eger rum från − till +.

Härmed är teorien fullständig. Det kan dock, som man vet, någon gång vara besvärligt nog att direkt undersöka, *om* och *huru* teckenvexling af $f'(x)$ eger rum för de x-värden, som äro rötter till eqvationen (3). Det bekanta hjelpmedlet, som ofta lättare leder till målet, kan härledas på följande sätt.

Skall en rot $x = a$ till eqv. (3) kunna motsvara ett maximum för $f(x)$, så är nödvändigt och tillräckligt, att $f'(x)$ öfvergår genom nollvärdet $f'(a)$ från positivt till negativt värde d. v. s. går i *aftagande*, när x växer. Men denna bestämning på $f'(x)$ ersättes af den, att dess derivata $f''(x)$ är *negativ* för $x = a$. På samma sätt inses, att, om $f''(x)$ för en rot till eqv. (3) är *positiv*, så motsvarar denna rot ett *minimum* för $f(x)$. Alltså:

de bland rötterna till $f'(x) = 0$, som göra $f''(x) < 0$, motsvara *maxima* för $f(x)$;

» » » » $f''(x) > 0$, motsvara *minima* för $f(x)$.

Skulle åter en rot $x = a$ till $f'(x) = 0$ ej gifva bestämdt tecken åt $f''(x)$, d. ä. skulle den äfven göra $f''(x)$ till noll, så är frågan, om värdet $x = a$ ger ett maximum eller minimum eller ej, på denna väg ännu oafgjord. Vill man det oaktadt ej *direkt* undersöka tecknen för $f'(x)$ å ömse sidor om nollvärdet $f'(a)$, så kan man fortgå sålunda. Om $x = a$ skall kunna ge maximum eller minimum, så måste $f'(x)$ vara antingen *aftagande* eller ock *växande*, då x passerar detta värde (eftersom $f'(x)$ ju då måste vexla tecken). Men då måste dess derivata $f''(x)$, som enligt antagandet äfven blef $= 0$ för $x = a$, hafva *samma* tecken å ömse sidor om detta nollvärde $f''(a)$. Har den ej det, så vexlar ej $f'(x)$ tecken, och $x = a$ ger hvarken maximum eller minimum; har den det åter, så anger detta tecken, om det är $-$, ett *maximum*, om det är $+$, ett *minimum* för $f(x)$. Vill man ej heller göra denna undersökning direkt, så är klart, att om $f''(x)$ skall kunna hafva *samma* tecken å ömse sidor om värdet $f''(a) = 0$, så är detta nollvärde ett maximum eller minimum för $f''(x)$, hvartill åter fordras, att $f'''(x)$ *vexlar tecken*, d. ä. antingen passerar noll med teckenvexling eller ock är diskontinuerlig med olika tecken för de begge värdena. Sker intetdera, så kan ej $f'(x)$ vexla tecken. Är åter $f'''(x) = 0$, så afgör $\overset{(4)}{f}(x)$, om den får bestämdt tecken, huru teckenvexlingen af $f'''(x)$ eger rum. Blir äfven $\overset{(4)}{f}(x) = 0$, så är frågan ännu oafgjord, och det nu tillräckligt antydda förfarandet kan upprepas, ifall man ej föredrager den direkta undersökningen.

(Forts.)

Problem, löst af student E. Lundberg.

(Ur Géom. Anal. par Briot et Bouquet, éd. 4, Livre II, Excerc. 16).

Tvenne fasta cirklar (EeF, GgH, fig. 2, 4, 6) *äro gifna. Två rörliga cirklar tangera såväl hvarandra som de båda gifna cirklarne. Att finna locus för de rörliga cirklarnes tangeringspunkt.*

Det är till att börja med tydligt, att man genom hvarje punkt på endera af de gifna cirklarne kan draga tvenne olika tangerande cirklar, som tillika tangera den andre af de båda gifna cirklarne. *De gifna cirklarne höra således till locus.* När vi derföre i det följande tala om, hvad locus är, underförstå vi alltid, äfven om detta ej uttryckligen nämnes, att till locus dessutom höra de gifna cirklarne.

Tag på centrallinien CD tvenne punkter A och B så belägna, att

$$AC : CF = AD : DH$$

och

$$BC : CF = BD : DG,$$

så är det tydligt, att, *om man genom A och B huru som helst drager kordor till båda cirklarne, så blifva radierna, som dragas till dessas ändpunkter, parallela två och två ($Ce // Dg$, $Cf // Dh$, $Cf' // Dg'$, $Ce' // Dh'$).* Kan man genom någon af punkterna A och B draga en tangent till någondera cirkeln, så måste den äfven vara en tangent till den andre.

Om c är skärningspunkten mellan Cf och Dg samt d skärningspunkten mellan Ce' och Dg', så är tydligen $cf = cg$ och $de' = dg'$ (tillfölje deraf, att basvinklarne äro lika stora). Med c och d till medelpunkter kan man således upprita cirklar afg och $be'g'$, som tangera de fasta cirklarne i f' och g samt i e' och g'. Häraf inses, att, *om en cirkel tangerar de båda gifna cirklarne, så ligga tangeringspunkterna i samma räta linie med endera af punkterna A och B.*

Drages genom A en tangent Aa till cirkeln afg, så är $\overline{Aa}^2 = Af \,.\, Ag$. Men, emedan $Ce // Dg$ och $Cf // Dh$, så är $Ae : Af = Ag : Ah$ eller $Ae \,.\, Ah = Af \,.\, Ag$. Dessutom är $\overline{AM}^2 = Ae \,.\, Af$ och $\overline{AN}^2 = Ag \,.\, Ah$, d. v. s. $AM \,.\, AN = \sqrt{Ae \,.\, Af \,.\, Ag \,.\, Ah} = Af \,.\, Ag$. Således är $\overline{Aa}^2 = AM \,.\, AN$, d. ä. *$Aa$ är medelproportional mellan AM och AN.*

Om man från B drager till cirkeln $b'e'g'$ en tangent Bb, så bevisas likaledes, på grund af att $\overline{Bb}^2 = Be' . Bg'$, $\overline{BK}^2 = Be' . Bf'$ och $\overline{BL}^2 = Bg' . Bh'$, att *$Bb$ är medelproportional mellan BK och BL.*

För hvarje läge af linien Af är afståndet Aa detsamma. Om man drager en ny cirkel, som utom det, att den tangerar de gifna cirklarne, äfven tangerar Aa, så är det derföre tydligt, att den punkt, der denna cirkel tangerar Aa, måste vara samma punkt a, der afg tangerar Aa. De båda cirklarne tangera derföre hvarandra i a, hvadan denna punkt hör till locus, alldenstund afståndet Bb är konstant.

Locus är således (utom sjelfva de gifna cirklarne) *tvenne cirklar, af hvilka den enes medelpunkt ligger i A och den andres i B. Den förra cirkelns radie är medelproportional mellan tangenterna AM och AN, och den andres, medelproportional mellan de mot centrallinien vinkelräta halfkordorna BK och BL.*

Båda dessa cirklar förefinnas samtidigt, om cirklarne skära hvarandra (fig. 4). Ligga deremot cirklarne utom hvarandra (fig. 2), så kan man ej i dem genom B draga några mot centrallinien vinkelräta kordor, hvarföre locus i detta fall endast utgöres af den cirkeln, som har A till medelpunkt, hvaremot den andre försvinner. Ligger åter den ene af de gifna cirklarne helt och hållet inom den andre (fig. 6), så kan man ej genom A draga några tangenter till dessa cirklar, och i detta fall försvinner derföre den cirkel, som skulle hafva haft A till medelpunkt, och locus kommer endast att utgöras af cirkeln med B till medelpunkt.

(Forts.)

Satser af student E. Lundberg.

1. Till en hyperbel, som vrider sig kring sin medelpunkt, drager man tangenter genom de punkter, der den skär

en fast rät linie. Sök orten för dessa tangenters skärningspunkt.

2. Att konstruera en parabel,
   a) som går genom fyra gifna punkter,
   b) som tangerar fyra gifna räta linier.

AFDELNING III.

Michaël Faraday.

För enhvar, som än aldrig så litet sysselsatt sig med studiet af fysiken, torde *Faradays* namn vara bekant. Denne man, som slutligen blef icke blott Englands utan måhända hela Europas förnämste fysiker, ledde sitt ursprung från föräldrar inom den arbetande klassen. Han var född i närheten af London 1791, njöt undervisning till sitt 13:de år i en mindre skola och sändes sedan i bokbindarelära. Under denna tid inhemtade han ur några till bindning lemnade böcker de första grunderna för en elektricitetsmaskins verkningar och gaf sig ingen ro, förrän han sjelf konstruerat sig en dylik apparat. En lycklig händelse gjorde, att *Faraday* vid den tiden fick åhöra några föreläsningar af den namnkunnige Sir *Humphry Davy*, och det intryck, han dervid erfor, afgjorde hans framtida öde. Från detta ögonblick låg nämligen hans håg uteslutande åt vetenskapliga sysselsättningar, och *Davy* antog honom på hans egen begäran 1813 till assistent vid laboratoriet i Royal Institution i London. Till en början var *Faraday* blott och bart medhjelpare åt den ryktbare kemisten, men från och med 1820 uppträdde han såsom vetenskapsman på egen hand. Han blef slutligen professor vid sagde Royal Institution, der han stadnade till sin död sistlidne 25 Augusti.

Faraday var med rätta berömd såsom en ypperlig föreläsare; såsom författare var han måhända mindre lycklig, om man fäster sig vid den formella behandlingen af ämnet. Hans föreläsningar, der några matematiska deduktioner aldrig förekommo, utgjordes af en sammanhängande, med yttersta omsorg vald serie af handgripliga experimenter; och under den välvillige lärarens ledning blef det för åhöraren sålunda lätt att bilda sig en rigtig föreställning om de naturkrafter, hvilkas verkningar de anstälda experimenten voro ämnade att tydliggöra. Inträffade det vid dessa tillfällen, der vi räknat omkring 50 experiment under en föreläsning, att något af dem misslyckades, lät *Faraday* detta aldrig förbrylla sig; han begagnade sig tvärtom äfven deraf för sina åhörares undervisning, i det han för dem uppvisade orsaken, hvarför experimentet ej utfallit efter önskan.

Vid jultiden hållas inom Royal Institution hvarje år sex för yngre personer ämnade föreläsningar, hvilka, isynnerhet då *Faraday* var föreläsare, med nöje följdes äfven af en mängd gråhårsmän. Hände det då, att han för sina yngre åhörares räkning anstälde något putslustigt experiment, som uppväckte deras munterhet, ty *Faraday* var road af dylikt, och denna någon gång öfversteg de gränser, han kanske åsyftat, voro hans varningsord »låtom oss vara allvarsamma» tillräckliga att återföra dem till allvarlig uppmärksamhet, och ur det experiment, som nyss förefallit såsom ett lekverk, drog han nu fram en hel mängd fakta, som gåfvo åhörarne rik anledning till eftertanke. Det var med förkärlek *Faraday* höll dessa för ungdomen beräknade föreläsningar, ty, sade han, »denna ålder är mest fördomsfri, och dess sinne således mest mottagligt för naturens sanningar.»

Under hans föreläsningar var det icke blott den utmärkt skicklige experimentatorn, man hade tillfälle att lära känna; åhöraren tilläts dervid äfven blicka in i den flärdfria, rena och älskvärda karakter, som ständigt och i så hög grad utmärkt *Faraday.*

Såsom vetenskapsman intager *Faraday* ett särdeles framstående rum. Hela kapitel af fysiken ha före honom icke funnits till, och förnämligast gäller detta inom vissa delar af elektricitetsläran. Hans upptäckter voro derjemnte af den art, att de nästan alla ej blott kommit vetenskapen till godo, utan äfven visat sig användbara i det praktiska lifvet. Så till exempel finna vi dem använda vid fråga om sprängning af berg och tunnlar, vid elektrisk telegrafering, vid eklärering af fyrbåkar, vid elektricitetens användning för medicinskt behof, m. m. Men oaktadt *Faraday* utan tvifvel sjelf insåg, att dessa upptäckter skulle kunnat bli honom inkomstbringande, drog han aldrig någon ekonomisk fördel af dem; — der han hade sått, tillät han andra att skörda.

Faradays upptäckter. *

1. Gasers förvandling till vätskor.

På grund af sina undersökningar om gasernas förvandling till vätskor kunde *Faraday* med bestämdhet påstå, att gaserna endast i det afseendet skilja sig från ångorna, att de under vanliga förhållanden äro *långt aflägsna* från sin mättningspunkt, medan ångorna äro *nära* sin. Ty de vanligen s. k. ångorna öfvergå till vätskor vid vanligt tryck och temperatur, men de s. k. beständiga gaserna erfordra särdeles låga temperaturer och starkt tryck för att bringas i flytande tillstånd. Före Faraday hade man verkligen lyckats kondensera ammoniakgas, klor och svafvelsyrlighet genom användning af intensiv köld och starkt tryck, men honom lyckades det att medelst enkla apparater i betydlig mån minska antalet af de gaser, som dit-

* Jfr *Revue des deux Mondes* d. 15 Okt. 1867.

tills motstått kondensering. Vid fortsättningen af sina försök begagnade han en köldblandning, som utgöres af ether och kolsyra i fast form, hvars temperatur i luften är -90^0 och i tomrummet nedgår till 110 grader under vattnets fryspunkt. Medelst denna köldblandning och 50 atmosferers tryck gjorde Faraday nya eröfringar inom de beständiga gasernas område, så att det nu återstår endast 5 gaser, hvilka trotsat alla hittills använda medel för att bringa dem till vätskor; de äro: *väte*, *syre*, *qväfve*, *koloxid* och *qväfoxid*.

2. Induktionsströmmarne.

En elektrisk ström, benämnd *induktionsström*, uppväckes i hvarje sluten metallisk ledare, då man till densamma *närmar* eller derifrån *aflägsnar* vare sig en magnet eller en elektrisk ström af oföränderlig styrka, äfvensom då vid oförändradt afstånd *styrkan* hos magneten eller hos den elektriska strömmen *ökas* eller *minskas*. När den inducerande kraften aflägsnas eller till sin styrka minskas, blir induktionsströmmens rigtning motsatt mot hvad den är, då kraften närmas eller får sin styrka förökad. Inom en och samma ledare kan äfven den ena delen uppväcka dylika strömmar i den andra, och dessa kallas då *extraströmmar*.

Dessa af *Faraday* 1831 och derefter bekantgjorda lagar gåfvo förklaring på den s. k. rotationsmagnetismens fenomener, hvilka man dittills ej rätt kunnat förstå. Dessa bestå deri, att en jernfri metallskifva kan utöfva inverkan på en närbelägen magnetnål och omvändt, då endera af dem befinner sig i rörelse. Orsaken härtill är den, att magneten uppväcker induktionsströmmar i skifvan, hvilka sedan i sin ordning återverka på magneten. Vid konstruktion af galvanometrar och kompasser har man häraf gjort en särdeles vigtig användning, när man, för att få den i rörelse satta magnetnålen att hastigt återgå till hvila, omgifver den med tjocka metallringar. Denna vexelverkan mellan magneter och induktionsströmmar uppträder under en särdeles egendomlig form, då man mellan polerna på en stark elektromagnet bringar en metallskifva i rotation, ty öfverlemnas skifvan då åt sig sjelf, stadnar hon nästan ögonblickligt i sin rörelse, liksom kompassnålen i sin metalldosa, men öfvervinner man med tillräcklig kraft det starka motstånd, som magneten utöfvar, och verkligen påtvingar skifvan en fortfarande rotation, så upphettas hon så betydligt, att *Joule* på detta sätt kunnat nedsmälta en skifva af bly.

I teoretiskt hänseende måste upptäckten af induktionsströmmarne naturligtvis anses särdeles betydelsefull, men man skulle, åtminstone vid första påseende, kunna fråga, huruvida den med hänsyn till det praktiska kunnat vara af någon synnerlig vigt, då man väl hellre borde begagna den direkta och oafbrutet verkande strömmen från staplarne, än den på omvägar erhållna inducerade, hvars verkningar äro diskontinuerliga. Men skilnaden är den, att induktionsströmmen ej blott eger de egenskaper, som tillkomma strömmarne från stapeln, utan derjemte friktionselektricitetens utomordentligt stora tension. Induktionsströmmarne representera således på sätt och vis föreningen af de båda slagen af elektricitet, nämligen staplarnes *dynamiska* med stor elektricitetsmängd, och den *statiska* med dess starka gnistor.

Medelst induktionsapparaterna kan man nu ögonblickligen och på ett nära nog kontinuerligt sätt erhålla lika kraftiga gnistor, som från de gamla friktionsmaskinerna, utan att på ett tidsödande sätt behöfva ladda ett stort antal Leydiska flaskor. Dessa strömmar gifva allt, hvad man med stapelns tillhjelp och förmedelst friktionsmaskinen kan vinna, nämligen attraktioner, repulsioner, gnistor, värme, ljus, kemisk verkan, nervösa stötar, magnetisering af jern m. m., och de ha äfven blifvit oumbärliga för vetenskapen, industrien och krigskonsten. Den Ruhmkorffska apparaten, hvars verkningar äro jemförbara med åskans, är verldsbekant; för vetenskapligt behof användes den förnämligast vid spektral-analysen, och inom krigskonsten begagnas den för minors antändning. De magneto-elektriska maskinerna lemna induktionsströmmar, i det man till en sluten ledare alternativt närmar och aflägsnar polerna på en magnet. Under verldsexpositionen i Paris sistlidne sommar fick man om aftnarne se elektriskt ljus utsändas från tvenne fullständiga, i parken uppstälda fyrbåkar. Ljuset, som här frambragtes genom en med ångkraft drifven magneto-elektrisk maskin, var bländande hvitt och visade, vid jemförelse med det matta gula ljus, som en närbelägen fyrbåk af vanliga slaget samtidigt utsände, huru vigtig upptäckten af induktionsströmmarne varit äfven för sjöfarten. En lika vigtig användning af dessa strömmar finna vi äfven vid fråga om telegrafering, ty vid de vanliga jernvägstelegraferna är det dessa, och icke strömmar från staplar, som begagnas. Slutligen hafva under aldra sista tiden *Wheatstone* och *Siemens* konstruerat induktionsapparater, medelst hvilka man på det mest omedelbara sätt kan förvandla mekanisk rörelse i magnetism och dynamisk elektricitet, och det synes verkligen vara omöjligt att ana, till hvilka vigtiga resultater *Faradays* upptäckt af induktionsströmmarne slutligen skall leda.

(Forts.)

Satser.

Följande redan af *Galileus* funna sats anse vi såsom allmänt bekant.

Falltiden för en partikel längs den vertikala diametern hos en cirkel är lika stor med falltiden längs en korda hvilken som helst, blott hon drages från den högsta eller lägsta punkten hos sagde diameter.

Med tillhjelp af denna sats kunna lösningar finnas till följande problem.

Sök läget för den *råta* linie, längs hvilken en partikel faller utan begynnelsehastighet på *kortaste* tid

1. från en gifven punkt till en gifven rät linie;
2. från en gifven rät linie till en gifven punkt;
3. från en gifven punkt utanför en gifven cirkel till cirkeln;
4. från en gifven cirkel till en gifven punkt utanför densamma;
5. från en gifven punkt inom en gifven cirkel till cirkeln;
6. från en gifven cirkel till en gifven punkt inom densamma.

AFDELNING IV.

Anmälan af tre femställiga logaritmtabeller.

1. Broch, Logarithmetabel med fem decimaler, udgiven til Skolebrug. Christiania 1865. 32 sidd. 8:o. Pris: 30 öre r:mt.
2. Schlömilch, Fünfstellige Logarithmische und Trigonometrische Tafeln. Braunschweig 1866. 170 sidd. 8:o. Pris: 1 r:dr 90 öre.
3. Wackerbarth, Femställiga logarithmtabeller. Upsala 1867. 224 sidd. liten oktav. Pris: 2 r:dr r:mt.

Ifrågavarande trenne tabeller utmärka sig, såsom sjelfva namnet antyder, framför de hos oss vanligen begagnade sjuställiga logaritmtabellerna (af Vega-Hülsse, Vega-Bremiker, Köhler, Schrön) derigenom, att de hafva endast fem decimaler. Deras nästan samtidiga utgifvande i tre länder antyda ett på flere håll kändt behof af sådana tabeller. Vid första påseendet tyckes det besynnerligt, att man skall behöfva tabeller, som äro mindre noggranna än de, hvilka man förut har. Men denna besynnerlighet försvinner snart, då man får veta, att begagnandet af sjuställiga logaritmtabeller i de flesta fall förutsätter noggrannare observationsdata, än våra nuvarande resurser medgifva. Sjelfva astronomerna använda derföre vanligen de enkom för deras räkning utgifna Bremikers sexställiga logaritmer; fysici göra vid beräkningar af ljusvåglängder, hvilka erfordra ytterst fina mätningar, vanligen ej bruk af andra än femställiga logaritmer; mekanici behöfva vid beräkning af dimensionerna på längderna af de i deras byggnadsföretag förekommande delar endast femställiga logaritmer. Utom det att således i flertalet af fall sjuställiga logaritmer för praktiken äro öfverflödiga, medför deras begagnande en onödig tidsspillan. Det erfordrar tydligen mera tid att finna ett tal i en större bok än i en mindre, mera tid att skrifva ett större tal än ett mindre, mera tid att räkna med större tal än med mindre. Vidare riskerar man lättare att begå ett räknefel vid vidlyftiga än vid enkla räkningar. I pedagogiskt hänseende kan det ej vara mera lärorikt att begagna stora tal än små. De små talen fattas lättare än de stora och afleda tanken ej så lätt från hufvudsaken som de stora. Inlärandet af logaritmer blir ofta afskräckande vid anblicken af den digra bok, hvari de innehållas. På grund af allt detta anse vi utgifvandet af ofvannämnda tre tabeller såsom en nationalvinst.

Med detta hafva vi ej velat säga, att sjuställiga logaritmtabeller äro öfverflödiga. Så t. ex. kunna vi ej undvara dem vid räkningar med sammansatt ränta på flera år och i allmänhet ej vid räkningar, der man på ett uppgifvet datum gör itererade räkneoperationer, hvarigenom ett fel i början vid hvarje följande operation förstoras.

Vi gå nu till redogörandet för våra tre i öfverskriften omtalade tabeller.

Brochs tabell.

Denna tabell innehåller mantissorna för de briggiska logaritmerna för tal från 1000 till 10000 jemnte tillhörande proportionaldelar, vidare logaritmerna för de trigonometriska funktionerna för hvarje minut från 0° till 2°, för hvar femte minut från 2° till 11°, för hvar tionde minut från 11° till 45° jemte differenserna för en minut. Slutet af tabellen innehåller några sjuställiga logaritmer i och för räkningar med sammansatt ränta från och med 1 procent till och med $5\frac{1}{4}$ procent. Vidare äro de sjuställiga logaritmerna för talen π, e och 2 angifna. Såsom skolbok anse vi denna tabell synnerligen lämplig. Vi skulle dock önskat, att denna tabell vid de trigonometriska logaritmerna begagnat karakteristikerna 1, 0, $\bar{1}$, $\bar{2}$, . . i st. f. de använda 11, 10, 9, 8, . . äfvensom att den upptagit de naturliga sinus, kosinus, tangenterna och kotangenterna med åtminstone tre decimaler.

Schlömilchs och Wackerbarths tabeller.

Vi taga dessa tabeller tillsammans, alldenstund de begge hafva samma ändamål, nämligen att gagna dels vid skolundervisningen och akademien, dels vid räkningar för vetenskapliga eller mera praktiska ändamål.

1. S:s tabeller äro i det närmaste en afkortning af Schröns sjuställiga logaritmer, hafva liksom dessa lika höga siffror, äro liksom dessa tryckta på ett utmärkt vackert papper, hafva liksom dessa ett minusstreck under den sista decimalen, då denna är uppkommen genom ökning.

W:s tabeller, hvilka till formatet (fickformat) likna Lalande's, påminna i typografiskt hänseende om Bremikers tabeller genom sina olika höga siffror. Siffrorna 3, 4, 5, 7, 9 skjuta nämligen nedom linien, siffrorna 6 och 8 deremot höja sig ofvanom densamma. Härigenom särskiljas siffrorna lättare från hvarandra, t. ex. 1 från 4, 0 från 6. Om W:s tabeller i detta afseende stå framför S:s, så hafva deremot oneckligen S:s tabeller företräde framför W:s genom markerandet af sista decimalens beskaffenhet att vara för stor eller för liten. Om t. ex. man skall dividera 9852$\underline{5}$ med 2, blir qvoten efter W:s tabell 49263 (åtminstone enligt det vanliga bruket), men enligt S:s rigtigare 49262. Låt vara att i praktiken resultaten i det närmaste sammanfalla, så kännes det dock angenämare att räkna med pålitligare siffror.

2. Begge tabellerna innehålla femställiga briggiska logaritmer för talen 1 till 10000 jemnte tillhörande proportionaldelar. Derefter upptaga S:s tabeller de sexställiga logaritmerna för talen 10000 till och med 10909 i och för ränteberäkningar ända till 9,1 procent. W:s tabeller upptaga för samma ändamål de sjuställiga logaritmerna för talen 10000 till och med 10999 (duga således ända till 10 procent). Emedan S:s tabeller här äro sexställiga, men W:s sjuställiga, kunna den förres användas vid beräkning af ränta på ränta endast för 10 år, den senares deremot för till och med 100 år. I ränteformeln

$$S = k(1 + r)^n$$

blir för $n = 10$ genom multiplikation decimalkommat framflyttadt ett steg till höger, men för $n = 100$ framflyttas det 2 steg. En sexställig logaritm blir alltså redan för $n = 10$ förvandlad till femställig, en sjuställig deremot blir femställig först för $n = 100$.

Här sidd. 32—36 har W. vidfogat en kolumn, hvarigenom man utan svårighet kan finna en sjuställig logaritm för ett tal hvilket som helst mellan 1 och 10000. Detta är synnerligen fördelaktigt, om man ej har till hands en sjuställig logaritmtabell.

3. S:s och W:s tabeller upptaga begge naturliga logaritmer med 5 decimaler. De skilja sig derutinnan, att S:s tabeller gälla blott för talen 1 till 100, men W:s för talen 1 till 10000. Dessa tabeller komma ofta till gagn vid studiet af differential- och integralkalkylen, der, som bekant, nästan inga andra logaritmer förekomma.

4. S. och W. hafva begge de naturliga sinus, kosinus, tangenter

och kotangenter från 0° till 45° med den skilnad, att S. har dem från 0° till 1° med 7 decimaler, från 1° till 5° med 6 decimaler, från 5° till 45° med 5 decimaler, hela vägen för hvar tionde minut, då W:s tabell deremot angifver dessa funktioners värden i blott tre decimaler öfverallt, och detta för hvar tionde minut till 5°, för hvar 20:de till 15° och sedan för hvar 30:de. Upptagandet af de naturliga sinus anse vi synnerligen fördelaktigt för våra skolor, der vi ofta nödgas studera mekanik och trigonometri utan att förut hafva kunskap om logaritmer. Dessutom fäster sig betydelsen af sinus och kosinus mycket skarpare i minnet genom att räkna med dem sjelfva i st. f. med deras logaritmer.

5. Om på de naturliga trigonometriska funktionerna S. nedlagt större arbete än W. (ehuru för vanliga praktiska behof W:s 3 decimaler äro fullt tillräckliga), så blir dock vid dessa funktioners logaritmer förhållandet omvändt. S:s logaritmer för de trigonometriska funktionerna gå nämligen endast från minut till minut. W:s deremot gå från sekund till sekund från 0° till 10′, från 10 till 10 sekunder emellan 0° och 5°, från minut till minut ända till 45°. Derjemnte utmärka sig W:s tabeller ej blott framför S:s utan framför alla andra derigenom, att de utvisa den båge, som svarar emot en bestämd trigonometrisk funktion ej allenast, då bågen slutar i första qvadranten, utan äfven då han slutar i någon af de tre öfriga, äfvensom derutinnan (och det måhända den förnämsta förtjensten), att de alltigenom äro beledsagade af interpolationstabeller, som angifva korrektionerna för sekunderna. Mot W:s tabeller vilja vi här i förbigående anmärka, att han i öfverskriften begagnat uttrycket sin., tan., o. s. v. i st. f. log sin. log tan., o. s. v.; emot både W:s och S:s anmärka vi, att de begagnat karakteristikerna 9, 8, o. s. v. i st. f. $\bar{1}$, $\bar{2}$. I pedagogiskt hänseende äro desa små förändringar af ej ringa betydelse.

6. Begge hafva tabeller för qvadratrötter ur tal och för vanliga bråks förvandling till decimalbråk, ehuru hos S. detta gäller blott för tal eller nämnare, som äro mindre än 100, då deremot W. har utsträckt tabellen för tal och nämnare ända till 1000.

W. har en tabell för primtalen under 1000, en för qvadraterna på talen 1 till 1000. Dessa tabeller har S. ej ansett förtjenta af att upptagas. I stället har han en tabell för kubikrötterna ur talen 1 till 100. Denna åter har W. ansett kunna undvaras.

S. har en tabell uttryckande längden på ellipsqvadranten i halfva storaxeln såsom enhet för värden på halfva lillaxeln mellan 0 och 1. En sådan tabell har W. ansett öfverflödig. I stället har han en tabell upptagande

$$\log 1.2.3.4\ldots x,\quad \log 1.3.5\ldots x \quad \text{och} \quad \log 2.4.6\ldots x,$$

den första för värden på x från 1 till och med 99, den andra från 1 till och med 65, den tredje från 1 till och med 66. Dessa logaritmer äro ofta till nytta i sannolikhetskalkylen, i binominalräkningar och i teorien för definita integraler.

7. Begge innehålla en mängd fysiska och kemiska konstanter. W. upptager dessutom de vigtigaste astronomiska konstanterna. Många af dessa har W. erhållit af prof. Edlund och den engelske astronomen Airy. Vidare har W. en tabell för höjdmätning medelst barometer. Vid många af de fysiska konstanterna har W. vidfogat empiriska formler, allt på grund af de nyaste forskningar och resultater, till hvilka vetenskapen hunnit. Genom dessa formler och konstanter blifva tabellerna särdeles nyttiga vid fysiska och astronomiska räkningar.

För lättare öfversigts skull vilja vi sammanfatta det om S:s och W:s arbeten sagda i några få rader.

Begge tabellerna hafva stora förtjenster genom att i en bok af ringa omfång upptaga utom femställiga logaritmer för tal och trigonometriska funktioner äfven de naturliga sinus, tangenter, o. s. v.; genom att införa sjuställiga logaritmer, der sådane befinnas vara af nöden, genom att angifva de hyperboliska logaritmerna, genom tabeller för qvadratrotutdragning, för vanliga bråks förvandling till decimalbråk och genom tabeller för en mängd fysiska och kemiska konstanter. I de flesta nu uppräknade fallen äro dock W:s förtjenster öfvervägande, i det att han har flere sjuställiga logaritmer, flere trigonometriska logaritmer, flere tal för rotutdragning, flere tal för förvandling af vanliga bråk till decimalbråk, flere konstanter (W. har nämligen äfven astronomiska). Vidare utmärker sig W. genom sin lilla hjelptabell, medelst hvilken man utan svårighet kan finna en sjuställig logaritm för ett tal hvilket som helst från 1 till 10000, äfvensom företrädesvis för sina interpollationstabeller inom hela det trigonmetriska området.

De delar, hvaruti Schlömilchs tabeller åter öfverträffa Wackerbarths, äro uti tabellerna för natural-sinus (en i femställiga tabeller något problematisk förtjenst), i markerandet af den sista decimalens beskaffenhet att vara för hög eller för låg och i trycket på vackrare papper.

Professor Wackerbarths egenskap att vara astronomisk kalkylatör*, att vara en såväl i fysik som i den rena matematiken utmärkt väl bevandrad man lemnar oss en borgen för, att hans tabeller innehålla just det noggrannt, som behöfver vara det. Hans tabeller vittna om ett med största omsorg utfördt arbete, och vi kunna ej annat än på det varmaste rekommendera detta arbete till antagande i hela den civiliserade verlden**.

---

* Prof. W. har utgifvit tvenne arbeten, det ena om planeten Neptuni, det andra om asteroiden Ledas perturbationer. Sina nu utgifna tabeller har han tillegnat astronomie professoren Adams, hvilken, såsom bekant, samtidigt med Leverrier förutsade, hvar den då obekanta planeten Neptunus på himlahvalfvet skulle uppsökas.

** En ny upplaga af W:s tabeller är snart att förvänta.

Schlömilch är ett i Sverige väl kändt och värderadt namn. Knappast finnes härstädes någon matematiskt bildad person, som ej har att tacka honom eller rättare hans arbeten för mycket af hvad han kan. Vi känna oss derföre liksom litet beslägtade med honom och vilja gerna tillegna oss hans, att jag så må säga, populära alster. Hans tabeller komma utan tvifvel att blifva ett öfverallt gångbart mynt. Dock kunna vi ej, på grund af hvad ofvan är yttradt, gifva dem högre rum än det näst efter Wackerbarths.

Professor Brochs arbeten äro tyvärr i Sverige ej på långt när så mycket lästa, som de förtjena. Vi känna honom dock dels genom hans ordförandeskap i den matematiska sektionen vid det sista naturforskaremötet, dels genom hans framstående läroböcker i elementargeometrien, algebran, differentialkalkylen, deskriptiva geometrien, genom hans afhandlingar i de elliptiska funktionerra, i den matematiska optiken, m. m. Hans logaritmtabeller vittna, att han vet att vid undervisning skilja hufvudsak från bisak. Undertecknad har med nöje och framgång användt dessa tabeller vid det läroverk, der jag har äran vara anstäld.

F. W. Hultman.

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1867.

För latinlinien.

1. *Dela en parallelogram midt i tu medelst en rät linie, som går genom en gifven punkt inom parallelogrammen.*

2. *Att konstruera en cirkel, hvars periferi är medelproportional mellan trenne gifna cirklars periferier.*

3. *En sexhörning är inskrifven i en cirkel. Att bevisa, det summan af den första, tredje och femte vinkeln är lika stor med summan af den andra, fjerde och sjette vinkeln.*

4. *Bevisa, att summan af qvadraterna på diagonalerna i en parallelogram är lika med summan af qvadraterna på hans 4 sidor.*

5. *Att af en indeterminerad rät linie afskära ett stycke, som förhåller sig till en gifven rät linie som* $\sqrt{3}$ *till* 1.

6. *Att i en gifven cirkel inskrifva 3 lika stora cirklar, som tangera hvarandra och den gifna cirkeln.*

7. *Att uppritu en triangel, då man känner en sida och de båda höjder, som svara mot de öfriga sidorna.*

---

8. *Af 2 silfverstänger, den ena innehållande 40 lod koppar och 60 lod rent silfver, den andra 20 lod koppar och 70 lod rent silfver, skall förfärdigas en bägare, som bör innehålla 10 lod koppar och 20 lod rent silfver, Hur många lod bör man taga af hvardera stången?*

9. Någon bjuder för en gård 5,000 r:dr kontant och 10,275 r:dr efter 6 månader. En annan vill gifva 7,000 r:dr kontant och 8,330 r:dr efter 9 månader. Säljaren anser båda anbuden lika goda. Hur stor procent beräknar han på sina penningar?

10. Bevisa, att om man till både täljare och nämnare i ett egentligt bråk adderar ett och samma hela tal hvilket som helst, så ökas derigenom bråkets värde.

11. Dela talet 16 i två delar, så att summan af deras positiva qvadratrötter blifver ett maximum.

12. Ur ett med vatten fyldt kärl, som har form af en med spetsen nedåt vänd kon af 4 tums höjd och 1 $^1/_2$ tums basradie, tömmes $^3/_4$ af innehållet på en cylindrisk flaska. Huru stor är hennes radie, om vattnet i henne efter påfyllningen står lika högt som återstoden af innehållet i det koniska kärlet?

13. Dela 9,555 i 6 delar, så att hvarje följande del blifver 4 gånger så stor som den föregående. Hvilka blifva delarne?

För reallinien.

14. Upprita en rektangel, så att den blifver lika stor med en gifven qvadrat och får två närliggande sidor tillsammantagna lika med en gifven rät linie.

15. Bevisa, att om en fyrsidig figur delas i 2 lika stora delar genom en af sina diagonaler, så skär denne äfven den andra diagonalen midt i tu.

16. Att upprita ett paralleltrapezium, då man känner de båda parallela sidorna och båda diagonalerna.

17. Dela en gifven fyrsidig figur midt i tu medelst en rät linie, som går genom någon af figurens vinkelspetsar.

18. Dela en gifven triangel midt i tu genom en rät linie, som drages parallelt med en gifven rät linie.

19. Att mellan periferierna af två gifna cirklar inpassa en rät linie af gifven längd, parallel med en gifven rät linie.

20. Att genom tvenne cirklars ena skärningspunkt draga en rät linie, som skär cirklarne så, att de afskurna segmenten blifva likformiga.

---

21. En köpmans handelsvinst var årligen lika med $^1/_4$ af den förmögenhet, som han egde vid årets början; hans lefnadsomkostnader uppgingo årligen till 2,900 r:dr. Efter tre år var han egare till 1 $^1/_2$ gång så stor förmögenhet, som då han började sin handel. Huru mycket egde han då?

22. Två koncentriska cirklars radier äro 1 fot och 2 fot; huru stor är då radien till en cirkel, som är lika stor med en ring, som inneslutes af de begge förra cirklarnes periferier?

23. Två koner äro gifna, hvilkas volymer äro 20 och 30 kubikfot; huru stor blir höjden i en tredje kon, hvars volym är lika med summan af de begge förras, och i hvilken bottenradien är 3 fot?

24. Hvad väger ett marmorprisma, hvars bas är en åttahörning med $0{,}7$ *fots sida och höjd 5 fot?*

Marmorns eg. vigt är $2{,}8$ *och vigten af en kub.-dec.-tum vatten* $1{,}971$ *lod.*

25. I en geometrisk progression utgöra tredje och fjerde termen tillsammantagna 180, och tionde och elfte tillsammantagna 393,660. Huru stora äro första termen och rationen?

26. En person eger 16,000 r:dr, utlånte till 5 procent. Som hans lefnadsomkostnader gå till 1,000 r:dr om året, nödgas han hvarje år bära upp någon del af kapitalet. Hvad eger han efter tio år?

27. I en triangel äro två sidor och mellanliggande vinkeln gifna. Den ena sidan är 8. den andra 10 fot. Vinkeln är 29 grader. Huru stor är den omskrifna cirkelns radie?

28. Angif kortaste afståndet mellan cirkeln

$$4x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 43 = 0$$

och räta linien

$$y + 3x - 3 = 0$$

---

29. Tre krafter, proportionella mot 1, $\sqrt{3}$ *och* 2, *verka på en och samma punkt samt hålla hvarandra dervid i jemnvigt; sök vinklarne mellan dessa krafters rigtningslinier.*

30. Längs hvar sin katet till den rätvinkliga triangel, i hvilken hypotenusan är vertikal och den ene af de spetsiga vinklarne uppgår till 30^0, *falla tvenne partiklar; angif förhållandet mellan deras sluthastigheter.*

31. En homogen och jemntjock stång väger 16 ℔ *och är* $16{,}5$ *tum lång. Vid hennes ena ända äro* 36 ℔ *fästade, vid den andra* $118{,}9$ ℔. *I hvilken punkt bör stången understödjas, om jemnvigt skall äga rum?*

32. Sök förhållandet mellan volymerna hos en luftpumps klocka och cylinder, då 10 kolfslag kunna förändra spänstigheten hos luften i klockan från 760 till 5 millimeter.

33. Antages qvicksilfrets och glasets kubiska utvidgningskoëfficienter vara respective $\frac{1}{5559}$ *och* $\frac{1}{38700}$ *samt qvicksilfrets eg. v. vid* 0^0 $13{,}596$; *huru stor invändig volym måste då vid* 0^0 *det glaskärl ega, som vid* 30^0 *skall fullständigt fyllas af 6* ℔ *qvicksilfver af sistnämnda temperatur?*

34. Man föreställer sig, att en sida af ett prisma, hvars brytande vinkel är 45^0 *och brytningsförhållande* $^3/_2$, *träffas af en ljusstråle under* 45^0 *vinkel. Konstruera strålens väg och bevisa konstruktionens giltighet.*

35. Ur en elektrisk strömbana borttager man en 2 fot lång $0{,}5$ *linie tjock koppartråd, hvars specifika ledningsmotstånd antages till enhet. Huru lång tråd af* $0{,}5$ *linies radie och af ett ämne, hvars specifika ledningsmotstånd är 9, bör man inpassa i strömbanan, för att strömstyrkan skall återföras till hvad hon var, innan koppartråden borttogs.*

Fig. 1.

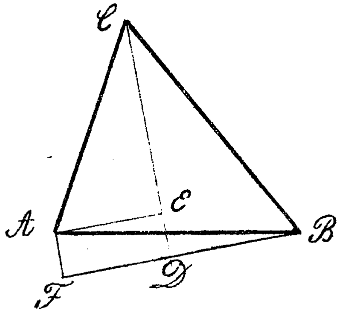


Fig. 2.

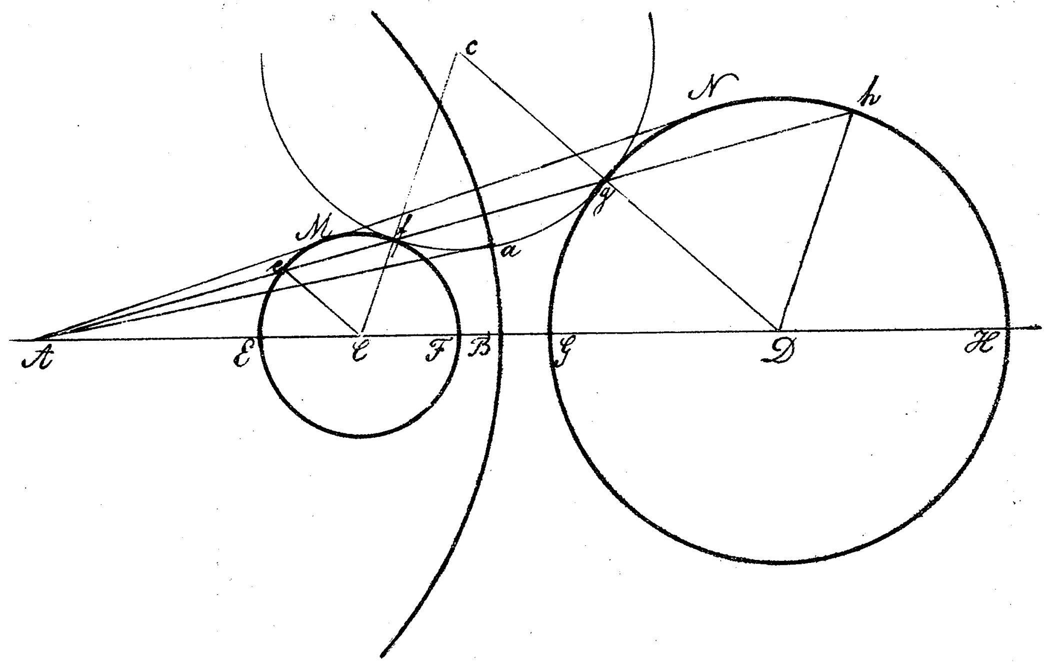


Fig. 3.

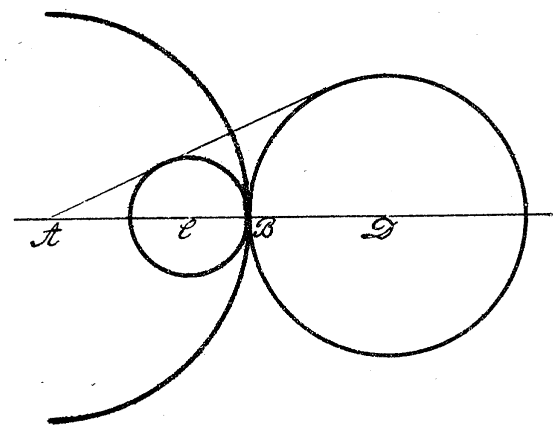


Fig. 4.

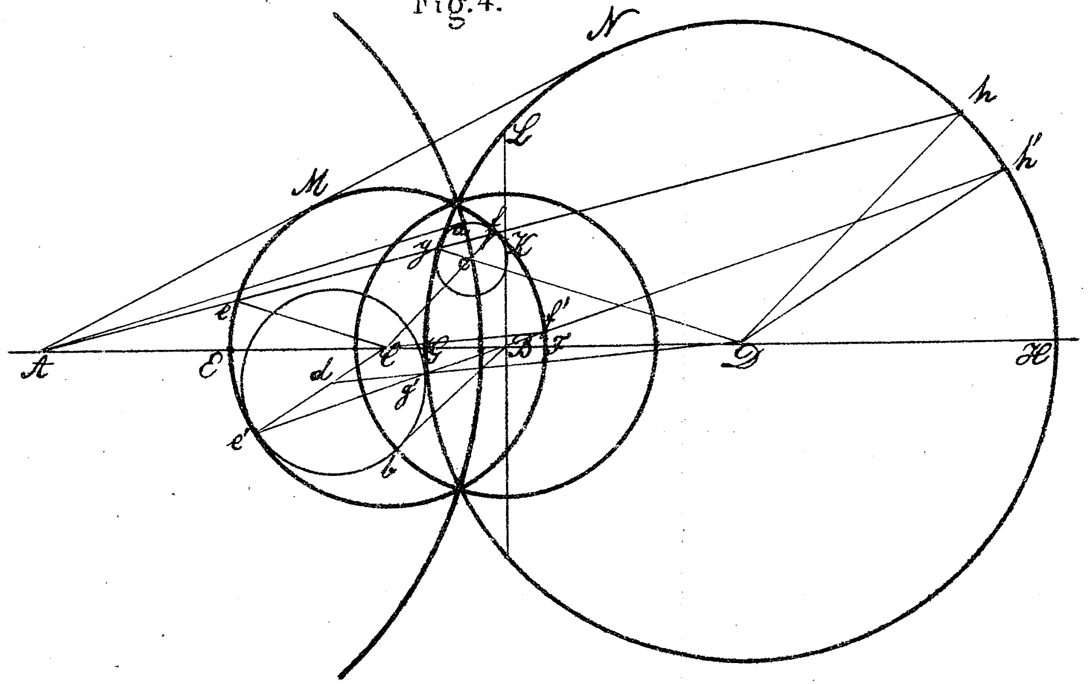


Fig. 5.

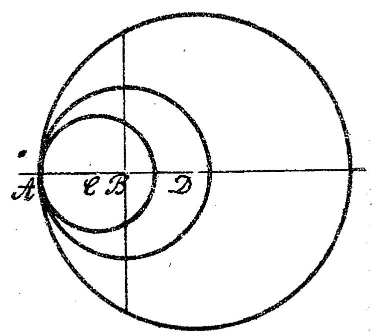
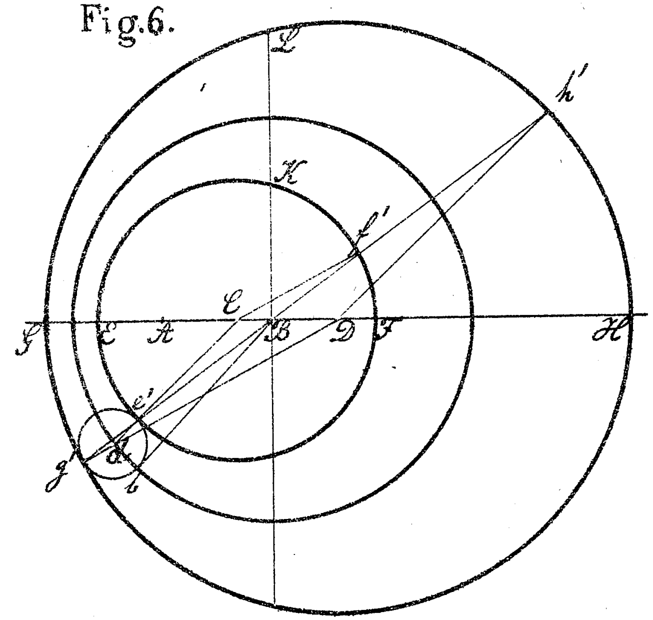


Fig. 6.



AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. Hultman.

(Forts. fr. sid. 11).

Christopher Clavius*.

Titeln på det arbete af denne utmärkte matematiker, till hvilket vi haft tillgång, är: *Christophori Clavii Bambergensis e societate Jesu Epitome Arithmeticæ practicæ, nunc denuo ab ipso auctore recognita et aucta. Coloniæ Agrippinæ 1601.* 308 sidor 8:o.

---

* Ur M. M. Firmin Didot's Biographie Générale hemta vi följande biografiska underrättelser om Clavius. Clavius (Kristofer), tysk matematiker, af jesuiterorden, föddes i Bamberg år 1537 och dog i Rom 1612. Hans samtida kallade honom det sextonde seklets Euklides. Hans förmän sände honom till Rom, hvarest han med stor glans förestod professionen i matematik under 20 år. Han fick år 1581 af påfven Gregorius XIII uppdraget att reformera tidräkningen och fullgjorde med framgång detta arbete. Icke dess mindre måste han vederlägga flere orättvisa kritiker af sina samtida. Hans arbeten äro:

Euclidis Elementorum libri XVI, cum scholiis, Romæ 1574.

Epitome arithmeticæ practicæ. 1583.

Algebra. 1604.

Geometria practica. 1604.

Sinus, lineæ tangentes. 1586.

Commentarii in Sphæram Jo. de Sacrobosco. 1581.

Calendarii romani gregoriani explicatio, jussu Clementis VIII. Romæ 1603.

Computus ecclesiasticus per digitorum articulos et tabulas traditus. Romæ 1603.

Clavii arbete utmärker sig för en synnerlig grundlighet, vetenskaplighet och mångsidighet. Alla operationer utför han och förtydligar på många sätt samt kontrollerar sina resultat genom flerfaldiga pröfningsmetoder.

Såsom exempel på *tals beteckning och utsägning* välja vi talet $4\ddot{2},329,08\dot{9},562,809$. Detta betecknar han på följande tre sätt:

$$4\dot{2}\ 32\dot{9}\ 08\dot{9}\ 56\dot{2}\text{-}80\dot{9}, \qquad 4\overset{4}{2}\ 32\overset{3}{9}\ 08\overset{2}{9}\ 56\overset{1}{2}\ 80\overset{0}{9},$$

$$4\overset{2}{2}\ 329\ 08\overset{1}{9}\ 562\ 80\overset{0}{9}$$

och utläser de båda första:

42 tusen gånger tusen gånger tusen gånger tusen.
329 tusen gånger tusen gånger tusen,
089 tusen gånger tusen,
562 tusen,
809

samt det tredje »på italienarnes vis»: 42 millioners millioner, 329 tusen millioner, 89 millioner, 562 tusen 809.

Addition.

Uppställningen och uträkningen vid detta räknesätt äro alldeles lika med de nu för tiden brukliga. Pröfningen af summans rigtighet sker på fyra sätt: 1) genom nioproban, 2) genom sjuproban, 3) genom addition fram och tillbaka, 4) genom subtraktion.

Som bekant, sker *nioproban* på följande sätt: man adderar siffrorna i hvarje addend till en summa, adderar dessa så erhållna summor till en summa, adderar siffrorna

---

Fabrica et usus instrumenti ad horologiorum descriptionem opportuni. 1586.

Novi Calendarii romani apologia adversus Mæstlenum. 1588.

Adversus Jos. Scaligeri Elenchum et castigationem calendarii Gregor. 1591.

Astrolabium. 1593.

Horologiorum nova descriptio. 1599.

Samtliga Clavii arbeten äro utgifna i 5 folio-volymer under titel: Opera Mathematica. Moguntiæ, Eltz 1612.

i den sist funna summan till en summa och fortfar så, tills man får blott en enda siffra (låt denna siffra heta *a*). Derefter adderas siffrorna i den summa, hvars rigtighet skall undersökas, tills man erhåller en enda siffra. Denna siffra bör också heta *a*, om resultatet är rätt. Vid dessa additioner kan man begagna en genväg genom att öfverallt bortkasta nior. Vi välja Clavii exempel.

	Den till en siffra reducerade summan af siff-
710654	rorna i den första raden är 5,
8907	» » » » andra » » 6,
56789	» » » » tredje » » 8,
880	» » » » fjerde » » 7.
777230	

Den ensiffriga summan af alla dessa utgör 8. Den ensiffriga summan af siffrorna i talet 777230 är också 8, såsom den bör vara.

Vid *sjuproban* divideras hvarje addend med 7, resterna adderas till en summa, hvilken åter divideras med 7. Den så erhållna resten bör bli lika med den rest, som man finner, då man med 7 dividerar den summa, hvars rigtighet skall pröfvas. I nyssnämnde exempel blifver summan af de respektive resterna 0, 3, 5, 5 lika med 13. Denna summa 13 och summan 777230 gifva vid division med 7 hvardera samma rest 6.

Subtraktion.

I olikhet med Ramus uppställer och uträknar Clavius talen alldeles som nu för tiden. Så t. ex. i exemplet

4500026304827 *
3929034567892
―――――――――
570991736935

säger Clavius liksom vi: 2 från 7 gör 5, 9 från 12 gör 3,

* Som vi se, begagnar Clavius tal, hvilka af en nybörjare svårligen kunna fattas.

8 från 17 gör 9 o. s. v. Men han räknar *också* samma exempel på följande kanske lättare sätt:

2 från 7 gör 5, 9 från 10 är 1 och 2 dertill är 3, 8 från 10 är 2 och 7 dertill är 9, o. s. v.

Liksom vid addition pröfvar Clavius i subtraktionsexemplen den funna restens rigtighet genom nio- och sjuproborna, genom addition eller subtraktion.

Multiplikation.

Clavii generella definition på detta räknesätt, hvilken passar så väl för hela som för brutna tal (Rami dugde blott för hela tal) är följande: »*multiplikation af två tal med hvarandra är uppsökandet af ett tal, som så många gånger innehåller det ena af dessa, som det andra innehåller enheter*».

Till multiplikationstabell begagnar Clavius den vanliga pytagoreiska. För dem, som ha svårt att lära sig utantill produkten af tvenne mellan 4 och 10 liggande hela tal, har Clavius uppgifvit en särskild regel:

Man subtraherar hvardera af de gifna faktorerna från 10. Produkten af dessa rester utgör antalet enheter i den sökta produkten. Antalet tiotal erhålles antingen genom att söka sista siffran i summan af de båda gifna faktorerna eller genom att från den ena af de gifna faktorerna subtrahera den rest, som hör till den andre gifna faktorn. T. ex.: hvad är 8 gånger 9, hvad 8 gånger 8 och hvad 6 gånger 7? *

Clavius uppskrifver uträkningen häraf sålunda:

9.	1		8.	2		7.	3
8.	2		8.	2		6.	4
7	2		6	4		4	2

* Rigtigheten af förfaringssättet inses lätt af följande betraktelse. Kallar man de båda gifna faktorerna a och b, så är

$$10[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b) = ab$$

och äfven

$$10(a + b) - 100 + (10 - a)(10 - b) = ab.$$

Man säger 9 från 10 gör 1, 8 från 10 gör 2; produkten 2 af resterna 1 och 2 utvisar antalet enheter i den sökta produkten. Antalet tiotal utgöres af sista siffran i talet 17 (summan af 8 och 9) eller ock af skilnaden mellan 9 och 2 eller mellan 8 och 1.

Anm. Denna för nybörjare svårbegripliga och för andra öfverflödiga metod att multiplicera två ensiffriga tal med hvarandra hafva vi framstält här, emedan vi återfinna den sedermera i svensken Ublenii *Compendium arithmetices.*

Rigtigheten af en verkställd multiplikation pröfvar han med nio- och sjuproban, medelst multiplikation ($ab = ba$) och medelst division.

Division.

Äfven här har Clavius en generell definition: »*division är fördelningen af ett framsatt tal (dividenden) i delar, hvilkas namn bestämmes af ett annat gifvet tal (divisorn)* eller *uppsökandet af ett tal, som innehåller enheten lika många gånger som dividenden innehåller divisorn*».

Denna definition, som passar för både hela och brutna tal, är märkvärdig derföre, att den påpekar, att de till division hörande frågor äro af en tvefaldig natur. Då 12 skall divideras med 4, kan detta betyda icke allenast, att man skall taga fjerdedelen af 12, utan ock, att man skall undersöka, huru många gånger 4 innehålles i 12.

Utom Rami sätt att dividera, använder Clavius tvenne andra, af hvilka vi dock endast framhålla det ena; detta sätt karakteriseras af resternas utlemnande och af de partiella multiplikationernas verkställande från venster till höger på sätt, som närmare upplyses af vidfogade exempel. Om 1832487 skall divideras med 469, sker uträkningen på följande sätt. Man uppskrifver divisorn 469 under dividenden så, att 4 kommer midt under den andra siffran (8) af den samma (den går nämligen ej upp i den första); man säger vidare: 469 i 1832 går 3 gånger. Qvotsiffran

```
   1
  631
 42150
655364
1832487 (3907 104/469
469999
 4666
  44
```

3 uppskrifves till höger om dividenden. Derefter fortfar man: 3 gånger 4 är 12, 12 från 18 gör 6. Resten 6 uppskrifves ofvan siffran 8 i dividenden, hvarefter de begagnade siffrorna 1 och 8 i dividenden samt 4 i divisorn öfverstrykas. Vidare fortsätter man: 3 gånger 6 är 18, 18 från 63 gör 45. Denna rest 45 uppskrifves ofvanom 63, hvarefter de använda siffrorna 6 och 3 i dividendens återstod samt 6 i divisorn öfverstrykas. Derefter fullföljer man 3 gånger 9 är 27, 27 från 52 gör 25, hvilken rest uppskrifves ofvanom 52, hvarpå begagnade siffror öfverstrykas. Derpå uppskrifves divisorn 469 på nytt under den förra divisorn 469 med iakttagande af att alla dess siffror flyttas ett steg till höger. Gången är tydlig. Man erhåller slutligen en rest 104, hvars tre siffror naturligtvis ej äro öfverstrukna, alldenstund med dem ej vidare opereras. Qvoten blir $3907\frac{104}{469}$.

Division pröfvar Clavius med nio- och sjuproborna, medelst multiplikation och medelst division.

Bråk.

Clavius förkortar bråk dels medelst största gemensamme divisorn (Eukl. VII. 2), dels medelst att dividera med mindre tal. Bråk gör han liknämniga enligt den metod, som är framstäld i Eukl. VII. 36 och 38 (att till två eller tre gifna tal finna den minsta gemensamma dividenden). Vidare redogör han för, huru man skall finna *bråk af bråk*, t. ex. att finna hvad $\frac{3}{5}$ af $\frac{4}{7}$ af en hel är.

I *multiplikation* har han den vanliga regeln: »multiplicera täljare med täljare» o. s. v.

Ex. 1. Hvad är 8 gånger $\frac{4}{5}$? Clavius skrifver $\frac{8}{1}\ \frac{4}{5}\ |\ \frac{32}{5}$ eller $6\frac{2}{5}$.

Ex. 2. Hvad är $\frac{2}{3}$ gånger $\frac{4}{5}$? Svar: $\frac{8}{15}$. »Ingen förundre sig att produkten blir mindre än $\frac{4}{5}$, ty man skall taga den ena faktorn $\frac{4}{5}$ så många gånger som den andre faktorn $\frac{2}{3}$ innehåller enheter».

I *division* har han den vanliga regeln: »vänd upp och ned på divisorn» o. s. v.

Ex. Dividera 6 med $\frac{2}{3}$. Clavius skrifver $\frac{6}{1}\ \frac{3}{2} \mid \frac{18}{2}$ eller 9.

Regula trium

sönderfaller i enkel, omvänd (eversa) och sammansatt.

Enkel regula de tri löses genom användning af den »*gyllene regeln*» (produkten af de yttersta är lika med produkten af de medlersta. Eukl. VII. 19).

På *omvänd regula de tri* har han bland andra exempel följande: »till en klädning åt sig köper någon ett tyg, som är 9 alnar långt och 3 qvarter bredt; huru många alnar skulle erfordras till samma klädning, om tyget vore blott 2 qvarter bredt?»

På *sammansatt regula de tri* anföra vi följande exempel:

»Om 300 gyllen på 4 år förtjena 100 gyllen, hvad skola 1580 gyllen förtjena på 7 år?»

Clavius löser detta problem genom två på hvarandra följande tillämpningar af den gyllene regeln.

Gyllen.	Gyllens vinst.	Gyllen.	Gyllens vinst.
300	100	1580 ?	Svar: $526\frac{2}{3}$.
År	Gyllen.	År.	Gyllen.
4	$526\frac{2}{3}$	7 ?	Svar: $921\frac{2}{3}$.

Svaret blef altså $921\frac{2}{3}$ gyllen *.

Bolagsräkning (regula societatum).

Hithörande problem uträknas enligt den vanliga regeln: summan af rationstalen förhåller sig till delningssumman som hvart rationstal till motsvarande andel af

* Clavii metod att räkna sammansatt regula de tri prisas mycket af svensken Bure i hans Arithmeticæ instrumentalis Abacus. Helmæstadii 1609.

delningssumman. Bland exemplen på denna räkning har han äfven följande:

»Ett kar har i sin botten tre rör. Då det största är öppet, utströmmar allt vattnet på två timmar; då det medlersta är öppet, utströmmar allt vattnet på 3 timmar; slutligen då det minsta är öppet, utflyter hela vattensamlingen på 6 timmar. På huru lång tid alltså skall hela vattenmassan utströmma, om alla tre rören samtidigt äro öppna, under antagande att genom hvardera röret vattnet ständigt från början till slut utflyter på samma sätt?»

Clavius uträknar detta genom att först bilda analogierna

$$\begin{array}{cccccc} \text{Timmar.} & \text{Kar.} & \text{Timmar.} & & \text{Kar.} \\ \left.\begin{array}{c}2\\3\\6\end{array}\right\} & 1 & 6\,? & \text{Svar:} & \left\{\begin{array}{c}3\\2\\1\end{array}\right. \end{array}$$

hvilka i ord tolkas sålunda: om ett kar kan tömmas genom det största röret på 2 timmar, huru många kunna tömmas på 6 timmar? o. s. v.

Häraf bildas enligt regeln för bolagsräkning följande analogi

$$\begin{array}{ccccc} \text{Kar.} & \text{Timmar.} & \text{Kar.} & & \text{Timme.} \\ 6 & 6 & 1\,? & \text{Svar:} & 1\,; \end{array}$$

eller, om 6 kar kunna tömmas på 6 timmar, huru många timmar erfordras för att tömma ett kar? Svar: 1 timme.

Alligationsräkning.

Såsom vi redan under Ramus nämnt, äro hithörande problem hos de gamle af den obestämda natur, att många lösningar derå kunna erhållas. Vi öfvergå nu till ett närmare studium af de gamles metod att lösa dessa problem, i det att vi skola grundligt behandla följande ur Clavius hemtade exempel.

»*Ett skålpund peppar kostar 4 julier, 1 skålpund neglikor 3 julier, 1 skålpund kanel 6 julier, 1 skålpund saffran*

10 julier, 1 skålpund ingefära 8 julier. Huru mycket af hvarje slag skall man taga, för att 1 skålpund må kosta 7 julier?»

		Julier.	Skilnader.
	Peppar	4	1
	Neglikor	3	3
Julier	Kanel	6	1
7	medelpriset		
	Saffran	10	4
	Ingefära	8	3 . 1 *
		Summa	13

Man uppställer problemet på det sätt, som vidfogade schema visar. Alla ämnen, hvilkas pris äro mindre än medelpriset, sättas ofvanföre detta; de öfriga nedanföre. Derefter kombineras hvart ämne, som står ofvan medelpriset, med ett hvilket som helst af dem, som stå nedanföre. Man iakttage blott, att alla ämnen få vara med. I detta exempel kombineras

peppar med ingefära,
neglikor med saffran,
kanel med ingefära.

Man börjar sedan räkningen med den första kombinationen (peppar och ingefära), i det man tager skilnaden mellan medelpriset 7 och pepparens pris 4, samt ställer den funna skilnaden 3 midt för ingefäran. Vidare uppskrifver man skilnaden 1 mellan ingefärans pris 8 och medelpriset 7 midt för pepparens. På samma sätt förfar man med den andra kombinationen (neglikor och saffran) samt med den tredje kombinationen (kanel och ingefära). Förhållandet mellan summan af de emot ett ämne stående skilnader och summan 13 af alla skilnaderna utvisar den mängd, som af i fråga varande ämne skall tagas, för att 1 skålpund af blandningen skall kosta 7 julier. Enligt detta skall här tagas $\frac{1}{13}$ ℔ peppar, $\frac{3}{13}$ ℔ neglikor, $\frac{1}{13}$ ℔ kanel, $\frac{4}{13}$ ℔ saffran och $\frac{4}{13}$ ℔ ingefära.

* Märk, att punkten mellan 3 och 1 har ingen annan betydelse än att skilja siffrorna 3 och 1 från hvarandra.

Se här ett annat sätt att kombinera ämnena i samma exempel.

		Julier.	Skilnader.
	Peppar	4	1 . 3
	Neglikor	3	1 . 3
Julier	Kanel	6	3 . 1
7 medelpriset			
	Saffran	10	3 . 4 . 1
	Ingefära	8	3 . 4 . 1
		Summa	28

Här kombineras peppar med ingefära, peppar med saffran, neglikor med ingefära, neglikor med saffran, kanel med saffran, kanel med ingefära.

Flera kombinationer kunna ej komma i fråga.

Enligt samma förfaringssätt som nyss finner man, att man bör taga $\frac{4}{28}$ ℔ peppar, $\frac{4}{28}$ ℔ neglikor, $\frac{4}{28}$ ℔ kanel, $\frac{8}{28}$ ℔ saffran samt $\frac{8}{28}$ ℔ ingefära, för att 1 ℔ af blandningen skall kosta 7 julier.

Vi afsluta detta exempel med att anföra ett *tredje* kombinationssätt.

		Julier.	Skilnader.
	Peppar	4	3
	Neglikor	3	1
Julier	Kanel	6	1
7 medelpriset			
	Saffran	10	3
	Ingefära	8	4 . 1
		Summa	13

Här kombineras peppar med saffran, neglikor med ingefära, kanel med ingefära.

I detta fall finner man, att man skall taga $\frac{3}{13}$ ℔ peppar, $\frac{1}{13}$ ℔ neglikor, $\frac{1}{13}$ ℔ kanel, $\frac{3}{13}$ ℔ saffran, $\frac{5}{13}$ ℔ ingefära, för att 1 ℔ af blandningen skall kosta 7 julier.

Anm. Rigtigheten af detta förfaringssätt inses af följande betraktelse.

Låt a_1, a_2, a_3, . . . a_{2n} vara de respektiva prisen på skålpundet af varorna A_1, A_2, A_3, . . . A_{2n}, hvilkas antal i följd af kombineringsmetoden vi kunna antaga vara jemnt (några af dessa kunna vara af samma slag), och låt medelpriset m vara icke mindre än a_1, a_2, a_3, ... a_n samt icke större än a_{n+1}, a_{n+2}, ... a_{2n}. Man önskar finna huru många skålpund af hvarje vara man bör taga, för att 1 skålpund af blandningen skall kosta m.

Om x_1, x_2, x_3, ... x_{2n} äro de respektive sökta antalen skålpund, så leder problemet naturligtvis till eqvationen

$$\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_{2n} a_{2n}}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2n}} = m,$$

eller till

$$\left.\begin{aligned} x_1(a_1-m)+x_2(a_2-m)+x_3(a_3-m)+\ldots+x_n(a_n-m)+ \\ +\, x_{n+1}(a_{n+1}-m)+x_{n+2}(a_{n+2}-m)+x_{n+3}(a_{n+3}-m)+\ldots \\ +\, x_{2n}(a_{2n}-m) \end{aligned}\right\} = 0 \quad (1)$$

Om man tänker sig, att varan

$$\begin{array}{lll} A_1 & \text{kombineras med} & A_{n+1}, \\ A_2 & \text{»} \quad \text{»} & A_{n+2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n & \text{»} \quad \text{»} & A_{2n}, \end{array}$$

så göra *Ramus*, *Clavius*, *Bure*, *Aurelius*, *Ublenius* med flera

$$\begin{array}{ll} x_1 = k.(a_{n+1}-m), & x_{n+1} = k.(m-a_1), \\ x_2 = k.(a_{n+2}-m), & x_{n+2} = k.(m-a_2), \\ x_3 = k.(a_{n+3}-m), & x_{n+3} = k.(m-a_3), \\ \cdots & \cdots \\ x_n = k.(a_{2n}-m), & x_{2n} = k.(m-a_n), \end{array}$$

hvarest

$$k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{2n} - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n.$$

Genom insättning af dessa värden i eqvationen (1), reduceras denna till identiteten

$$k.\left[\begin{aligned} (a_{n+1}-m)(a_1-m)+(a_{n+2}-m)(a_2-m)+\ldots+(a_{2n}-m)(a_n-m) \\ +(a_{n+1}-m)(m-a_1)+(a_{n+2}-m)(m-a_2)+\ldots+(a_{2n}-m)(m-a_n) \end{aligned}\right] = 0.$$

Problem, hvilka leda till eqvationer af första graden med en obekant, lösa *Clavius* och hans svenska efterföljare genom

Regula falsi.

Denna är af 2 slag:

α) *simplicis positionis*, der man åt den obekanta gifver endast ett enda godtyckligt värde, medelst hvilket man sedan uppsöker det rätta värdet på denna;

β) *duplicis positionis*, der man åt den obekanta gifver tvenne godtyckliga värden, medelst hvilka man sedan uppsöker det rätta värdet på denna.

α) Regula falsi med ett enda antagande.

Medelst denna lösas eqvationer af formen

$$ax = k \quad \text{eller} \quad ax \pm bx = k,$$

d. v. s. sådane eqvationer, i hvilkas alla termer på ena sidan om likhetstecknet x ingår som faktor.

Ex. *Tre personer bestämma sig för att gemensamt köpa ett hus för 2700 gyllen. Den andre vill bidraga med dubbelt så mycket som den förste och den tredje med tre gånger så mycket som den andre. Huru mycket skall hvar och en betala?*

Lösning. Låt på försök den förste bidraga med ett antal gyllen huru många som helst, antag 6. Den andre skall då lemna 12 och den tredje 36, altså alla tillsammans 54 i st. f. 2700, som det borde vara. Man bildar då analogien

$$54 \,.\, 6 \qquad 2700\,? \qquad \text{Svar: } 300,$$

hvilket i ord uttolkas: då antagandet 6 gifver ett pris af 54 gyllen på huset, hvilket antagande bör man då göra, för att priset på huset må blifva 2700 gyllen?

Svaret 300 antyder, att den förste skall betala 300, den andre således 600 och den tredje 1800 gyllen.

Anm. Förfaringssättets rigtighet är sjelfklar, alldenstund i eqvationen

$$ax = k$$

k är proportionell emot x.

β) Regula falsi med tvenne antaganden.

Medelst denna lösas ej allenast eqvationer af formen $ax = k$ utan äfven eqvationer af formen

$$ax + b = k\,.$$

Ex. *Alexander den store kom en gång i ett förtroligt samtal med filosofen Kallistenes att tala om sin ålder. Han yttrade dervid: »jag är två år äldre än Efestion; Klytus är lika gammal som jag och Efestion tillsammans och dessutom fyra år. Summan af våra tre åldrar utgör 96 år eller lika många år som din far lär hafva lefvat.» Huru gamla voro alltså Alexander, Efestion och Klytus?*

Lösning. Antag på Alexanders ålder två godtyckliga tal 20 och 30. Med åldern 20 till utgångspunkt erhålles summan af de tre åldrarne att vara 80 i st. f. 96. Skilnaden mellan 96 och 80 eller 16 antecknas. (Se vidfogade x-formiga figur).

20 30
X
16 24 (minus)

Med åldern 30 till utgångspunkt erhålles summan af de tre åldrarne att vara 120 i st. f. 96. Skilnaden mellan 96 och 120 eller minus 24 antecknas. Skilnaden (40) mellan 16 och minus 24 tages till divisor; skilnaden (960) mellan 16 gånger 30 och 20 gånger minus 24 tages till dividend. Qvoten 24 utgör Alexanders ålder.

Anm. 1. Förfaringssättets rigtighet är ej svårt att finna. Låt nemligen den första grads eqvation, som skall lösas vara

$$ax + b = k\,.$$

Gif åt x efter hvartannat de godtyckliga värdena m och n. Häraf uppstå skilnaderna

m n
X
$k-(am+b)$ $k-(an+b)$

$$k-(am+b) \quad \text{och} \quad k-(an+b)\,.$$

Skilnaden $a(n-m)$ mellan dessa två nu funna uttryck skall tagas till divisor, och skilnaden $(k-b)(n-m)$ mellan

$$m[k-(an+b)] \quad \text{och} \quad n[k-(am+b)]$$

till dividend. Qvoten $\dfrac{k-b}{a}$ är det rätta värdet på x.

Anm. 2. Utom detta exempel om Alexanders och hans vänners åldrar, har Clavius flere andra, t. ex. det om Hieros krona, det om kärlet med afloppsrören.

Aritmetiska serier.

Då man känner första termen, termernas antal och skilnaden mellan två på hvarandra följande termer, visar Clavius, huru man skall finna sista termen och seriens summa samt gifver skäl för förfaringssättet, hvilket är detsamma som i våra dagar.

Såsom exempel har han bland andra följande:

Då Herkules frågade Augias, huru många kor och oxar han hade, svarade denne, att han hade sina kreatur på 40 olika ställen, och att antalen kreatur på det första, andra, tredje, fjerde, . . . o. s. v. ställena voro i samma förhållande till hvarandra som talen 3, 5, 7, 9, . . . o. s. v. Herkules gick till det första stället och fann der 30 oxar. Huru många kreatur hade Augias och huru många hade han på den 40:de platsen?

Geometriska serier.

Summan af sådane serier uttrycker han i en regel, hvars analytiska uttryck skulle vara

$$S = \frac{aq^{n-1} - a}{q - 1} + aq^{n-1}$$

eller i sjelfva verket samma regel som hos Ramus.

Clavius uträknar, att det skulle erfordras $71\frac{1}{2}$ jordklot för att frambringa

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

hvetekorn, samt räknar ut huru många fartyg, som skulle erfordras för att transportera lika många dukater. »Mycket mer skola vi skrifva i vår fullständigare aritmetik».

Läran om qvadratrötters utdragning.

Clavii metod är ungefär vår vanliga metod med iakttagande af de förändringar som Clavii sätt att dividera medför. Vi visa hans metod genom att anföra utseendet af ett räkneexempel.

Ex. 1. *Att draga qvadratroten ur 21178404.*

Man uppdelar talet i sifferklasser med 2 siffror i hvarje klass genom punkter inunder siffrorna, således här 21 17 84 04. Vi framställa räkningens olika utseende under fortgången af operationen.

	5	5 31	5 31
21 17 84 04 (4	21 17 84 04 (46	21 17 84 04 (46	21 17 84 04 (460
4	4 86	4 86	4 86 20
			9

5 31	5 31	5 31
21 17 84 04 (460	21 17 84 04 (4602	21 17 84 04 (4602
4 86 20	4 86 20 02	4 86 20 02
9	9 92	9 92

Den sökta qvadratroten är således 4602.

Ex. 2. *Att draga qvadratroten ur 20.*

Man finner först talet 4. Genom att dividera skilnaden mellan 20 och qvadraten på 4 med dubbla 4 finner man efter några försök, att man till nästa term i roten kan taga bråket $\frac{4}{9}$. Genom fördubbling af $4\frac{4}{9}$ och division i resten finner man, att till tredje term kan tagas bråket $\frac{180}{6885}$ o. s. v. Qvadratroten ur 20 blir således i det närmaste lika med summan af talen 4, $\frac{4}{9}$, $\frac{180}{6885}$ eller lika med $4\frac{29160}{61965}$.

Anm. Detta exempel är i flera hänseenden märkvärdigt. Det visar oss, att de gamle utan kännedom af decimaler dock med tillhjelp af vanliga bråk kunde draga qvadratroten ur ett tal hvilket som helst. Vi se vidare, att de ej voro angelägna om att förenkla sina bråk. Här förekomma nämligen tvenne otympliga bråk $\frac{180}{6885}$ och $\frac{29160}{61965}$ i stället för de enklare $\frac{4}{153}$ och $\frac{8}{17}$. Vilja vi utföra Clavii rot $4\frac{8}{17}$, blir den 4,47058; således qvadratroten ur 20 rigtig på 2 decimaler. Vi ha nemligen $\sqrt{20} = 4{,}47213$.

(Forts.)

Trigonometriska satser af D—G.

I.

I en triangel äro gifna a, b och c; att finna A, B, C och ytan.

Konstruktion (fig. 7): Medelpunkten O till den i triangeln inskrifna cirkeln förenas med A, B, C; perpendiklarne OA_1, OB_1, OC_1 fällas mot a, b, c och sättas $= r$.

Upplösning: Om vi använda beteckningarna

$$\alpha = AB_1 = AC_1 ,$$
$$\beta = BC_1 = BA_1 ,$$
$$\gamma = CA_1 = CB_1 ,$$
$$p = \tfrac{1}{2}(a + b + c) ,$$

så fås af

$$a = \beta + \gamma ,$$
$$b = \gamma + \alpha ,$$
$$c = \alpha + \beta$$

eqvationerna

$$\alpha = p - a ,$$
$$\beta = p - b ,$$
$$\gamma = p - c .$$

Kallas triangelytan y, så hafva vi

$$2y = bc \sin A , \quad \text{eller} \quad y = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} ,$$
$$2y = r(a + b + c), \quad \text{eller} \quad y = rp ,$$
$$r = \alpha \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad \text{eller} \quad r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} ,$$

hvaraf erhålles, om man eliminerar r och y,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} ,$$

och häraf

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

samt

$$y = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

II.

I en triangel äro gifna a och b $(a > b)$ *samt* $\wedge C$*; att finna A och B.*

Konstruktion (fig. 8): Med C som medelpunkt och b som radie uppritas en cirkel, som skär BC i D samt BC förlängd i E; A förenas med D och E; DF drages $// BA$ och råkar AE i F.

Upplösning: $\wedge ADC = \frac{1}{2}(A + B)$, $\wedge ADF = \frac{1}{2}(A - B)$; vidare är

$$\frac{EA}{AD} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \frac{FA}{AD} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Men nu är

$$\frac{EB}{DB} = \frac{EA}{FA},$$

hvaraf följer, enär $EB = a + b$ och $DB = a - b$,

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Problem i deskriptiv geometri.

Af A. F. D. WACKERBARTH.

Vi förutskicka följande för vårt problem behöfliga sats:

Låt AB vara en rät linie (fig. 9). *Delas den i C, så att* $CA : CB = m : n$, *och tages D i förlängningen af AB, så att* $DA : DB$ *i samma förhållande, nämligen* $m : n$, *och ritas med centrum O i midtpunkten af CD halfcirkeln CPD, så blir förhållandet emellan de båda linierna PA och PB från en punkt P hvilken som helst i periferien till A och B lika med förhållandet af m till n.*

Sammanbind P med C och D; drag $BE // DP$ och $BF // CP$ (punkterna E och F äro på AP och dess förlängning).

Vi få

$$DA : DB = PA : PE; \quad CA : CB = PA : PF.$$

Enligt förutsättningen är

$$DA : DB = CA : CB,$$

då således

$$PA : PE = PA : PF, \text{ d. v. s. } PE = PF.$$

Men, enär $\wedge EBF$ är rät, så är

$$PE = PF = PB,$$

då slutligen

$$PA : PB = CA : CB = m : n.$$

Vårt problem lyder:

En bas AC (fig. 10) mätes upp på ett horizontalt plan, och delas i två segment AB och BC. (Antag t. ex. att $AB = 900$ fot och $BC = 600$ fot). Vid de trenne punkterna A, B och C observeras i samma ögonblick ballongens E trenne höjdvinklar EAD (θ_1), EBD (θ_2) och ECD (θ_3). (Antag t. ex. att dessa äro $\theta_1 = 55^0\ 9'\ 23''$, $\theta_2 = 70^0\ 48'\ 30''$, $\theta_3 = 73^0\ 23'\ 14''$). Att finna ballongens lodräta höjd ED öfver det horizontala planet medelst en geometrisk konstruktion.

Tag linien OP af godtycklig längd (fig. 11), och låt POP' vara en rät vinkel.

Afsätt vinkeln LPO = komplementet af θ_1, $(34^0\ 50'\ 37'')$,
» » MPO = » » θ_2, $(19^0\ 11'\ 30'')$,
» » NPO = » » θ_3, $(16^0\ 36'\ 46'')$,

så äro de trenne linierna OL, OM, ON i samma proportion till hvarandra som de trenne linierna AD, BD, CD (fig. 10), som förena foten D af den från ballongen på det horizontala planet fälda perpendikeln ED med de trenne observationsstationerna A, B, C. I närvarande fall äro dessa linier i förhållandet af 14, 7 och 6 respektive.

Tag nu efter en godtycklig skala $AB = 900$, $BC = 600$ (fig. 12). Nu gäller det att finna en punkt F så belägen, att de trenne linierna FA, FB och FC hafva samma förhållande sinsemellan som OL, OM och ON i fig. 11.

På AC (fig. 12) tages punkten D och på dess förlängning punkten E så bestämda, att

$$DA : DC = EA : EC = OL : ON, \quad (= 14 : 6),$$

och på DE beskrifves halfcirkeln DFE, då de tvenne linierna, som dragas från en punkt hvilken som helst i denna halfcirkels periferi till A och C äro i det erforderliga förhållandet af $OL : ON$.

På AB tages punkten G och på dess förlängning punkten H, så att

$$GA : GB = HA : HB = OL : OM, \quad (= 14 : 7),$$

och på GH ritas halfcirkeln GFH, då linierna från en punkt hvilken som helst i denna halfcirkels periferi till A och B äro i förhållandet af $OL : OM$.

Alltså är punkten F, der de tvenne halfcirklarne skära hvarandra, den sökta punkten, och linierna FA, FB, FC hafva sinsemellan samma proportion som OL, OM, ON, d. v. s. F är samma punkt, som i fig. 10 betecknas med D.

Vinkelrätt mot någon utaf linierna AF, BF, CF (vi välja AF, emedan hon är längst) drages FI, och från A drages AI, som bildar vinkeln IAF lika med θ_1 (EAD i fig. 10 eller höjdvinkeln vid stationen A, $55^\circ\ 9'\ 23''$) och skär FI i I. Linien FI är följaktligen ballongens höjd enligt samma skala, som användes för figurens konstruktion.

Mätningen ger 2000 fot.

Satser af J. E. Cederblom,

föreståndare för Malmö tekniska skola.

77. En person eger ett krutbruk, en såg och ett tröskverk, bygda vid samma vattenfall, men vill rasera dessa och i stället anlägga ett spinneri. För att ut-

röna den vid samma fall disponibla drifkraften, anställer han observationer, hvarvid utrönes, att den ofvanför verken liggande dammen rymmer så mycket vatten, som erfordras för att på en gång hålla dem alla i gång i 5 timmar, men att samma vattenmassa räcker i 7 timmar om 6 krutblandningscylindrar, som hvar och en erfordrar en drifkraft af $2\frac{2}{3}$ hästkrafter, äro i hvila. År deremot dammen full och tilloppet till den öppet, kunna alla verken drifvas i $17\frac{1}{2}$ timmar, innan dammen blir tom. Huru många spindlar kunna i det tilltänkta spinneriet drifvas, då 100 spindlar med tillhörande arbetsmaskiner drifvas af hvarje hästkraft och spinneriet skall drifvas hela dygnet om?

78. En såg genomskär 304 qvadratfots yta i timmen; den undergår en reparation, hvarigenom drifkraften ökas med 2 hästkrafter, och då befinnes det, att den genomskär 86 qvadratfots yta i timmen mer än förut och 1 qvadratfot mer pr hästkraft än förut. Med huru många hästkrafter arbetade sågen före reparationen?

79. En fabrikant drifver sin fabrik med kraften från ett vattenfall, men vill utvidga sin rörelse, och emedan han finner både motorerna för svaga och sina arbetsmaskiner föga tidsenliga, beslutar han sig för att ombygga fabriken. Han låter profva de motorer, som förut drifvit den, hvarvid utrönes, att de tillgodogöra 45 % af vattenfallets hela naturkraft. En ingeniör förbinder sig att konstruera nya motorer, som tillgodogöra minst 60 % af naturkraften, och begär i konstruktionsarvode 1000 R:dr för hvarje hästkraft, som vinnes utöfver dessa 60 %. Vid den ombygda fabrikens igångsättning och afprofning befinnes, att konstruktionsarvodet för motorerna uppgår till 7500 R:dr, och då den årliga vinsten af fabriken förut varit 67500 R:dr, uppgår den nu till 131250 R:dr, eller

500 R:dr mer för hvarje hästkraft än förut. Huru många hästkrafter sysselsatte fabriken före och efter ombyggnaden?

80. En person eger två ångmaskiner, som han använder till mjölmalning antingen hvar för sig eller båda gemensamt. Den ena förmal 1 kubikfot råg på 1,6 minut kortare tid än den andra och på 0,9 minut längre tid än båda gemensamt; huru många kubikfot per timme förmales med hvardera maskinen?

AFDELNING II.

Om den elementära framställningen af teorien för maximа och minima.

Af HJ. HOLMGREN.

(Forts. fr. sid. 36).

I denna serie af slutföljder innefattas en sats, som äfven utan afseende på dess sammanhang med ämnet kan förtjena att antecknas:

Om för ett värde $x = a$

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) \ldots = \overset{(n-1)}{f(a)} = 0 \quad \ldots\ldots (4),$$

så vexlar hvarannan af dessa derivator tecken på samma sätt vid passerandet genom noll, och för hvarannan är följaktligen detta nollvärde gemensamt maximum eller gemensamt minimum.

Antages nämligen, att relationerna (4) ega rum, men att $\overset{(n)}{f}(a) = b$ *icke* är noll, t. ex. $b > 0$, så vexlar $\overset{(n-1)}{f}(x)$ tecken för $x = a$ från $-$ till $+$, d. ä. $\overset{(n-2)}{f}(a) = 0$ är ett *minimum*, eller $\overset{(n-2)}{f}(x)$ är *positiv* å ömse sidor om detta nollvärde; men då måste $\overset{(n-3)}{f}(x)$ vid passerande af noll för $x = a$ vara växande d. ä. *vexla tecken* från $-$ till $+$, d. är $\overset{(n-4)}{f}(a) = 0$ vara ett *minimum* o. s. v.

Men man är alldeles icke berättigad, att af denna riktiga sats draga den temligen vanliga slutföljden:

»Om $\overset{(n)}{f}(x)$ är den första af derivatorna till $f(x)$,
»som ej blir $= 0$ för ett värde $x = a$, så motsvarar
»$x = a$ ett maximum eller minimum för $f(x)$ *en-*
»*dast i det fall* att n är ett jemnt tal.»

Ty denna sats är falsk, såsom af det föregående kan ses. Om nämligen en derivata af *udda* ordningsnummer vore den första, som ej blef noll för $x = a$, så vore likväl $x = a$ en maximi- eller minimipunkt för $f(x)$ i det fall, att denna derivata för $x = a$ vore diskontinuerlig med motsatta tecken för de begge värdena. Ex. $y = (x - a)^{\frac{8}{3}}$ har för $x = a$ ett minimum. För $x = a$ är $y' = y'' = 0$ men y''' är *icke* noll, utan diskontinuerlig med de begge värdena $-\infty$ och $+\infty$.

För finnandet af *alla* reela maxima och minima till en entydig och utvecklad funktion af en oberoende variabel

$$y = f(x)$$

har man således följande regel:

a) Angif alla funktionens slutpunkter. De äro maximi- eller minimipunkter för $f(x)$.

b) Bland rötterna till eqv. $f(x) = 0$ äfvensom bland de värden, som kunna göra $f'(x)$ diskontinuerlig, angif alla dem för hvilka $f'(x)$ *vexlar tecken*. Sker teckenvexlingen för växande x från $+$ till $-$, så motsvarar detta x-värde ett *maximum*, i motsatt fall ett *minimum* för $f(x)$.

Vi skola nu genom några få exempel söka visa befogenheten af denna teori.

Ex. 1. $$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}.$$

Häraf

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x-16)}{(x-10)^2}$$

$$f''(x) = \frac{72}{(x-10)^3}.$$

Söka vi först de under *b*) upptagna maxima och minima, så ger $f'(x) = 0$ de 2 rötterna $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Den förra motsvarar ett *maximum*, den sednare ett *minimum*, såsom af tecknet för $f''(x)$ synes. Således är:

$$f(4) = 1 \text{ ett } maximum,$$
$$f(16) = 25 \text{ ett } minimum.$$

Skulle vi nu anse att $f(x)$ ej har flera maxima eller minima, så erhölles det besynnerliga resultatet, att dess enda minimum vore *större* än dess enda maximum och att för öfrigt begge vore *mindre* än t. ex.

$$f(30) = 34{,}8$$

och otaliga andra funktionsvärden. Tagas åter slutpunkterna med bland antalet af maxima och minima, så befinnes att $f(x)$ har 4 sådana nämligen för $x = -\infty$ och $x = +\infty$, en för hvardera, och dessutom två för $x = 10$. Följa vi nu gången af $f(x)$ från $x = -\infty$ till $x = +\infty$, så finna vi

för $x = -\infty$	ett *minimum*	$f(-\infty)$	$= -\infty$
» $x = 4$	» *maximum*	$f(4)$	$= 1$
» $x = 10$	» *minimum*	$f(10-0)$	$= -\infty$
» $x = 10$	» *maximum*	$f(10+0)$	$= +\infty$
» $x = 16$	» *minimum*	$f(16)$	$= 25$
» $x = +\infty$	» *maximum*	$f(+\infty)$	$= +\infty$.

Den ofvan antydda motsägelsen, åtminstone mot språkbruket, finnes ej mer.

Ex. 2. En ellips, hänförd till sina figuraxlar som koordinataxlar, har eqvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Vare sig att man betraktar den ena eller den andra af de begge enkla grenarne

$$\left.\begin{aligned} y &= +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ y &= -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

blir krökningsradiens uttryck i funktion af abskissan

$$\left.\varrho = \frac{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Söka vi nu denna krökningsradies maxima och minima, så finna vi, om först intet afseende göres på funktionens slutpunkter, af eqvationen

$$\frac{d\varrho}{dx} = -\frac{3(a^2 - b^2)}{a^4 b} \cdot x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} = 0,$$

de 3 rötterna

$$x = 0, \qquad x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Antaga vi $a > b$, så vexlar $\frac{d\varrho}{dx}$ tecken vid $x = 0$ från $+$ till $-$. Således ett *maximum.* De begge andra rötterna medföra ingen teckenvexling i $\frac{d\varrho}{dx}$. Vi erhöllo således blott ett maximum för hvardera grenens (5) krökningsradie. Vi veta likväl att mot $x = -a$ och $x = +a$ svara *minima* för denna ellipsens krökningsradier. Att dessa ej genom räkningen erhöllos är naturligt, emedan de motsvara *slut-*

punkter för funktionen ϱ, i hvilken, då den definieras såsom uttryck för *ellipsens krökningsradier*, nödvändigt inlägges det inskränkande vilkoret, att den icke har några reella värden utanför gränserna $x = -a$ och $x = +a$. Dessa äro slutpunkter, hörande till slaget 4) ofvanföre, och bestämma således maximi- eller minimivärden för funktionen ϱ i den betydelse den har i den framstälda frågan, icke i dess allmänna analytiska betydelse. På hvardera grenen (5) har således krökningsradien för $x = -a$ och $x = +a$ ett minimum $(a > b)$. Som de begge grenarne mötas i dessa punkter, så blifva de gemensamma värdena minima för hela ellipsens krökningsradier.

Ex. 3. Behandlas samma fråga med afseende på hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

så har man

$$\varrho = \frac{[(a^2+b^2)x^2 - a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

och

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{3(a^2+b^2)}{a^4 b} \cdot x\sqrt{(a^2+b^2)x^2 - a^4} = 0$$

ger de 3 rötterna

$$x = 0, \qquad x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

af hvilka *ingen* svarar på den framställda frågan om *hyperbelns krökningsradiers* maxima och minima. Orsaken är naturligtvis den, att funktionen ϱ i denna enskilda fråga är inskränkt af vilkoret att gälla endast mellan gränserna $-\infty$ och $-a$ å ena sidan samt $+a$ och $+\infty$ å den andra, till följe hvaraf man har på hvardera hyperbelgrenen de mot dessa funktionens ϱ slutpunkter svarande enda maxima och minima för *krökningsradien* ϱ.

Anm. Man kan vid de begge sista exemplen anmärka, att om man uttrycker krökningsradien ϱ medelst ordinatan y, man erhåller de felande maximi- och minimiställena. Men å andra sidan är obestridligt, att formlerna (6) och (7) gifva värdena på *alla* ellipsens och hyperbelns krökningsradier och böra således *ensamma* vara tillräckliga att bestämma dessas maxima och minima. Detta äro de ock, om de blott äro tillräckligt definierade, d. v. s. icke blott i anseende till den analytiska formen, utan äfven i anseende till slutpunkterna.

Ex. 4. En balk med rektangulära tvärsektioner af föränderlig storlek är fastgjord vid ena ändan och belastad vid den andra. Dess bredd är konstant $= b$, längden $= l$. Längdsektionen är ett parallelltrapez, hvars bas vid infästningen är $= H$ och vid den fria ändan $= h$ $(H > h)$. Balkens svagaste ställe kan enligt mekaniken approximativt beräknas genom att söka den sektion der $\frac{y^2}{x}$ är minimum, när y betyder sektionens höjd, x dess afstånd från den fria ändan.

Som nu $$y = h + \frac{x}{l}(H - l),$$

så har man att söka minimum för funktionen

$$z = \frac{y^2}{x} = \frac{[h + \frac{x}{l}(H-h)]^2}{x}.$$

Af $\frac{dz}{dx}$ följer $x = \pm \frac{h}{H-h} l$, af hvilka det öfre tecknet motsvarar ett minimum för funktionen z. Svagaste stället vore altså vid

$$x_1 = \frac{h}{H-h} \cdot l.$$

Men om man nu hade t. ex. $h = \frac{2}{3} H$ blef $x_1 = 2l$, och detta svagaste ställe funnes ej inom balken. Något svagaste ställe måste han dock hafva, eftersom han ej är jemnstark (z är ej konstant). Anmärker man åter, att funktionen z *i denna fråga* i alla händelser har 2:ne slutpunkter $x = 0$ och $x = l$, så inses omedelbart, att i den förra har z, då $h = \frac{2}{3}H$, ett maximum, i den senare ett minimum.

Problem, löst af student E. LUNDBERG.

(Forts. fr. sid. 38).

Sättes radien i den mindre cirkeln $(EeF) = r$, radien i den större cirkeln $= R$, samt afståndet mellan medelpunkterna C och $D = a$, så erhålles utan svårighet

$$AC = \frac{ar}{R-r}, \quad AD = \frac{aR}{R-r}, \quad BC = \frac{ar}{R+r}, \quad BD = \frac{aR}{r+R}$$

samt
$$AB = \frac{2arR}{R^2-r^2}.$$

Om man till x-axel tager centrallinien BD och till y-axel en deremot vinkelrät genom B gående linie, så äro de gifna cirklarnes EeF och GgH eqvationer:

$$\left(x + \frac{ar}{R+r}\right)^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

och

$$\left(x - \frac{aR}{R+r}\right)^2 + y^2 = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

När i dessa eqvationer de konstanta termerna

$$\left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)r^2 \qquad \text{och} \qquad \left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)R^2$$

på högra sidan om likhetstecknet äro positiva, så uttrycka de qvadraterna på halfkordorna BK och BL (detta inträffar, när $a < R + r$, d. v. s. när såsom i fig. 4, 5 och 6, den mindre cirkeln till en del eller hel och hållen ligger inom den större). Medelproportionalen mellan BK och BL är då

$$\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)rR},$$

och således eqvationen för den af de sökta cirklarne, hvars medelpunkt ligger i B:

$$x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right) rR \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (3).$$

Genom ett alldeles analogt resonnemang erhålles eqvationen för den andra locus-cirkeln (med medelpunkten A):

$$\left(x + \frac{2arR}{R^2 - r^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2}{(R-r)^2} - 1\right) rR \,. \,. \quad (4),$$

hvilken eqvation endast har geometrisk betydelse, när $a > R - r$ (såsom i fig. 2, 3 och 4).

Om de gifna cirklarne tangera hvarandra, d. v. s. om a antingen är $= R + r$ (fig. 3) eller $= R - r$ (fig. 5), så reduceras i förra fallet eqv. (3) till $x^2 + y^2 = 0$, och i senare fallet eqv. (4) till $\left(x + \frac{2arR}{R^2 - r^2}\right)^2 + y^2 = 0$; den förra af dessa eqvationer representerar punkten B, den senare punkten A, hvilka punkter i förevarande fall sammanfalla med cirklarnes (1) och (2) tangeringspunkter.

De olika fall, som kunna inträffa, allt efter som de gifna cirklarnes afstånd a förändras, äro således följande:

1) $a > R + r$ (fig. 2); locus är då cirkeln (4); eqv. (3) har ingen geometrisk betydelse.

2) $a = R + r$ (fig. 3); locus är fortfarande cirkeln (4); eqv. (3) representerar en punkt B på denna cirkel.

3) $a < R + r$, men $> R - r$ (fig. 4); locus utgöres af de båda cirklarne (3) och (4).

4) $a = R - r$ (fig. 5); locus är cirkeln (3); eqv. (4) reduceras till en punkt A på denna cirkel.

5) $a < R - r$ (fig. 6); locus är cirkeln (3); eqv. (4) saknar geometrisk betydelse.

Anm. 1. Emedan såväl AC och AD som BC och BD förhålla sig till hvarandra som cirklarnes radier, så äro *punkterna A, C, B, D harmoniska.*

Anm. 2. Multiplicerar man eqv. (1) med R och eqv. (2) med r och adderar resultaten, så erhåller man eqv. (3). Om dessa eqvationer deremot efter samma multiplikation subtraheras, så erhålles eqv. (4). *I fall derföre de gifna cirklarne skära eller tangera hvarandra* (fig. 3, 4, 5), *så gå cirklarne (3) och (4) genom kontaktspunkterna.* (Detta låter för öfrigt utan svårighet bevisa sig geometriskt).

Anm. 3. Skrifva vi eqv. (4) under formen

$$x^2 + \frac{4arR}{R^2 - r^2}x + \left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)rR = 0 ,$$

så utmärker tydligen

$$\left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)rR$$

qvadraten på den tangent till cirkeln (4), som drages från origo B *. Denna tangent är således lika stor med radien i cirkeln (3).

Qvadraten på tangenten från A till cirkeln (3) är

$$\left(\frac{a^2}{(R - r^2)} - 1\right)rR \text{ *}.$$

Denna tangent är således lika med radien i cirkeln (4).

Om de gifna cirklarne skära hvarandra (i hvilket fall äfven cirklarne (3) och (4) måste skära hvarandra i samma punkter), och man genom dessa afskärningspunkter drager tangenter till (3) och (4), så gå dessa följaktligen genom A och B.

Anm. 4. Om man i eqv. (4), som kan skrifvas under formen

$$(R^2 - r^2)\left\{x^2 + \left(1 - \frac{a^2}{(R+r)^2}\right)rR\right\} + 4arRx = 0 ,$$

sätter $R = r$, så reduceras den till $x = 0$. Eqvationen

---

* Vi veta nämligen, att i allmänhet qvadraten på tangenten till en cirkel

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2 = 0$$

från en punkt x', y' är lika med

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - \varrho^2 .$$

representerar i detta fall en mot centrallinien CD vinkelrät linie, som ligger på lika afstånd från de gifna cirklarnes medelpunkter C och D.

Problem, löst af E. Lundberg.

En cirkel rullar utefter en fast rät linie (fig. 13), *hvarvid en cykloid alstras af en viss punkt på periferien; att finna orten för denna punkts projektion på en mot den fasta linien vinkelrät diameter, äfvensom ytan mellan samma ort och cykloiden samt denna ytas tyngdpunkt.*

Cykloidens eqvation erhålles om ω elimineras mellan

$$x = a(\omega - \sin\omega),$$
$$y = a(1 - \cos\omega).$$

Cykloidens yta är

$$A = \int_0^{\pi a} y dx = a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega)^2 d\omega$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega) d\omega,$$

eller, emedan

$$\int \cos^2\omega\, d\omega = \cos\omega \sin\omega + \int \sin^2\omega\, d\omega,$$

och således

$$2\int \cos^2\omega\, d\omega = \cos\omega \sin\omega + \omega,$$

$$A = a^2 \Big|_0^{\pi} \left(\omega - 2\sin\omega + \frac{\sin\omega\cos\omega}{2} + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$A = \tfrac{3}{2}\pi a^2.$$

Den andra kurvans eqvation erhålles ur eqvationerna

$$x = a\omega,$$
$$y = a(1 - \cos\omega),$$

hvadan hennes yta är

$$A' = \int_0^{a\pi} y dx = a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega) d\omega = \pi a^2 .$$

Ytan mellan de båda kroklinierna är derföre (från $x = 0$ till $x = a\pi$) $\frac{1}{2}\pi a^2$, eller *hälften af den genererande cirkelns yta.*

För bestämmandet af ordinatan y för denna ytas tyngdpunkt har man

$$\bar{y} \int_0^{2a} a \sin\omega \, dy = \bar{y} a^2 \int_0^{\pi} \sin^2\omega \, d\omega = \bar{y} \cdot \frac{\pi a^2}{2}$$

$$= \int_0^{2a} y \,.\, a \sin\omega \, dy = a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega) \sin^2\omega \, d\omega ,$$

eller, emedan

$$\int_0^{\pi} \sin^2\omega \, d\omega = \tfrac{1}{2} \Big|_0^{\pi} (\omega - \sin\omega \cos\omega) = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\int_0^{\pi} \sin^2\omega \cos\omega \, d\omega = \Big|_0^{\pi} \frac{\sin^3\omega}{3} = 0 ,$$

$$\bar{y} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^3}{2} ,$$

d. ä.

$$\bar{y} = a .$$

Det är för öfrigt tydligt, att den sökta orten

$$y = a\left(1 - \cos\frac{x}{a}\right)$$

är en *sinoid;* ty om origo flyttas till $x = \frac{\pi}{2}$, $y = a$, så blir dess eqvation

$$y_1 = -a \cos\left(\frac{x_1}{a} + \frac{\pi}{2}\right)$$

eller

$$\frac{y_1}{a} = \sin\frac{x_1}{a} .$$

Satser af E. Lundberg.

(Ur Géom. Anal. par Briot & Bouquet).

3. Att finna orten för medelpunkterna till de cirklar, som skära två gifna cirklar i diametralt motsatta punkter.
4. Hvilken är den största af de ellipser, som kunna inskrifvas i en gifven parallelogram?
5. En vinkel är omskrifven omkring en parabel, så att ytan af den triangel, som bildas af vinkelns ben och den mellan dem liggande parabelbågen, är konstant; sök orten för vinkelns spets.
6. Att finna orten för de punkter, från hvilka man kan draga tvenne vinkelräta normaler till en gifven parabel.

AFDELNING III.

Faradays upptäckter.

(Forts. fr. sid. 44).

3. Diamagnetismen.

Sedan långt tillbaka visste man, att jern, nickel och kobolt attraheras af magneten, och för en och annan var det till och med ej obekant, att vismuth och antimon af densamma bortstötas. Men att *alla* kroppar, ej ens gaserna undantagna, röna inverkan af den magnetiska kraften, det har först *Faraday* genom sina 1845 utförda undersökningar lagt i dagen. Till de *magnetiska* ämnena höra, utom de nyss nämnda metallerna, äfven mangan, krom, titan, platina m. fl. och bland gaserna syret; till den andra gruppen, innefattande de af *Faraday* benämnda *diamagnetiska* kropparna, räknas guld, silfver, bly, qvicksilfver, tenn, zink, m. fl. och vätgas. Det är dock ej blott de kemiskt enkla kropparne, på hvilka magnetismen verkar; äfven de sammansatta, af hvad beskaffenhet de än må vara, äro underkastade denna lag. Så till exempel visa sig tusch, porslin, gummilacca och brännkol magnetiska, men hartz, trä, läder och de flesta animaliska ämnen deremot diamagnetiska.

Mellan polerna på en stark elektromagnet förhålla sig dessa båda slag af kroppar olika: de magnetiska ställa sig, då de äro fritt rörliga, med sin längdrigtning längs den mellan polerna gående linien; de diamagnetiska intaga en deremot vinkelrät ställning. Men i följd deraf, att äfven det omgifvande mediet röner inverkan af magneten, kan det inträffa, då det ena mediet utbytes mot det andra, att kropparnas egenskaper i ifrågavarande hänseende kunna synas helt och hållet förändrade. Såsom exempel härpå kan nämnas, att såväl svafvel som vax bortstötes från magneten, då de befinna sig i luft, men utbytes luften mot vatten, blir svaflet bortstött, under det att vaxet attraheras; deremot kunna båda dragas till magneten, när det omgifvande mediet utgöres af någon annan lämplig vätska. Man ser således, att ungefär samma förhållande eger rum här, som då kroppar af olika specifik vigt t. ex. trä och jern neddoppas i vatten: den ena stiger till ytan, den andra sjunker till botten, oaktadt båda äro underkastade tyngdkraftens inverkan; nedsänkas de deremot i sprit, sjunka båda, men i qvicksilfver stiga de bägge till ytan.

De magnetiska fenomenen sökte man förr förklara genom antagandet af tvenne magnetiska fluida, hvilka den s. k. koercitivkraften höll skilda från hvarandra inom magneten. Men denna åsigt blef ohållbar, när *Ampère* visade, att elektricitet och magnetism böra anses som modifikationer af en och samma kraft, och den blef det ännu mera, då *Faraday* upptäckte diamagnetismen. Förklaringen af dessa nya fenomen är dock särdeles svår, isynnerhet då man numera utrönt, att poler verkligen förefinnas hos diamagneten likaväl som hos magneten, ehuru de hos båda dessa slag af kroppar ej äro rigtade åt samma håll. Enligt *Weber* härrör diamagnetismen från induktionsströmmar, som i en bestämd rigtning skulle kretsa kring kropparnas minsta delar, men denna teori är allt för svårfattlig för att här närmare kunna omnämnas.

Oberoende af alla teorier om magnetismens natur har man för de särskilda ämnena kunnat numeriskt bestämma den *specifika* magnetismen, liksom man för dem bestämt tätheten eller den specifika vigten. Det har dervid visat sig, att, vid lika vigtsdelar, syret är 4 gånger mera magnetiskt än luften, och ungefär 3000 gånger mindre än jern, i följd hvaraf hela atmosferen borde i magnetiskt hänseende åstadkomma samma verkan, som ett lager af jern, hvilket omgåfve jorden och hade en tjocklek uppgående till $\frac{1}{10}$ millimeter eller ett hårstrås bredd.

Utan att inlåta oss på någon närmare förklaring böra vi i sammanhang med det föregående måhända tillägga, att *Faraday* äfven funnit de diamagnetiska fenomenen vara beroende af kropparnas inre byggnad eller s. k. krystalliniska struktur, äfvensom att vissa genomskinliga ämnen erhålla, under magnetens inverkan, förmågan att vrida polarisationsplanet hos den ljusstråle, som längs magnetens axel genomgår det ifrågavarande ämnet. Denna sistnämnda, i och för sig märkvärdiga upptäckt kan här så mycket mindre med tystnad förbigås, som den just utgjorde utgångspunkten för *Faraday's* diamagnetiska undersökningar.

4. Lagen för de elektro-kemiska undersökningarna.

Då de båda elektroderna till en elektrisk ström nedsättas i en saltlösning, sönderdelas denna, och lösningens metall samlar sig vid den negativa elektroden. Får en och samma elektriska ström samtidigt genomgå tvenne saltlösningar, som i öfrigt äro likartade, men af hvilka den ena innehåller t. ex. silfver och den andra koppar, så utfällas dessa båda metaller ej till lika vigter, utan i samma förhållande till hvarandra, som de tal, hvilka i kemien kallas *equivalenter*. Denna af *Faraday* år 1833 funna lag omfattade endast de af två element bestående s. k. binära föreningarna, men har sedan med vissa modifikationer utsträckts äfven till andra sammansättningar.

Huru vigtig denna *elektrolytiska* lag är, kan inses redan deraf, att den kemiska verkan, som vid polerna eger rum, verkligen kan tjena såsom mått på strömmens styrka, hvilken vanligen uppmätes genom den ur vatten på en gifven tid utvecklade vätgasmängden. *Faraday* benämnde det instrument, som vid dylik mätning numera användes, *Voltameter*, till erinran om stapelns uppfinnare, liksom man förut efter *Galvani* uppkallat det mätinstrument, som grundar sig på strömmens magnetiska verkningar.

Slutanmärkning.

I föregående redogörelse för *Faradays* upptäckter ha vi upptagit endast det aldra vigtigaste. Det redan anförda torde dock vara tillfyllest för att visa, hvilken outtröttlig och redbar arbetare *Faraday* varit i vetenskapens tjenst, och man kan icke annat än förundra sig öfver, huru det varit möjligt för en enda person att uträtta så mycket. Då någon frågade honom, hvari hemligheten till hans ständiga framgångar bestod, svarade han, »min hemlighet är »ganska enkel, den innefattas i desssa tre ord: *work*, *finish*, »*publish*».

ROB. THALÉN.

Bevis för kraftparallelogrammen
efter Laplace och Walker *.

Af G. DILLNER.

Vi förutskicka följande för vår bevisning behöfliga satser, hvilka dels äro sjelfklara dels blifva det genom någon liten belysning.

1:o. Tvenne på en punkt *samtidigt* verkande krafter (komponenter) kunna alltid till sin effekt ersättas af *en enda* kraft (resultant), verkande på den punkten; eller kortare uttryckt: tvenne krafter hafva alltid en resultant.

2:o. Resultanten af tvenne krafter ligger alltid i samma plan som dessa samt delar den af krafterna bildade vinkeln, som är mindre än två räta.

3:o. Resultanten af tvenne *lika rigtade* krafter är aritmetiska summan af krafterna med samma rigtning.

4:o. Resultanten af tvenne *lika stora* och *motsatt rigtade* krafter är noll.

---

* Den del af beviset, som rör resultantens storlek i kraftrektangeln, utgör med några små förändringar det för sin enkelhet berömda Laplaceska beviset i Méchanique Céleste, Liv. I. Chap. I. För den del åter, som rör resultantens rigtning i kraftrektangeln, uppger sig J. J. Walker såsom förste upphofsman (Quarterly Journal, Nov. 1867). Det Walkerska beviset är här omstöpt i en något mera elementär form. — Euklides I bok utgör nu en tillräcklig förkunskap för full insigt i beviset för kraftparallelogrammen, denna mekanikens hörnsten, med hvilken mekaniken såsom sträng teoretisk vetenskap står eller faller. Att icke något fullt tillfridsställande bevis för denna sats förut blifvit lemnadt, inses bland annat deraf, att nästan hvarje ny författare i mekaniken gifvit ett nytt sådant: ty antingen har en önskad förenkling i formen gjort behöflig hypotesen om «krafters flyttning« eller, som är detsamma, om angreppspunktens orubbliga förening med andra punkter, eller ock har en skärpt stränghet i förutsättningarna nödvändiggjort åtskilliga artificia calculi, hvilka varit långt utöfver den elementära matematiken. Det här förebragta Laplaceska och Walkerska beviset torde derföre vara förtjent af en mer än vanlig uppmärksamhet.

5:o. Om R är resultant till krafterna X och Y, så är μR resultant till krafterna μX och μY utan någon rigtningsförändring.

Man inser nämligen omedelbart, att mot krafterna $2X$ och $2Y$, $3X$ och $3Y$ o. s. v. måste svara resultanterna $2R$ och $3R$ o. s. v. utan någon rigtningsförändring; likaledes att mot $\frac{1}{2}X$ och $\frac{1}{2}Y$, $\frac{1}{3}X$ och $\frac{1}{3}Y$ o. s. v. måste svara $\frac{1}{2}R$ och $\frac{1}{3}R$ o. s. v., då således mot $\frac{p}{q}X$ och $\frac{p}{q}Y$ måste svara $\frac{p}{q}R$ utan rigtningsförändring. Enär slutligen hela talen p och q kunna väljas så, att det irrationella talet ligger mellan gränserna $\frac{p+1}{q}$ och $\frac{p}{q}$ och dessa kunna fås att differera från hvarandra på huru litet som helst, så inses satsens sanning äfven för det fall, att μ är ett irrationelt tal.

6:o. Resultanten af tvenne *lika stora* krafter delar vinkeln dem emellan *midt i tu.*

Låt OC vara resultant af de mot hvarandra vinkelräta krafterna OA och OB (fig. 14); låt ett med OA, OB, OC kongruent kraftsystem intaga läget OA, OB', OC'. Krafterna OB och OB' upphäfva då hvarandra enligt 4:o, och $2 . \overline{OA}$ blir resultant till de lika stora krafterna OC och OC', hvilken således delar vinkeln dem emellan midt i tu.

I. Kraftrektangeln.

Resultanten af tvenne mot hvarandra vinkelräta krafter är till storlek och rigtning lika med diagonalen i den rektangel, som konstrueras på krafterna som vidliggande sidor.

Vi fördela beviset i följande fem moment.

A)

Vi beteckna de tvenne mot hvarandra vinkelräta kraftkomponenterna OA och OB med X och Y samt resultanten OC med R (fig. 15). Vi sätta

$$X = mR,$$
$$Y = nR,$$

då X eller mR enligt 5:o kan ersättas af mX och mY utan rigtningsförändring i kraftsystemet, då således mX kommer att ligga som OF och mY sam OG. På samma sätt ersättes Y eller nR af nX och nY, den förra liggande som OE och den senare som OD. Men nu äro nX och mY lika stora, såsom varande begge $= mnR$, och dertill motsatt rigtade, då de således enligt 5:o upphäfva hvarandra. Återstår således

$$R = mX + nY,$$

hvilken likhet genom multiplikation med talet R blir

$$R^2 = X^2 + Y^2,$$

då följaktligen R till storleken är lika med diagonalen i den med X och Y som sidor konstruerade rektangeln.

B)

Om vi antaga X och Y lika stora, så måste enligt 6:o resultanten dela vinkeln dem emellan midt i tu, *då följaktligen resultanten af tvenne lika stora och mot hvarandra vinkelräta krafter är till storlek och rigtning lika med diagonalen i den qvadrat, som konstrueras på de lika stora krafterna som vidliggande sidor.*

C)

Vi antaga tvenne lika stora krafter OA och OB samt $\wedge AOB = 45^\circ$ (fig. 16). Romben $OACB$ och rektangeln $OXCY$ fullbordas; diagonalen OC drages äfvensom $BD \perp OX$. Enligt B) kan nu kraften OB ersättas af krafterna OD och OY, då således resultanten af OA och OB måste till storlek och rigtning vara densamma som resultanten af OY samt $OA + OD = OX$. Men enligt A) är resultanten af OX och OY *till storleken* $= OC$; och OC, såsom delande $\wedge AOB$ midt i tu, är enligt 6:o *till rigtningen* resultant af OA och OB, d. v. s. af OX och OY. *Alltså är kraftrektangeln bevisad för det fall, att resultanten bildar med sin ena kraftkomponent en vinkel* $= \frac{45^0}{2}$.

Med stöd af denna sats kan man på enahanda sätt bevisa, att kraftrektangeln är sann, då vinkeln mellan resultanten och ena kraftkomponenten är $\frac{45^0}{2.2}$; vidare, att den är sann, då vinkeln är $\frac{45^0}{2.2.2}$, och i allmänhet, då vinkeln är $\frac{45^0}{2^n}$.

D)

Vi antaga de två lika stora krafterna OA och OB (fig. 17), bildande respektive vinklarna α och β med rigtningen OX, samt att kraftrektangeln gäller, då vinkeln mellan resultanten och den ena kraftkomponenten är α eller β. Romben $OACB$ och rektangeln $OXCY$ fullbordas. Diagonalen OC drages äfvensom AD och $BF \perp OX$ samt AE och $BG \perp OY$. Enär kraftrektangeln antages gälla för resultantrigtningarna OA och OB, så måste resultanten af krafterna OA och OB både till rigtning och storlek vara densamma som resultanten af krafterna $OD + OF = OX$ samt $OE + OG = OY$. Men resultanten af OX och OY är enligt A) *till storleken* $= OC$; och OC, såsom delande vinkeln AOB midt i tu, är *till rigtningen* resultant af OA och OB, d. v. s. af OX och OY. Men $\wedge XOC = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, *då således, om kraftrektangeln är sann, då resultantens vinkel med ena kraftkomponenten är* α *eller* β, *så är den äfven sann, då denna vinkel är* $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

E)

Då nu kraftrektangeln gäller för $\alpha = \frac{45^0}{2^n}$ och $\beta = \frac{45^0}{2^m}$ och följaktligen äfven för deras halfva summa o. s. v., så är det lätt att öfvertyga sig om, att denna sats gäller, då resultanten bildar en vinkel φ hvilken som helst med sin ena kraftkomponent.

Ty låt OY vara $\perp OX$ och låt OC bilda $\wedge\,\varphi$ med OX (fig. 18). Vi låta $\wedge\, XOA = 45^0$ och antaga $\varphi < 45^0$. Om nu $\wedge\, XOA$ halfveras af OA_1, så måste OC dela antingen $\wedge\, XOA_1$ eller $\wedge\, A_1OA$, vi antaga det senare. Om vi sedan halfvera $\wedge\, A_1OA$, så måste OC dela endera af de uppkommande halfvorna $\wedge\, A_1OA_2$ eller A_2OA, vi antaga det senare. Om vi vidare halfvera denna vinkel o. s. v. in infinitum, så måste vi slutligen träffa på en halfveringslinie, som antingen sammanfaller med OC eller skiljer sig derifrån på mindre än det minsta tänkbara vinkelvärde. Men vi hafva bevisat, att kraftrektangeln är sann, då resultantens rigtning sammanfaller med någon af dessa halfveringslinier. Alltså gäller kraftrektangeln, då resultantens vinkel med ena kraftkomponenten är en vinkel φ hvilken som helst, då således kraftrektangeln är fullt bevisad.

II. **Kraftparallelogrammen.**

Resultanten af tvenne krafter hvilka som helst är till storlek och rigtning lika med diagonalen i den parallelogram, som konstrueras på krafterna som vidliggande sidor.

Vi antaga de två krafterna OA och OB (fig. 19). Parallelogrammen $OACB$ och rektangeln $OAXCY$ fullbordas. Diagonalen OC drages äfvensom $BD \perp OX$. Kraften OB kan nu enligt I ersättas af OD och OY, då således resultanten af OA och OB måste *till storlek och rigtning* vara densamma som resultanten af $OA + OD = OX$ samt OY, d. v. s. diagonalen OC, hvarigenom den framstälda satsen är bevisad.

Satser.

7. Om en rät linie drages genom tangeringspunkten till två cirklar, hvilka tangera hvarandra invändigt i de-

ras högsta eller lägsta punkt, så blir falltiden, längs den mellan de båda cirkelperiferierna belägna delen af linien *konstant*, ifall partikeln börjar sin rörelse utefter denna del utan begynnelsehastighet.

Sök läget för den *räta* linie, längs hvilken en partikel, utan begynnelsehastighet, faller på *kortaste* tid

8. från en gifven rät linie, belägen utanför en gifven cirkel, till cirkeln;

9. från en gifven cirkel till en gifven rät linie, belägen utanför cirkeln;

10. från en gifven cirkel till en annan gifven, men utanför densamma belägen cirkel;

11. från en gifven cirkel till en annan gifven, men innanför densamma belägen cirkel;

12. från en gifven cirkel, belägen inom en annan gifven cirkel, till denna yttre cirkel.

Sats af J. E. Cederblom,

föreståndare för Malmö tekniska skola.

13. Ur en metallring *abce* af rektangulär genomskärning och diametern D bortskäres ett stycke *ab*, hvarefter ringen hopböjes så, att de båda ändarne *a* och *b* komma intill hvarandra, hvarvid ringens diameter blir d; denna inskjutes nu i en cylinder, hvars diameter också är d. Då ringens dimensioner äro bekanta, äfvensom elasticitetsmodylen hos det ämne, hvaraf ringen är gjord, samt friktionskoefficienten mellan ringen och cylindern, att beräkna den kraft, som erfordras för att skjuta ringen fram genom cylindern.

Anm. Förekommer vid beräkningen af det skadliga motståndet inom vissa blåsmaskiner och ångmaskiner.

AFDELNING IV.

Något om de skriftliga profven för mogenhetsexamen.

Då till vår kunskap kommit, att åtskilligt missförstånd gjort sig gällande med afseende på den formella behandlingen af de i profskrifningen förelagda matematiska och fysiska ämnen, så anse vi oss icke gå utom tidskriftens plan, då vi lemna en kort anvisning om den lämpliga formen för dylika ämnens behandling.

Det lär icke sällan inträffa, att lösningen af en räknesats inskränker sig till ett naket angifvande af sjelfva slutfacit. En sådan lösning, äfven om hon icke bör anses helt och hållet förkastlig, angifver dock icke, hvad granskaren helst önskar veta såsom rättelse för sitt omdöme, huruvida eleven genom sina studier förvärfvat den omdömets skärpa, som säkert förstår skilja hufvadsak från bisak, samt huruvida han utbildat den med rätta högt skattade förmågan att utan fraser tätt binda sina ord vid följdrigtiga tankar, eller kortligen, huruvida han hunnit den mognad i förstånd och omdöme, som man med rätta fordrar som frukt af den matematiska elementarundervisningen. Vid behandlingen af en räknesats bör eleven isynnerhet lägga märke till, att satsens uppställning i eqvation innebär ingenting annat än en öfverflyttning af de i satsen uttalade vilkoren från vanligt språkbruk till det algebraiska språket. En sådan öfverflyttning bör under en väl afpassad diskussion utföras: eqvationen bygges af de i satsen ingående talen (vare sig i siffror eller bokstäfver angifna) genom att foga det ena vid det andra med sitt tillbörliga räknetecken, då betydelsen af hvarje på detta sätt framträdande term, åtminstone om han utsäger något vigtigare vilkor hos satsen, bör särskildt framhållas, hvarefter den slutliga hopfogningen af de diskuterade termerna i öfverensstämmelse med det uttalade hufvudvilkoret utgör satsens öfversättning till det algebraiska språket. Vid uträkningen angifvas steg för steg resultaten af hvarje vigtigare transformation, hvarvid alla möjliga förenklingar och förkortningar sorgfälligt iakttagas. Slutresultatet eller slutfacit undersökes med omsorg, hvarvid svar, som äro främmande för satsen, utgallras. Inträffar ett sådant främmande svar vid lösningen af en qvadratisk eqvation, så kan man undersöka, om någon sådan modifikation af satsen är möjlig, hvarigenom detta svar äfven blir antagligt; inträffar det åter vid lösningen af en roteqvation, så är det stundom främmande för sjelfva eqvationen och bör då såsom sådant angifvas. I afseende på den yttre städseln iakttages, att en korrekt och koncis text bindes vid hyfsade och väl bygda formler genom lediga vändningar och en väl afpassad kommatering, «text och matematik på skilda rader«, så att det hela får utseende af, hvad man kallar, matematisk elegans. — Vid behandlingen af de geometriska satserna bör eleven undvika att slafviskt efterbilda den euklideiska omständligheten och omsägningen; han bör i stället i korta och raska drag angifva kärnpunkterna af beviset, bindande dem den ene vid den andre i en enkel och naturlig tankeföljd utan andra omtagningar än sådana, som äro oundgängligen nödvändiga för bevisets tydlighet. Dervid iakttages, att de i våra nyare geometriska läroböcker införda beteckningarna för vinkel, parallel, kongruent, likformig o. s. v. användas till förkortning af texten och för åskådligheten af beviset. Figurerna böra tecknas med största möjliga omsorg och korrekthet. Såsom synnerligen vigtigt framhålles, att satsens lösning bör vara uttömmande, d. v. s. att alla möjliga fall, som kunna passa in på satsens ordalydelse böra särskildt undersökas och behandlas (t. ex. i fråga om triangel i allmänhet, att de tre fallen spetsvinklig, trubbvinklig och rätvinklig hvart för sig skärskådas). Till förtjenst räknas naturligtvis, om eleven, efter att hafva löst sin sats, lyckas finna en allmännare lösning, hvaraf den erhållna utgör blott ett specielt fall; dock bör han icke offra tid på funderingar i den vägen, innan han lemnat den i satsen fordrade lösningen. — De fysiska satserna äro i afseende på den formella behandlingen att hänföra till endera af förut afhandlade kategorier, hvarvid sorgfälligt iakttages, att de fysiska lagar, hvarpå satsernas lösning grundar sig, böra tydligt och bestämdt angifvas.

Det är ett obestridligt faktum, att resultaten af den matematiska elementarundervisningen vid våra läroverk, der de förberedande öfningarna för profskrifningen blifvit omsorgsfullt behandlade, stå ojemnförligt högre nu, än hvad de stodo under samme lärares händer, innan dessa öfningar blefvo en nödvändighet. Vi räkna derföre ock stadgandet om profskrifningen såsom en af de vackraste paragraferna i vår nuvarande skollagstiftning. Äfven om vi måste medgifva, att de framlagda satserna hittills till stor del varit af det enkla slaget, att de i en med afseende på de förberedande öfningarna väl ordnad skolundervisning kunna med fördel lösas redan af sjette klassens mera försigkomna elever, så anse vi dock visliga handladt af vederbörande, att under närvarande, för det matematiska elementarstudiet vigtiga, öfvergångsskede småningom vinna land för detta hos oss nya sätt att studera matematikens elementer, hvilket under en skicklig och nitisk lärarecorps otvifvelaktigt kommer att i en framtid bringa vackra frukter både åt vetenskapen och fosterlandet. Profskrifningen har redan alstrat en liten nätt litteratur af fyndigt och väl uttänkta satser, hvilka, om de omsorgsfullt studeras med de under liggande grunderna, utgöra med få luckor en väl afpassad kurs i matematikens och fysikens elementer. Vi hafva väl ännu icke någonting jemnförligt med de engelska «examenspapperen« med sina höga anor, hvarifrån Todhunter skördat sina förträffliga exempelsamlingar; säkerligen skall dock — vi hoppas det — inom en måhända icke alltför aflägsen framtid en litteratur af pröfningssatser hos oss uppstå, hvilken t. o. m. för utländingen skall vittna om det matematiska elementarstudiets vackra ståndpunkt i Sverige. Tiskriften skall med synnerlig uppmärksamhet följa dessa satser; och, då hon icke saknar utsigt, att tillfälle dertill beredes henne, skall hon intaga de bästa för mogenhetsexamen utförda skrifningarna, hvilka kunna tjena som prof på de mera försigkomna examinandernas ståndpunkt och såsom efterföljansvärda mönster för kommande examinandi.

D.

Anmälan af Weströms och Lindmans läroböcker i geometri.

Af F. W. Hultman.

1. Lärobok i geometri, omfattande de sex första böckerna af Euclides, af C. A. Weström, Ph. Mag., adj. vid högre elementarläroverket i Wisby. Stockholm 1867. Pris: 75 öre.

Förf. har indelat sin lärobok i fem böcker. Den första handlar om räta linier och trianglar (motsvarande ungefär Eukl. I: 1—I: 32), den andra om parallelogrammer (Eukl. I: 34—II: 14), den tredje om cirkeln och reguliera månghörningar (Eukl. III, IV). Den fjerde boken (Eukl. V) är proportionslära, och den femte visar proportionslärans tillämpning på ytor och plana figurer (Eukl. VI).

Detta arbete har liksom Bråkenhjelms upplaga af Euklides den förtjensten att begagna korta beteckningssätt, såsom +, —, $\wedge$, $\|$, $\sim$ m. m. Bevisen blifva derigenom lättare att genomläsa, äfvensom bokens volym betydligt förminskad. Genom att här och der förändra de euklideiska definitionerna, omkasta satsernas ordningsföljd har förf. sökt förenkla bevisen för flere satser. Af sålunda förenklade satser nämna vi följande:

1. Vinklarne vid basen i en likbent triangel äro lika stora. Beviset sker genom att dela vinkeln vid spetsen midt i tu.

2. Om i en triangel vinklarne vid basen äro lika stora, så är triangeln likbent. För bevisets skull drager man från spetsen en mot basen vinkelrät linie.

3. Att förvandla en gifven rätlinig figur till en triangel. Konstruktionen är den vanliga att skaffa bort det ena hörnet efter det andra.

4. Att rita en triangel sådan, att hvar vinkel vid basen är dubbelt så stor som vinkeln vid spetsen. Den eleganta upplösningen, som ej förutsätter någon kännedom af Euklides' tredje bok, sker på följande sätt. Man delar en rät linie AB så, att $AB \cdot BC = \overline{AC}^2$, uppritar på BC såsom bas en likbent triangel BCD, der $BD = CD = AC$. Triangeln ABD är den begärda.

5. Om tvenne cirklar tangera hvarandra, så ligga medelpunkterna och tangeringspunkten i samma räta linie.

Efter att hafva anfört arbetets förtjenster, vilja vi påpeka några punkter, i hvilka vi ej kunna instämma med förf. De förnämsta äro följande:

1. Förf:s bevis för den satsen, «två trianglar äro kongruenta, om de tre sidorna i den ena triangeln äro lika stora med hvar sin af de tre sidorna i den andra«, är ofullständigt, enär förf. ej bevisat den satsen, att tvenne cirklar ej kunna skära hvarandra mer än i två punkter, en på hvardera sidan om linien, som förenar cirklarnes medelpunkter.

2. I sitt bevis för satsen «om två räta linier äro parallela och en tredje linie skär dem, så är hvarje yttre vinkel lika med motsvarande inre« gör förf. en cirkelgång. Förf. låter nämligen den ena af de parallela linierna flytta sig, alltjemt bibehållande sin egenskap att vara parallel, tills den inträffar på den andra linien, och då måste — så sluter förf. — utanvinkeln och innanvinkeln sammanfalla. Kan det ej hända, att under denna flyttning utanvinkeln ändrar storlek? Beviset för att denna vinkel ej ändrar storlek är detsamma som att bevisa sjelfva satsen.

3. Förf. anför på flere ställen bokstäfver, hvilkas betydelse ej är fullt tydlig. Så t. ex. i satsen «att från en punkt A utom en linie BC draga en mot densamma vinkelrät linie« säger förf.: «tag A till medelpunkt och rita en cirkel med en radie sådan, att cirkeln skär BC i D och E, skär DE midt i tu och drag AD, AF och AE.« Här synes det nästan som om D och E vore ett par på förhand erhållna punkter, genom hvilka man skall lägga en cirkelperiferi. Vidare är det alldeles icke klart, att AF skall vara den linie, som skär vinkeln midt i tu.

4. Definitionen «i rätvinkliga parallelogrammer äro alla vinklarne räta« bör heta: sådane pgrmr, i hvilka alla vinklarne äro räta, kallas rätvinklige.

5. På storleken af delen AH af en linie AB, som är delad så, att $\overline{AH}^2 = AB \cdot BH$ har förf. funnit tvenne uttryck utan att förkasta eller visa betydelsen af det ena af dessa.

6. I beviset för satsen, att medelpunktsvinkeln ACB är dubbelt så stor som periferivinkeln ADB stöder förf. den sanningen, att $2 . \wedge CDA + 2 . \wedge CDB = 2(\wedge CDA + \wedge CDB)$ på den satsen, att om man lägger lika till lika, så blifva de hela lika, i stället för att denna sanning endast är en tillämpning af satsen $m(A + B) = mA + mB$, eller, hvilket är detsamma, af den sanningen, att ordningen af termerna i en summa är likgiltig.

7. I satsen «om en cirkelbåge ADB är gifven, att finna medelpunkten till cirkeln«, felas bevis för, att man erhåller samma medelpunkt hvilken punkt på bågen AB man än må välja.

8. Förf:s sätt att från en punkt på periferien draga en tangent till cirkeln visar ej, att det är omöjligt att genom denna punkt lägga mer än en tangent.

9. I öfverensstämmelse med förf:s plan att lemna enkla bevis hade konstruktionerna för uppgifterna «att från en gifven punkt utom en cirkel draga en tangent till densamme« och att på en gifven rät linie upprita ett segment, som i sig innehåller en gifven vinkel« bort utbytas mot vida enklare.

10. Då förf. skall bevisa, att två lika stora qvantiteter A och B hafva samma förhållande till en och samma C, så säger förf.: emedan $A = B$, så är $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$. Detta sitt påstående stöder förf. på ax. 4, hvilket låter: om två qvantiteter äro lika stora och man tager hvardera lika många gånger eller delar dem i lika många lika stora delar, så äro mångfalderna eller delarne lika stora. Tillämpningen af detta axiom förutsätter att C är ett helt eller på sin höjd ett brutet tal. Beviset duger således ej då C är en storhet hvilken som helst (en kropp, en vinkel o. s. v.), utan blott för det fall, att C är ett tal helt eller brutet och således på grund af defin. 4, då också A och B äro tal.

11. Satsen $A : B = mA : mB$ bevisar förf. på följande sätt: $A : B = \frac{A}{B} = \frac{mA}{mB} = mA : mB$. Rigtigheten af påståendet $\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$ visar förf. ej, anser således detta kändt ur aritmetiken. De vanliga läroböckerna visa dock denna sats endast för det fall, att m är helt eller brutet tal, men ej för m lika med ett irrationellt tal. Författarens bevis är således ej tillräckligt allmänt. Denna och föregående punkt kunde möjligen antyda, att förf:ns proportionslära afser endast hela och brutna tal. Men då förf. har en sats så lydande: «om $A : B = C : D$, så är $\sqrt{A} : \sqrt{B} = \sqrt{C} : \sqrt{D}$", finner man, att han vill, att den skall gälla äfven för irrationella tal.

12. Vid satsen «uti hvarje analogi är produkten af de yttersta lika stor med produkten af de medlersta« hade förf. bort tillägga, att åtmin-

stone tvenne af storheterna skola vara tal, alldenstund man ej kan tala om en produkt af tvenne storheter, så framt ej den ena af dessa är ett tal. Att förf:ns proportionslära ej ensamt afser tal, synes deraf, att förf. ej tillåter termernas omvexling i en analogi, så framt man ej är förvissad om, att alla fyra äro af samma slag.

13. I beviset för satsen «trianglar som hafva samma höjd förhålla sig till hvarandra som sina baser« delar förf. upp den ena triangelns bas i oändligt många sinsemellan lika stora delar och säger sedan: emedan hvarje del är oändligt liten, måste han innehållas ett helt antal gånger i den andra triangelns bas. Detta påstående, som möjligen af den i ämnets svårigheter fullt invigde kan försvaras, är dock för nybörjaren obegripligt. Bättre är att undvika allt tal om oändligt små och först bevisa satsen för det fall, att baserna hafva ett ändligt gemensamt mått och sedan för det, då de icke hafva ett ändligt gemensamt mått, hvilket senare bevis ej möter några svårigheter, om det hålles indirekt.

Samma anmärkning gäller förf:ns bevis af satsen: «uti lika stora cirklar förhålla sig bågarne till hvarandra som deras motsvarande medelpunktsvinklar«.

Af det föregående visar det sig, att proportionsläran och läran om parallela linier äro de svaga punkterna i förf:ns lärobok. Dessa äro ock utan tvifvel de svåraste kapitlen inom elementarmatematiken — de Pater-Noster-skär, på hvilka många författare af matematiska läroböcker förut strandat. Emellertid kunna vi ej underlåta att erkänna, det förf. bemödat sig att i en lättläst och kort bok meddela de vigtigaste satserna inom elementarmatematiken. (Forts.)

Böcker, utgifna 1867—1868.

Aritmetik och Algebra.

α) I Sverige.

Sievers, P. F. Första öfningsboken i räkning, med synnerligt afseende på en naturlig sammanbindning af muntlig och skriftlig räkning utarbetad. 12:o 138 s. Sthm Seligmann. Inb. 0,85.

Landgren, C. J. Hufvudräkningskurs för Folkskolelärare-seminarier, folk- och småskolor. Sthm. Hjerta. 2:a uppl. 12:o. 0,75.

Åberg, Lärobok i räknekonsten. För folkskolor och nybörjare. 8:de uppl. 12:o. 56 s. och 4 s. facittabeller. 0,25. (40,000 ex. hafva utgått på några år)

Kindvall, C. A. Räknelära för folkskolor och begynnare. Warberg. Inb. 0,40.

C r o n h j e l m, P. E. Elementerna af aritmetiken och planimetrien. 6:te uppl. omarbetad af Sylvan. Christianstad, Littorin. I. Aritmetik och Algebra. 216 sid. 1,50.

F r ö l é e n, J. F. Den lille räknemästaren, 9:de uppl. 12:o. 48 s. Sthm Hæggström. 0,25.

N y s t r ö m, C. A. Sifferräknelära, indelad i 2 kurser. Förra kursen, 6:te uppl. 8:o. 60 och 10 sidd. Hæggström. Inb. 0,70

S v e n s o n, C. Y. N. Räknelära enligt den algebraiska metoden. Försök till reform af den vanliga behandligen till och med enkel regula de tri. Med 250 öfn.ex. 68 sid. Kongsbacka. Zachrisson. 1,25. Bihang till räkneläran. 0,25.

W å h l é n, P. Räknekurs för nybörjare och folkskolor, omfattande öfningsexempel i hufvudräkning, räkning på tafla samt första grundbegreppen i geometrien. 16:o. 34 sid. Sthm. Bonnier. 0,10.

Z w e i g b e r g k, P. A. Lärobok i räknekonsten. 22 uppl. 236 sid. Sthm. Looström. Inb. 1,75.

H u l t m a n, F. W. Matematiska och fysikaliska problem, utdelade af Ecklesiastikdepartementet under åren 1864—67 för de skriftliga mogenhetsexamina vid de svenska läroverken. Sthm. 0,50.

L j u n g h, J. Räknelära f5r folkskolan. 1. Räknelära. 2. Exempelbok. Kongsbacka 1867. 2,00.

S c h e l i n. Räknelära jemnte det allmännaste af geometrien. 6:te uppl. Nora. 0,65.

β) I Norge.

E v e n s e n, O. Regnebog for Almueskolor. Bergen. F. Beyer. 16 sk.

K r o g h, G. C. Praktisk regnebog til skolebrug. Bergen. Beyer. Inb. 60 sk.

——— Facitbok til praktisk regnebog til skolebrug. 24 sk.

——— Opgaver i praktisk regning. Bergen. F. Beyer. Inb. 30 sk.

Å s t r a n d, J. J. Regnebog for skoleungdomen. 3:die Udgave. Bergen. Ed. B. Giertsen. Inb. 54 sk.

F e r a g e n, A. M. Regneövelser. Christianssand. K. C. Grøntoft. Inb. 30 sk.

G u l d b e r g, C. M. Mathematiske opgaver. I. Mathematik og Algebra. 2:den forøgede udgave. P. F. Steensballe. 36 sk.

——— Oplösninger til samme. P. F. Steensballe. 24 sk.

E c k h o f f. Praktisk regnebog. 1—3 hefte. Stavanger. 24 sk.

(Forts.)

Fig. 7.

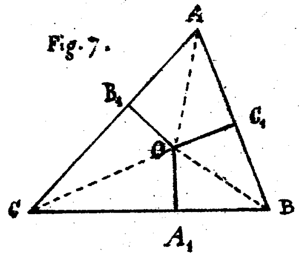


Fig. 8.

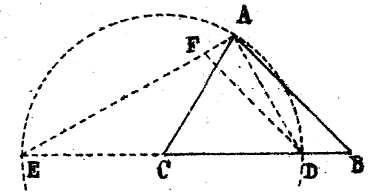


Fig. 9.

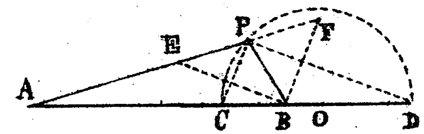


Fig. 10.

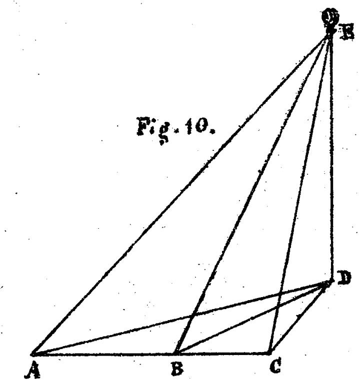


Fig. 11.

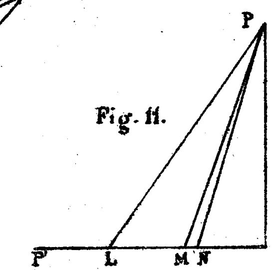


Fig. 13.

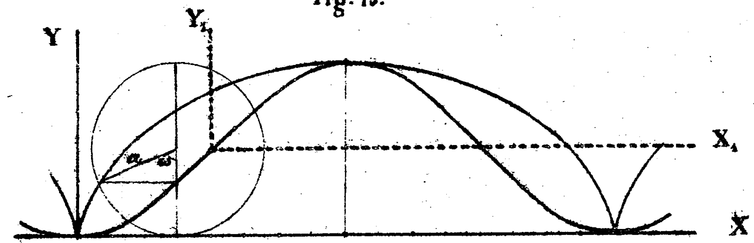


Fig. 12.

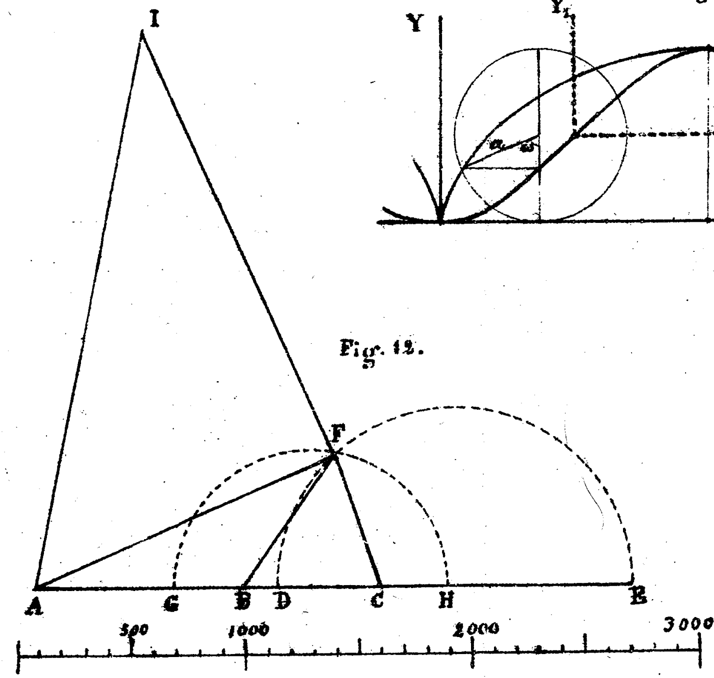


Fig. 14.

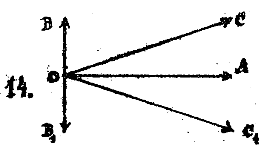


Fig. 15.

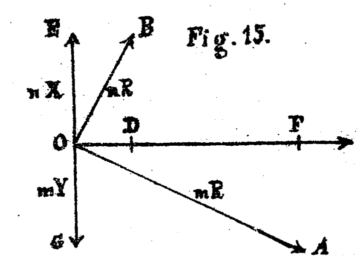


Fig. 16.

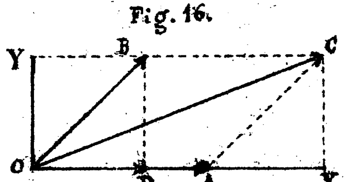


Fig. 17.

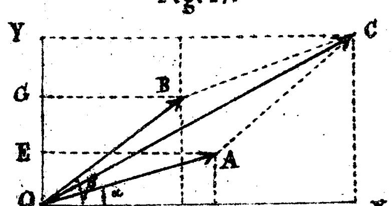


Fig. 18.

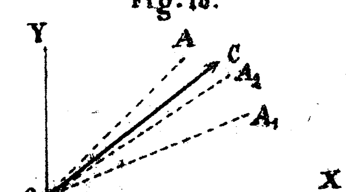
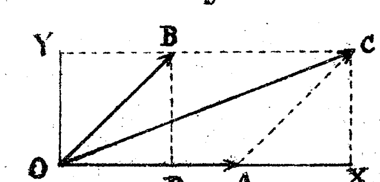


Fig. 19.



AFDELNING I.

Försök till förenklad framställning af några matematiska satser.

Af lektor K. P. NORDLUND.

I algebran begagnas ofta hjelpqvantiteter vid lösning af vissa frågor, då man på ett enklare sätt enligt min åsigt kunnat komma fram till målet. Se här några uträknade exempel utan användande af hjelpqvantiteter.

1) Hvilken är expressionens $3x^2 - x + 2$ minsta valör?

$$3x^2 - x + 2 = 3\left\{x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right\} = 3\left\{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{2}{3}\right\}$$

$$= 3\left\{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right\} = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12},$$

hvilken expressions valörer för *reella* x-valörer äro $\frac{23}{12}$ samt hvarje större värde, hvadan minimum är $\frac{23}{12}$, hvilken valör expressionen erhåller, då x är $\frac{1}{6}$.

2) Hvad är summan af $1, a, a^2 \ldots a^{r-1}, a^r$?

$$1 + a + a^2 + a^3 \ldots a^{r-1} + a^r = \frac{(a-1)\{1 + a + a^2 + a^3 \ldots a^{r-1} + a^r\}}{a - 1}$$

$$= \frac{a + a^2 + a^3 + a^4 \ldots a^r + a^{r+1} - 1 - a - a^2 - a^3 \ldots a^{r-1} - a^r}{a - 1}$$

$$= \frac{a^{r+1} - 1}{a - 1}.$$

3) Bevisa att $\log_a b \, . \, \log_b c \, . \, \log_c d \, . \, \log_d e = \log_a e$ under förutsättning att a, b, c och d äro tal, större eller mindre än 1, och e ett tal hvilket som helst.

$$a^{\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d \,.\, \log_d e} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b c \,.\, \log_c d \,.\, \log_d e}$$

$$= b^{\log_b c \,.\, \log_c d \,.\, \log_d e} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_c d \,.\, \log_d e} = c^{\log_c d \,.\, \log_d e}$$

$$= d^{\log_d e} = e.$$

Nu är $$a^{\log_a e} = e,$$

alltså $$a^{\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d \,.\, \log_d e} = a^{\log_a e}$$

eller

$$\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d \,.\, \log_d e = \log_a e.$$

Anm. Satsen, som jag ej förr sett, kan utsträckas naturligtvis till huru många tal som helst.

På samma sätt bevisas de öfriga log.-satserna.

Om isoperimetriska produkters maxima *.

Af G. Dillner.

En produkt säges vara *isoperimetrisk*, då summan af de ingående faktorerna är *konstant*. Sjelfva denna summa åter kalla vi produktens *perimeter*. Så t. ex. äro produk-

---

* Jfr Traité Élémentaire d'Algèbre par H. E. Tombeck. Den här afhandlade läran om, hvad vi kalla, isoperimetriska produkter, är för elementarmatematiken utan tvifvel af icke ringa betydelse. Elementaralgebran eröfrar, så att säga, genom henne från differentialkalkylen en hel klass af intressanta och företrädesvis i praktiskt afseende vigtiga frågor, hvilka det varit nämnde kalkyl förbehållet att hittills ensam besvara. Den här utvecklade metoden är så enkel och åskådlig samt dertill så vig i användningen, att t. o. m. den i differentialkalkylen fullt bevandrade icke behöfver stadna i valet, då det rör frågor, som ligga inom hennes område. Då man sammanfattar den grupp af maximi- och minimiproblem, som kunna lösas förmedelst qvadratiska eqvationer, med den, som ligger inom gränserna af denna metod, så har man en ganska aktningsbjudande samling af lärorika och intressanta problem, hvilka mer än andra torde vara egnade att väcka håg för matematikens studium och att redan hos skolynglingen skapa insigt om denna vetenskaps höga betydelse. Tidskriften skall i sin mån söka verka för åstadkommandet af en dylik problemsamling, och hon mottager tacksamligen bidrag vare sig i form af nya problem, eller i form af nya belysningar öfver den afhandlade metoden.

terna xyz, x^3y^2z, $(xyz)^2$ isoperimetriska, om de respektiva summorna eller perimetrarna $x+y+z$, $2xy+x+z$, $xy+xz+yz$ äro konstanta; vidare äro produkterna $x(a-x)$, $x^2(r^2-x^2)$, $xy(a-x-y)$ o. s. v. genom sjelfva sin natur isoperimetriska, då nämligen a och r äro konstanter. De faktorer, som i denna diskussion förekomma, antagas alla vara *positiva.*

Vi förutskicka följande för vår bevisning behöfliga sats *.

Produkten af n faktorer x_1, $x_2 \ldots x_n$ *är alltid* $<$ *eller* $=$ *n:te digniteten af deras aritmetiska medium, detta senare dock endast i det fall, att alla faktorerna äro lika.*

Af $(x_1-x_2)^2 \geqq 0$ följer $x_1^2+x_2^2 \geqq 2x_1x_2$ samt vidare $(x_1+x_2)^2 \geqq 4x_1x_2$ eller, som är detsamma,

$$x_1x_2 \leqq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

der tecknet $<$ gäller för olika och tecknet $=$ för lika faktorer, då således satsen är bevisad för två faktorer.

På grund af (1) är vidare

$$\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\,.\,\tfrac{1}{2}(x_3+x_4) \leqq \left\{\frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_3+x_4)}{2}\right\}^2,$$

hvilken olikhet (likhet) efter qvadering å ömse sidor och efter utbyte af $\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\}^2$ och $\{\frac{1}{2}(x_3+x_4)\}^2$ mot de respektive mindre (lika) faktorerna x_1x_2 och x_3x_4 blir

$$x_1x_2x_3x_4 \leqq \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4 \ldots\ldots (2),$$

der tecknet $=$ tydligen gäller blott det fall, att alla faktorerna äro lika. Satsen är således bevisad för fyra faktorer.

Med stöd af (2) och (1) kan nu satsen bevisas för åtta faktorer, vidare för sexton faktorer och i allmänhet för p faktorer eller att

$$x_1x_2\ldots x_p \leqq \left(\frac{x_1+x_2+\ldots x_p}{p}\right)^p \ldots\ldots (3),$$

då p är någon dignitet af 2 hvilken som helst.

---

* Jfr Algebra by Todhunter, pag. 404.

Vi gå nu att bevisa satsen för n faktorer, då n är ett helt tal hvilket som helst $< p$. Till detta ändamål sätta vi

$$p = n + r \quad \text{och} \quad t = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

samt antaga $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots x_p = t$. Olikheten (likheten) (3) blir nu

$$x_1 x_2 \ldots x_n t^r \leqq \left(\frac{nt + nr}{n + r}\right)^{n+r}, \text{ d. v. s. } \leqq t^{n+r},$$

då efter bortdividering af t^r

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right)^n \ldots\ldots (4),$$

då således satsen är bevisad för hvilket antal faktorer som helst.

I. *En isoperimetrisk produkt är maximum, då hans alla faktorer äro lika.*

Antag $x_1 + x_2 + \ldots x_n = k$, der k är konstant, så är enligt (4)

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqq \left(\frac{k}{n}\right)^n,$$

då således det största värde produkten $x_1 x_2 \ldots x_n$ kan få är $\left(\frac{k}{n}\right)$, hvilket inträffar då

$$x_1 = x_2 = \ldots x_n.$$

II. *En produkt af potenser med positiva exponenter, hvilken är isoperimetrisk i afseende på potensernas baser, är maximum, då baserna, dividerade med sina respektive exponenter, äro lika.*

1:o. Exponenterna *hela* tal.

Vi taga till undersökning produkten $x^l y^m z^n$. Vi sätta basernas perimeter $x + y + z = k$, der k utmärker ett konstant talvärde. Produkten $x^l y^m z^n$ är tydligen maximum på samma gång som produkten $\left(\frac{x}{l}\right)^l \left(\frac{y}{m}\right)^m \left(\frac{z}{n}\right)^n$, d. v. s. på samma gång som produkten

$$\frac{x}{l}\cdot\frac{x}{l}\ldots(l\text{ faktorer})\times\frac{y}{m}\cdot\frac{y}{m}\ldots(m\text{ fakt.})\times\frac{z}{n}\cdot\frac{z}{n}\ldots(n\text{ fakt.}),$$

hvilken åter, såsom hafvande k till perimeter, är maximum för

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},\ \text{h. s. b.}$$

Satsen gäller tydligen för en produkt af huru många digniteter som helst.

2:o. Exponenterna *brutna* tal.

Vi taga till undersökning produkten $x^{\frac{l}{p}}.y^{\frac{m}{q}}.z^{\frac{n}{r}}$. Vi sätta såsom förut basperimetern $x+y+z=k$. Produkten $x^{\frac{l}{p}}.y^{\frac{m}{q}}.z^{\frac{n}{r}}$ är tydligen maximum på samma gång som hans (pqr):te dignitet $x^{lqr}.y^{mpr}.z^{npq}$, hvilken åter enligt 1:o är maximum för

$$\frac{x}{lqr}=\frac{y}{mpr}=\frac{z}{npq}$$

eller, som är detsamma, för

$$\frac{x}{\frac{l}{p}}=\frac{y}{\frac{m}{q}}=\frac{z}{\frac{n}{r}},\ \text{h. s. b.}$$

Satsen gäller tydligen för en produkt af huru många potenser som helst.

Anm. 1. Enär det irrationella talet kan fås att ligga mellan rationella gränser, hvilka skilja sig från hvarandra på huru litet som helst, så inses satsens sanning äfven för det fall, att exponenterna äro irrationella tal.

Anm. 2. Då maximum af en produkt motsvaras af minimum af hans perimeter, så inses, att frågor rörande perimetrars minima för gifna produktvärden kunna med lika fördel afhandlas enligt de ofvan framstälda satserna.

*Exempel**.

1. *Dela talet 23 i tre sådana delar, att produkten af den första delens qvadratrot, den andra delens kubikrot i qvadrat och den tredje delens fjerde rot i kub må bli den största möjliga.*

Om de tre delarne utmärkas med x, y, z samt produktens maximivärde med m, så blir problemets uppställning följande:

$$x^{\frac{1}{2}} . y^{\frac{2}{3}} . z^{\frac{3}{4}} = m \quad \text{och} \quad x + y + z = 23,$$

då följaktligen

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{3}{4}} = \frac{23}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = 12,$$

hvaraf $x=6$, $y=8$ och $z=9$ samt $m = \sqrt{6} . \sqrt[3]{8^2} . \sqrt[4]{9^3} = 36\sqrt{2}$.

2. *Af en gifven linie $2p$ som omkrets skall konstrueras den största möjliga triangel.*

Vi låta sidorna betecknas med x, y, z samt maximiytan med m, då

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = m,$$

hvaraf

$$(p-x)(p-y)(p-z) = \frac{m^2}{p},$$

der den tredelade produkten, såsom hafvande p till perimeter, är maximum för

$$\frac{p-x}{1} = \frac{p-y}{1} = \frac{p-z}{1} = \frac{p}{3},$$

d. v. s. för $x = y = z$ eller för den liksidiga triangeln. Genom insättning erhålles maximiytan

$$m = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

3. *Att i en gifven cirkel inskrifva den största möjliga likbenta triangel.*

---

* De flesta af de här anförda exemplen äro hemtade från läroböcker i differentialkalkylen.

Vi låta cirkelns radie vara r triangelns höjd y och hans halfva bas x samt maximiytan m. Vi få således

$$xy = m \quad \text{och} \quad x^2 = y(2r - y)$$

eller efter eliminering af x

$$(2r - y)y^3 = m^2,$$

der produkten till venster är isoperimetrisk i afseende på $2r - y$ och basen i digniteten y^3, då följaktligen

$$\frac{2r - y}{1} = \frac{y}{3} = \frac{r}{2},$$

hvaraf

$$y = \tfrac{3}{2}r, \quad x = \tfrac{1}{2}r\sqrt{3} \quad \text{och} \quad m = \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Den begärda triangeln är således den liksidiga.

4. *Af en gifven yta $2s$ skall konstrueras en rektangulär parallelipiped med största möjliga volym.*

Om längd, bredd och höjd betecknas med x, y och z samt maximiytan med m, så fås

$$xy + xz + yz = s \quad \text{och} \quad xyz = m.$$

Genom den senare likhetens qvadrering erhålles den isoperimetriska produkten $xy \,.\, xz \,.\, yz = m^2$, hvaraf

$$\frac{xy}{1} = \frac{xz}{1} = \frac{yz}{1} = \frac{s}{3} \quad \text{samt} \quad m = \sqrt{\left(\frac{s}{3}\right)^3}.$$

Kuben är således den figur, som uppfyller vilkoret.

5. *Hvilken form bör ett cylindriskt* mynt ega för att med minsta möjliga yta innesluta största möjliga kubikinnehåll?*

Om basradie, höjd, yta och kubikinnehåll betecknas med respektive x, y, s och m, så fås

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = s \quad \text{och} \quad \pi x^2 y = m$$

eller

$$x^2 + xy = \frac{s}{2\pi} \quad \text{och} \quad (x^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, xy = \frac{m}{\pi},$$

* Då vi här tala om cylindrar, koner, prismer och pyramider, så underförstås, att de äro räta.

hvaraf på grund af isoperimetrien

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{xy}{1} = \frac{s}{2\pi(1+\frac{1}{2})} = \frac{s}{3\pi},$$

d. v. s. $2x = y$ eller basens diameter = höjden. Vidare är $m = \frac{s}{3\pi}\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$, hvaraf ses, att det är likgiltigt, hvilkendera qvantiteten m eller s betraktas såsom obekant.

6. *Hvilken form bör en öppen rektangulär låda ha för att med minsta möjliga yta förena största möjliga rymlighet?*

Om längd, bredd, höjd, yta och kubikinnehåll betecknas med respektive x, y, z, s och m, så fås

$$xy + 2xz + 2yz = s \quad \text{och} \quad xyz = m,$$

hvilken senare likhet kan sättas under den isoperimetriska formen

$$xy \,.\, 2xz \,.\, 2yz = 4m^3,$$

hvaraf

$$\frac{xy}{1} = \frac{2xz}{1} = \frac{2yz}{1} = \frac{s}{3}$$

då följaktligen $x = y = 2z$ eller höjden = halfva sidan i den qvadrat, som bör utgöra bottenytan. Vidare är $4m^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$ eller $m = \frac{1}{6}s\sqrt[3]{2}$.

7. *Huru stor sektor bör skäras ur en gifven cirkel, för att man af honom må kunna forma den bugtiga ytan till en kon af största möjliga kubikinnehåll?*

Om cirkelns radie, sektorns båge och konens maximivolym utmärkas med respektive r, x och m, så blir

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} = m$$

eller

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left\{r^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{3m}{\pi},$$

hvilken senare likhet på grund af isoperimetri ger

$$\frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{1} = \frac{r^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{2r^2}{3}, \text{ d. v. s. } x = 2\pi r\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Konens basradie, höjd och volym bli respektive

$$r\sqrt{\tfrac{2}{3}},\quad r\sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ och } \tfrac{2}{9}r^3\pi\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

8. *Att på en regulier n-hörning som bas konstruera en pyramid, som med minsta möjliga sidoyta förenar största möjliga rymlighet.*

Om n-hörningens apotem betecknas med x, så är hans sida $2x \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Om vidare y, s och m utmärka resp. pyramidens höjd, sidoyta och maximivolym, så fås, då för korthetens skull $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ utmärkes med a:

$$nax\sqrt{x^2 + y^2} = s \text{ och } \tfrac{1}{3}nax^2y = m$$

eller

$$x^4 + x^2y^2 = \left(\frac{s}{na}\right)^2 \text{ och } (x^4)^{\frac{1}{4}} . \{(xy)^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{3m}{na},$$

hvaraf på grund af isoperimetrien

$$\frac{x^4}{\frac{1}{4}} = \frac{x^2y^2}{\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{3}.\left(\frac{s}{na}\right)^2, \text{ d. v. s. } x\sqrt{2} = y.$$

Vidare är $\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{s}{na}\right)^3 = \left(\frac{3m}{na}\right)^2$. Förhållandet mellan x och y är oberoende af sidornas antal i månghörningen, gäller således äfven för konen eller då $n = \infty$ och $na = \pi$.

9. *Att omkring en gifven cylinder omskrifva en kon af minsta möjliga volym.*

Om konens basradie, höjd och minimivolym utmärkas med resp. x, y och μ samt cylinderns basradie och höjd med r och h, så fås

$$\tfrac{1}{3}\pi x^2y = \mu \text{ och } y : x = y - h : r$$

eller efter en enkel transformation

$$\frac{h}{y}\left(1 - \frac{h}{y}\right)^2 = \frac{\pi r^2 h}{3\mu}.$$

Produkten till venster är nu maximum eller, som är detsamma, μ = minimum för

$$\frac{\frac{h}{y}}{1} = \frac{1 - \frac{h}{y}}{2} = \tfrac{1}{3}, \text{ d. v. s. för } y = 3h.$$

10. *Att omkring en gifven sfer omskrifva en kon af minsta möjliga volym.*

Om konens basradie, höjd och minimivolym tecknas resp. x, y och μ samt sferens radie r, så fås

$$\tfrac{1}{3}\pi x^2 y = \mu \quad \text{och} \quad x : y = r : \sqrt{y(y-2r)}$$

eller

$$\frac{\tfrac{2}{3}\pi r^3}{\frac{2r}{y}\left(1 - \frac{2r}{y}\right)} = \mu.$$

Nämnaren såsom isoperimetrisk produkt är maximum, d. v. s. μ = minimum, för

$$\frac{2r}{y} = 1 - \frac{2r}{y} = \tfrac{1}{2}, \text{ d. v. s. för } y = 4r.$$

Anm. Detta exempel kan äfven lösas förmedelst en qvadratisk eqvation.

11. *Huru stor qvadrat bör bortskäras ur hvarje hörn af ett rektangulärt pappstycke, för att man af återstoden må kunna forma en öppen låda af största möjliga rymlighet?*

Om $2a$ och $2b$ utmärka resp. pappstyckets längd och bredd samt x och m resp. sidan i den utskurna qvadraten och lådans maximivolym, så fås

$$4(a-x)(b-x)x = m \quad \text{eller} \quad (a-x).(b-x).2x = \tfrac{1}{2}m,$$

hvilken senare produkt väl är isoperimetrisk, men inskränker frågan till vilkoret $a = b$. För att häfva denna inskränkning sätta vi

$$\frac{a-x}{\alpha} \cdot \frac{b-x}{\beta} \cdot \frac{x}{\gamma} = \frac{m}{4\alpha\beta\gamma},$$

der α, β och γ äro indeterminerade konstanter. Den treledіga produkten till venster är nu maximum för

$$(1) \qquad \frac{a-x}{\alpha} = \frac{b-x}{\beta} = \frac{x}{\gamma},$$

så snart

$$\frac{a-x}{\alpha} + \frac{b-x}{\beta} + \frac{x}{\gamma} = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} - x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) = \text{konstant},$$

d. v. s. så snart

$$(2) \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0.$$

Om i (2) införas de mot α, β och γ proportionella qvantiteterna $a - x$, $b - x$ och x ur (1), så erhålles eqvationen

$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} - \frac{1}{x} = 0,$$

hvaraf

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}),$$

der det negativa rottecknet ensamt motsvarar problemets vilkor.

Öfningssatser.

(Lösas förmedelst qvadratiska eqvationer *).

81. Ett fönster utgöres af en rektangel jemnte en på dess öfra sida konstruerad likbent triangel, hvars höjd och halfva bas äro som $1 : \sqrt{2}$. Hvilken form bör fönstret ha för att med gifven perimeter $2p$ insläppa största möjliga qvantitet ljus?

* För diskussion af dessa maximi- och minimisatser hänvisas till den svenska bearbetningen af Todhunters algebra.

82. Att omkring en gifven rektangel omskrifva en rektangel med största möjliga yta.

83. Mellan tvenne räta linier, som bilda med hvarandra en gifven vinkel v, skall inpassas en linie af gifven längd a, så att den uppkommande triangelytan blir den största möjliga.

84. Hvilken form bör en i en gifven sfer inskrifven cylinder ega, för att 1:o hans bugtiga yta 2:o hans hela yta må bli maximum.

85. Två städer A och B äro förenade genom en 3 mils rätlinig jernväg. På sidan om vägen är en egendom C så belägen, att vinkelräta afståndet CP till AB är 1 mil och $AP = 2$ mil. För att få kommunikation med både A och B anläggas från C två rätliniga körbanor till jernvägen. I hvilka punkter böra dessa träffa vägen, för att kommunikationen med de båda städerna må ske med största möjliga tidsvinst?

86. Tvenne vägar AC och BC skära hvarandra under 60 graders vinkel. Från A och B utgå samtidigt två kroppar med resp. hastigheterna 1 mil och $\frac{3}{4}$ mil i timmen. Om $AC = 2$ mil och $BC = 1$ mil, efter hvilken tid äro de två kropparne på minsta afstånd från hvarandra? — Samma fråga för det fall, att $\wedge ACB = \gamma$, $AC = a$, $BC = b$, samt de resp. hastigheterna äro α och β.

87. Att omkring en gifven sfer omskrifva en kon, hvars 1:o bugtiga yta 2:o hela yta är ett maximum eller minimum.

88. I en kon med höjden h och basradien r skall inskrifvas en cylinder, hvars 1:o bugtiga yta 2:o hela yta skall utgöra ett maximum eller minimum.

(Lösas på grund af isoperimetri).

89. En figur, som utgöres af en rektangel och en likbent triangel, skall inskrifvas i en gifven halfcirkel; hvil-

ken form bör figuren ha för att innesluta största möjliga yta?

90. Omkring en gifven cirkel skall omskrifvas en likbent triangel af minsta möjliga yta.

91. Hvilken form bör ett cylindriskt vätskemått ha för att med minsta möjliga yta förena största möjliga rymlighet?

92. Af l fot långa trädstammar skall en lapp konstruera en konisk kåta. Hvilken form bör kåtan ha för att bli så rymlig som möjligt *?

93. Att i en gifven sfer inskrifva 1:o en cylinder 2:o en kon af största möjliga volym.

94. Att i en gifven sfer inskrifva en kon med största möjliga bugtiga yta.

95. Ett koniskt kärl, hvars djup är h och basradie r, är fyldt med vatten. Man önskar veta formen på den cylinder, som, neddoppad i kärlet, undantränger så mycket vatten som möjligt.

96. Ur en cylindrisk trädstam skall uthuggas en bjelke af största möjliga fasthet. Huru bör bjelken formas, då man vet, att fastheten F är proportionel mot bredden x och qvadraten på höjden y, d. v. s. $F = cxy^2$, der c är en konstant.

97 **. Sök maximum α) af produkten xy, då $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

β) af produkten xyz, då $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

---

* Svaret, att höjden : basradien = $1 : \sqrt{2}$ synes, att döma efter ögonmått, något så när öfverensstämma med lapparnes sätt att bygga sina kåtor. Skulle någon af tidskriftens läsare vara i tillfälle att genom mätning afgöra frågan, så komme resultatet af en sådan undersökning säkerligen att intressera rätt mången. Vi ha så mycket mera skäl att fästa uppmärksamheten på denna omständighet, som tidskriften i något af sina närmast följande häften kommer att redogöra för några andra byggmästares sätt att bygga sina hus, nämligen — binas.

** Detta exempel är af särskildt intresse för dem, som läst analytisk geometri, enär α) lär oss inskrifva den största rektangel i en ellips och β) lär oss inskrifva den största möjliga rektangulära parallelipiped i en ellipsoid.

Satser af docent C. E. Lundström.

98. Af en triangel känner man antingen α) arean, perimetern och en vinkel eller β) arean, en sida och förhållandet mellan de tvenne andra. Att konstruera triangeln.

99. Om på en triangels sidor såsom baser likbenta och likformiga trianglar uppritas, så att deras spetsar alla äro vända utåt eller alla inåt den ursprungliga triangeln, att bevisa, det dessa spetsar och samma triangels hörn ligga i perspektiviskt läge, eller att, om man sammanbinder dem med motstående hörn, de sammanbindande linierna gå genom en punkt.

100. En triangels sidor skola gå genom tre gifna punkter, och dess hörn ligga på en cirkels periferi. Att konstruera triangeln.

101. α) Att på en rät linie finna den punkt, hvarifrån en på ena sidan belägen determinerad linie synes under den största vinkel.

β) Att finna en dylik punkt på en cirkel.

Sats af löjtnant P. W. Almqvist.

102. Att upprita en qvadrat, hvars sidor (förlängda om så behöfves) tangera hvar sin af fyra gifna cirklar.

Sats af student N. Peterson.

103. $ABCD$ är en fyrhörning, uti hvilken sidorna AB och CD äro båda vinkelräta mot BC och tillsammantagna lika stora med AD. Om man från midtpunkten af AD drager en perpendikel mot BC och från dess fotpunkt en perpendikel mot AD samt från denna perpendikels fotpunkt åter en perpendikel mot BC, så blifva dessa i zigzag gående perpendiklar i ordning det *aritmetiska*, det *geometriska* och det *harmoniska mediet* mellan AB och CD.

Satsen 43 (G. H. Lindqvist),
löst af student G. Mittag Leffler.

Denna uppgift är ett enskildt fall af följande allmännare uppgift, hvilken erbjuder en nära nog lika enkel lösning, som det ifrågavarande enskilda fallet.

I en cirkel drages en korda EC och den ene af hennes motsvariga bågar skäres midt i tu i A; att genom A draga en rät linie så, att stycket mellan cirkelperiferien och kordan eller hennes förlängning blir $= $ en gifven längd l.

Sammanbind A och C, drag $CO \perp AC$ och gör $CO = \frac{1}{2} l$; sammanbind vidare A och O, afsätt på OA stycket $OD = OC$ och med A som medelpunkt upprita en cirkel, som går genom D och skär cirkeln CAE i B och B_1.

Vi taga till undersökning först det fall, då cirkeln CAE skär kordan EC. Vi låta skärningspunkterna vara F och F_1 och draga AF och AF_1, tills de råka cirkeln EAC i B_2 och B_3, samt AB och AB_1, tills de råka kordan EC förlängd i F_2 och F_3; de fyra linierna AF_2, AB_2, AB_3 och AF_3 äro då af den begärda egenskapen.

Punkterna C och B_2 förenas, och med O som medelpunkt uppritas en cirkel, som går genom C och D och hvilken således tangeras af den mot OC vinkelräta AC. Emedan $\triangle AFC$ är likvinklig med $\triangle ACB_2$, så är $AF : AC = AC : AB_2$ eller $\overline{AC}^2 = AF \,.\, AB_2$; emedan vidare AC tangerar bågen DC, så är $\overline{AC}^2 = AD \,.\, (AD + 2OD)$, hvaraf följer, enär $AD = AF$ och $2OD = l$, att $AB_2 = AF + l$, då alltså AB_2 är en linie af den begärda egenskapen.

Om B och C förenas, så följer af likvinklighet mellan $\triangle ABC$ och $\triangle ACF_2$, att $\overline{AC}^2 = AB \,.\, AF_2$, då på samma sätt bevisas, att AF_2 är en linie af den begärda egenskapen.

De två linierna AB_2 och AF_2 tillsammans med de symetriska linierna AB_3 och AF_3 äro således de fyra solutioner, som svara mot förevarande fall.

I fall cirkeln BDB_1 tangerar kordan EC, sammanfalla solutionerna AB_2 och AB_3 till en, och om cirkeln icke råkar kordan, så äro blott solutionerna AF_2 och AF_3 möjliga.

Vi hafva funnit $\overline{AC}^2 = AB . AF_2$. Om derföre AC = den gifna längden l, så är $\overline{BF_2}^2 = AB . AF_2$, hvilket ger uppslag till följande rätt enkla konstruktion af detta enskilda fall.

Skär nämligen AC i K, så att $AC . AK = \overline{KC}^2$; drag genom K och parallelt med EC en rät linie B_1KB, hvilken skär cirkeln i B och B_1. Linierna AB och AB_1, utdragna, tills de träffa EC förlängd i F_2 och F_3, äro då linier af den begärda egenskapen. Ty af $\overline{KC}^2 = AC . AK$ följer, att $\overline{BF_2}^2 = AF_2 . AB$; men enär $\triangle ABC$ är likvinklig med $\triangle ACF$, så är äfven $\overline{AC}^2 = AF_2 . AB$, d. v. s. $AC = BF_2$, då alltså AF_2 och följaktligen äfven AF_3 uppfylla vilkoret. De två öfriga solutionerna (om de äro möjliga) erhållas såsom förut, om man med A som medelpunkt lägger en cirkel genom B samt förenar A med de punkter F och F_1 i hvilka cirkeln skär kordan EC.

Skulle såsom i 43:e satsen $EC = 2r$ vara en diameter till cirkeln EAC, så är $2r^2 = AC^2 = (AC + AB) . AB$, hvaraf visar sig, att $AB < r$, då det således för detta fall endast gifves två solutioner.

Satserna 1 samt 30, 33—35 (F. W. Hultman), lösta af löjtnant P. W. Almqvist.

1. Låt $\frac{A}{B}$ vara det bråk, som skall förvandlas till decimalbråk, och antag, att

$$B = 10p - 1$$

samt beteckna med q_1, q_2, q_3, o. s. v. de successiva qvoter, som erhållas genom det i satsen framstälda förfaringssättet, och med r_1, r_2, r_3, o. s. v. de motsvarande resterna. Man har då följande likheter

$$\begin{aligned}
A &= pq_1 + r_1 \\
10r_1 + q_1 &= pq_2 + r_2 \\
10r_2 + q_2 &= pq_3 + r_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10r_{n-1} + q_{n-1} &= pq_n + r_n,
\end{aligned}$$

hvilka också kunna skrifvas på följande sätt

$$\begin{aligned}
A &= (10p-1)\frac{q_1}{10} + \frac{10r_1 + q_1}{10} \\
10r_1 + q_1 &= (10p-1)\frac{q_2}{10} + \frac{10r_2 + q_2}{10} \\
10r_2 + q_2 &= (10p-1)\frac{q_3}{10} + \frac{10r_3 + q_3}{10} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10r_{n-1} + q_{n-1} &= (10p-1)\frac{q_n}{10} + \frac{10r_n + q_n}{10}.
\end{aligned}$$

Om den andra af dessa likheter divideras med 10, den tredje med 100, den 4:de med 1000 ... den *n:te* med 10^{n-1}, samt alla likheterna derefter adderas, så fås

$$A = (10p-1)\left(\frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \ldots + \frac{q_n}{10^n}\right) + \frac{10r_n + q_n}{10^n}$$

eller

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{10p-1} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{10r_n + q_n}{10^n . B}.$$

För $n = \infty$ är gränsvärdet för $\dfrac{10r_n + q_n}{10^n B} = 0$,

och således blir

$$\frac{A}{B} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \ldots, \quad \text{h. s. b.}$$

30 och 35. Låt *abc* vara en triangel samt AB, BC och AC bissektricerna af dess yttre vinklar. (Punkten c

ligger på AB o. s. v.). Punkterna A, B och C äro då medelpunkter till samma triangels utanför-inskrifne cirklar samt linierna Aa, Bb och Cc bissektricer till dess inre vinklar. Dessa linier äro derföre också vinkelräta mot hvar sin af de yttre bissektricerna och utgöra således höjder till triangeln ABC. Man finner således, att, *om fotpunkterna af en triangels höjder sammanbindas med hvarandra till en ny triangel, så äro den förra triangelns sidor bissektricer till den senares yttre vinklar*, samt att, *om medelpunkterna till en triangels utanför-inskrifna cirklar sammanbindas med hvarandra till en ny triangel, så sammanfalla den förra triangelns spetsar med fotpunkterna af den senares höjder.* — De lösningar till satserna 30 och 35, som häraf kunna härledas äro sjelfklara.

33 och 34. Upprita den cirkel, som går genom de tre gifna punkterna, och drag genom hvar och en af dessa en tangent till samma cirkel, så äro dessa tre tangenter sidor i den sökta triangeln.

Satsen 29 (F. W. Hultman),

löst af fröken Ragnhild Brolinsson.

29. Låt A, B, C vara de gifna punkterna. Bilda triangeln ABC. Drag genom A räta linien $C'AB' \parallel BC$, genom B räta linien $C'BA' \parallel AC$ och genom C räta linien $A'CB' \parallel BA$; $\triangle A'B'C'$ är den begärda, ty $A'C = BA = CB'$, $B'A = CB = AC'$, $C'B = AC = BA'$.

AFDELNING II.

Till den elementära framställningen af rötter.

Ett förslag till åskådningsmateriel.

Af lektor C. F. E. Björling (j:r).

Vi ansluta oss i det följande till *Cauchy's* definitioner och betraktelsesätt.

Låt u och z betyda tvenne geometriska qvantiteter, sinsemellan förbundna genom relationen $u = f(z)$. Då z varierar utefter någon viss plan kurva, beskrifver u en annan, deraf beroende. Vi benämna den förra *primitiv*, den senare *sekundär*.

z kan på oändligt många sätt, d. v. s. på oändligt många vägar, öfvergå från ett värde α, en punkt i planet, till ett annat β. Om valören af $f(\beta)$ är densamma, hvilken väg z under sin variation än må hafva följt, säges u vara en *monodrom* funktion af z.

Bland icke-monodroma enkla funktioner nämna vi logaritmer och potenser med bruten exponent, således ock rötter. Här sysselsätta vi oss blott med dessa senare.

Låt u vara $= \sqrt{z}$, eller, som är detsamma,

$$u^2 = z.$$

Låt vidare R och r vara de geometriska qvantiteternas u och z resp. modyler, P och p deras argumenter. Förestående eqvation blir då satisfierad, om vi taga

$$(1) \qquad R^2 = r,$$

samt

$$(2) \qquad 2P = p.$$

För att åskådliggöra sambandet mellan u och z, låta vi den senare beskrifva någon viss kroklinie och söka den motsvarande för u. Hvilken primitiv kurva är nu för vårt ändamål lämpligast?

Om z beskrifver en genom origo gående rät linie, varierar endast r; beskrifver den en cirkel med origo till centrum, endast p. Ingendera af dessa linier är alltså i ifrågavarande afseende rätt passande.

Taga vi till primitiv kurva en rät linie, som icke går genom origo, blir nyssnämnda olägenhet visserligen afhjelpt, men resultaten blifva osymmetriska och motsvara äfven af andra skäl ej vårt ändamål.

För detta egnar sig måhända bäst ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hvars eqvation i polar-koordinater (origo i centrum) är

$$(3) \qquad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + b^2 \cos^2 p}}.$$

På grund af (1) och (2) blir den sekundära kurvans eqvation

$$(4) \qquad R^2 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 2P + b^2 \cos^2 2P}}.$$

Vi vilja undersöka denna närmare.

Till en början är det tydligt, att R aldrig blir noll eller oändlig, äfvensom att den är kontinuerlig för alla valörer af P.

Genom derivering af (4) och division erhålles

$$(5) \qquad \frac{2}{R} \cdot \frac{dR}{dP} = \frac{(b^2 - a^2) \sin 4P}{a^2 \sin^2 2P + b^2 \cos^2 2P}.$$

Emedan denna sista expression blir $= 0$ för

$$P = \frac{k\pi}{4}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \text{o. s. v.})$$

måste den sekundära kurvan i hvarje motsvarande punkt tangera den cirkel, hvars radie är = radius vector.

$\frac{1}{R}$ blir, såsom vi nyss sett, aldrig 0. Således måste, på grund af (5), $\frac{dR}{dP}$ vara $= 0$ för $P = \frac{k\pi}{4}$. Emedan R alltid är positiv, kan man ock, förmedelst sistnämnde formel, lätt finna, att

$$\frac{dR}{dP} \text{ är } \textit{negativ} \text{ för } \frac{\pi}{4} > P > 0,$$

$$\ldots\ldots \textit{positiv} \quad » \quad \frac{\pi}{2} > P > \frac{\pi}{4},$$

$$\ldots\ldots \textit{negativ} \quad » \quad \frac{3\pi}{4} > P > \frac{\pi}{2},$$

$$\ldots\ldots \textit{positiv} \quad » \quad \pi > P > \frac{3\pi}{4}, \text{ o. s. v.},$$

eller att i allmänhet

$$\left.\begin{array}{l} R \text{ är } \textit{maximum} = \sqrt{a} \text{ för } P = \frac{k\pi}{2}, \\ \ldots \textit{minimum} = \sqrt{b} \quad » \quad P = \frac{(2k+1)\pi}{4} \end{array}\right\} (k = 0, 1, 2, \text{o. s. v.})$$

Kurvan är uppritad i fig. 20. $ABA'B'$ är den primitiva ellipsen, Oa är $= \sqrt{a}$, $O\alpha = \sqrt{b}$; linien $\alpha'O\alpha$ bildar vinkeln 45°, $\beta'O\beta$ 135° med $A'OA$, och $a\alpha b\beta a'\alpha'b'\beta'$ är vår sekundära kurva. Den liknar en blomma med fyra kronblad, eller tvenne korsvis lagda ellipser, hvilkas konturer i skärningspunkterna sammansmält med hvarandra.

Då variabeln z befinner sig i A, och dess argument är 0, måste u vara i a. I denna ställning representerar u *den positiva qvadratroten ur den positiva qvantiteten* a.

Då z genomlupit ellipsens första qvadrant och således befinner sig i B, har u, på grund af (2), hunnit till α. Likaså inses lätt, att,

då z är i A', är u i b,
$\ldots\ldots B', \ldots\ldots \beta$,
$\ldots\ldots A, \ldots\ldots a'$.

I denna sistnämnda ställning representerar u *den negativa qvadratroten ur den positiva qvantiteten a.*

Vi låta nu vår oberoende variabel verkställa ett nytt kretslopp och finna, att,

$$\begin{array}{llll} \text{då } z \text{ är i } B, & \text{är } u \text{ i } \alpha', \\ \ldots\ldots A', & \ldots\ldots b', \\ \ldots\ldots B', & \ldots\ldots \beta', \\ \ldots\ldots A, & \ldots\ldots a. \end{array}$$

I detta sista läge föreställer u återigen den *positiva* qvadratroten ur a.

Den positiva och den negativa qvadratroten ur en positiv qvantitet äro således *icke tvenne särskilda funktioner.* Det är nemligen alldeles stridande mot begreppet af funktion, att en sådan skulle kunna öfvergå i eller förvandlas till en annan, endast derigenom att den oberoende variabeln förändras på ett visst sätt.

De båda qvadratrötterna äro olika valörer af en och samma funktion. Denna är således *icke-monodrom.*

För öfrigt inser man, vid första ögonkastet på vår sekundära kurva, bland annat följande:

1) De båda qvadratrötterna ur den negativa qvant. $-a$ äro belägna i b och b', följaktligen rent imaginära, samt af formen $\pm i\sqrt{a}$. Ingendera förtjenar således att framför den andra utmärkas med benämningen *principal.*

2) De båda qvadratrötterna ur den imaginära qvantiteten bi ligga i α och α', samt äro således $\pm\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$. Den förra är principal.

3) De båda qvadratrötterna ur den imaginära qvantiteten $-bi$ ligga i β och β', äro således $\mp\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$. Den senare är principal.

Antages deremot $u = \sqrt[3]{z}$, eller, som är detsamma,

$$u^3 = z,$$

så erhålles, om vi taga samma primitiva kurva som nyss, den sekundära

$$R^3 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 3P + b^2 \cos^2 3P}}.$$

Denna eqvation kan undersökas efter samma metod som (4). Kurvan är uppritad i fig. 21, och af densamma kunna följande slutsatser bland andra dragas.

1) z måste tre gånger i samma led genomlöpa sin ellips, för att u skall återkomma till samma punkt.

2) Kubikrötterna till den positiva qvant. a ligga i a, c, b' och äro alltså $\sqrt[3]{a}$ samt $\sqrt[3]{a}\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. Den första är principal.

3) Kubikrötterna till den negativa qvant. $-a$ ligga i a', b, c' och äro alltså $-\sqrt[3]{a}$ samt $\sqrt[3]{a}\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. De båda senare äro lika berättigade till benämningen principala.

4) Kubikrötterna till den imaginära qvant. bi ligga i α, γ, β' och äro således $\sqrt[3]{b}\left(\frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}\right)$ samt $-i\sqrt[3]{b}$. Den första är principal.

5) Kubikrötterna till den imaginära qvant. $-bi$ ligga i β, α', γ' och äro således $i\sqrt[3]{b}$ samt $\sqrt[3]{b}\left(\frac{\mp\sqrt{3} - i}{2}\right)$. Den sista är principal.

Den sekundära kurva, som under enahanda förutsättning motsvarar den allmänna funktionen

$$u = \sqrt[n]{z},$$

har uppenbarligen till eqvation

$$R^n = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 nP + b^2 \cos^2 nP}}.$$

Dess konstruktion inses lätt af det föregående.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. Dillner.

(Forts. fr. sid. 30).

Förberedande begrepp. Reduktion till nya grundbestämningar.

1. En punkt P (fig. 22) är fullt bestämd till sitt läge, då vi känna hans afstånd från en gifven punkt O samt detta afstånds rigtning från en gifven rigtning AB.

Den gifna punkten O kallas *origo* och den gifna rigtningen AB kallas *grundrigtning*. Går icke AB genom origo, så låter man för enkelhetens skull en med AB parallel och lika rigtad rät linie OC vara dragen genom origo, hvilken då representerar grundrigtningen.

2. Med O som medelpunkt och en gifven *enhetslängd* som radie uppritas en cirkel LMN, som skär OC och OP i respektive L och M samt förlängningen af OC i N. Denna cirkel kallas *enhetscirkel* och tjenar till att på samma gång angifva den enhetslängd, hvarmed OP är uppmätt, som ock att utmärka den båglängd LM, som bestämmer OP:s rigtning från grundrigtningen OC. Om nu afståndet OP äfvensom bågen LM, begge uttryckta i den gifna längden OL som enhetsmått, representeras af de respektive talen a och α, hvilka kunna vara rationella eller irrationella, så inses, att vi med beteckningen

$$a_\alpha$$

kunna representera läget af hvilken punkt som helst inom planets hela utsträckning.

Denna förening af tvenne tal, hvaraf det ena utmärker en punkts afstånd från en gifven punkt och det andra den båge på enhetscirkeln, som bestämmer detta afstånds rigtning från en gifven rigtning, begge hänförda till samma gifna en-

hetsmått, *kallas geometrisk qvantitet*, *geometrisk komplex eller helt enkelt komplex.*

Afståndet a kallas *radius vector* eller *modyl*, bågen α åter *polarvinkel* eller *argument.* Såsom tecken för komplexer användas vidare

$$R_P\,, \quad r_p\,, \quad \varrho_\phi\,; \quad b_\beta\,, \quad c_\gamma\,, \quad \text{o. s. v.}$$

3. En komplex a_α kan äfven tecknas

$$a\,.\,1_\alpha\,,$$

der 1_α, såsom utgörande enhetslängden OM, till rigtningen bestämd af bågen LM eller α, kallas *geometrisk enhet. Hvarje komplex kan således betraktas såsom uppkommen genom den geometriska enhetens multiplikation med ett rationelt eller irrationelt tal.*

4. De bestämningar, som på förhand måste vara gifna för att en geometrisk qvantitet skall kunna vara fullt *verklig*, d. v. s. uppfylla sitt ändamål att bestämma en punkts läge i planet, äro således: 1:o den godtyckligt valda punkten O eller *origo*, 2:o den godtyckligt valda rigtningen OC eller *grundrigtningen* samt 3:o den godtyckligt valda längdenheten OL eller *enhetsmåttet*, hvilka tre bestämningar kallas den geometriska qvantitetens *grundbestämningar.* Vi skola framdeles se, huruledes ur dessa grundbestämningars arbiträra eller konventionella natur den geometriska kalkylen leder sin utveckling, likasom, enligt hvad vi i inledningen antydt, den aritmetiska kalkylen är grundad på det konventionella enhetsmåttet samt den algebraiska på detta jemnte den konventionella positionen.

5. En geometrisk qvantitets rigtning förändras icke, om till argumentet lägges ett helt antal båghvarf. Om derföre k betecknar något af hela talen 1, 2, 3 etc. eller ock 0, så representeras punkten P:s läge, *generelt* taget, af komplexen

$$a_{\alpha + 2k\pi}\,.$$

Då argumentet utgöres af *ett enda* bågvärde, såsom i a_α, kallas det *specielt;* utgöres det åter af *ett obegränsadt* *antal* sådana, såsom i $a_{\alpha+2k\pi}$, kallas de *generelt*. Det generella argumentet öfvergår således i det speciella, så snart k antages representera ett gifvet bestämdt värde eller något af värdena 0, 1, 2, 3 etc.

6. Rigtningen OP angafs såsom bestämd af bågen LM, men kan lika gerna anses såsom bestämd af bågen LNM, då således den *led*, i hvilken vi kunna räkna våra bågar är *tvåfaldig*, den ena *motsols* eller *från höger till venster* (för en person, som föreställes stå upprätt på planet i origo), den andra *medsols* eller *från venster till höger*. Den led, i hvilken vi räkna våra med *positiva* tal betecknade bågar fastställes nu en gång för alla att vara den förra eller motsolsleden*. Bågar, räknade i den senare eller medsolsleden, måste då betecknas med *negativa* tal, hvilket man lätt finner deraf, att, om radien OL tänkes först beskrifva en båge α i den förra leden och derpå en båge β i den senare, så blir den båge, som bestämmer radiens rigtning efter denna rörelse fram och tillbaka, algebraiska summan $\alpha - \beta$. Motsolsleden kallas derföre *positiv* och medsolsleden *negativ*. Betydelsen af k i det generella argumentet $\alpha + 2k\pi$ kan derföre utom 0 vara såväl något af de hela positiva talen 1, 2, 3 etc., som något af de hela negativa talen -1, -2, -3 etc.

7. Argumentet kan likaväl uttryckas i grader som i båglängder af enhetscirkeln. Om derföre g betecknar gradtalet af bågen α, så ha vi för beräkning af g ur α eller α ur g följande relation

$$\frac{g}{180} = \frac{\alpha}{\pi}.$$

8. Vi hafva i inledningen antydt den vigtiga grundsatsen, att aritmetiska storheter, som äro af samma slag och ingå i samma räkning, måste vara hänförda till samma arbiträra enhet, likasom ock, att algebraiska storheter,

* Förnämsta skälet till denna fasställelse är, att planeternas rörelse omkring solen sker i denna led.

som äro af samma slag och ingå i samma eqvation, måste vara hänförda till samma arbiträra enhet och samma arbiträra position.

Denna grundsats utsträckes nu att omfatta de geometriska qvantiteterna och får då följande lydelse: *geometriska qvantiteter, som ställas i någon jemnförelse med hvarandra, måste vara hänförda till samma arbiträra origo, samma arbiträra enhet och samma arbiträra grundrigtning.* Ty det är nämligen sjelfklart, att, om två eller flere punkter i i ett plan skola jemnföras till sina lägen, så kan en sådan jemnförelse icke ega rum, utan att de äro hänförda till samma origo och samma grundrigtning och att de förekommande afstånden äro uppmätta med samma enhetsmått. Då vidare de tre grundbestämningarna, såsom godtyckligt fastställbara, kunna vara på mångahanda sätt gifna, så inses, att lagarna för reduktion till samma nya grundbestämningar måste bli det närmaste föremålet för vår undersökning. Sammanfattningen af dessa lagar med deraf härledda följder utgör ock det system af räknemetoder, hvilket vi kalla *geometrisk kalkyl.*

A) **Reduktion till nytt origo**

med bibehållande af samma enhet och grundrigtning.*

(Geometrisk addition).

9. Vi låta komplexen a_α, hänförd till O (fig. 23) som origo och OA som grundrigtning, bestämma någon punkt P i planet. Önskar man nu känna denna punkts läge i förhållande till ett nytt origo O_1, så kan detta ske sålunda, att man låter det gamla origo O vara till sitt läge angifvet af komplexen b_β, hänförd till O_1 som origo och OA eller den lika rigtade O_1A_1 som grundrigtning. Punkten

* Då vi tala om enhet utan vidare tillägg, så förstå vi dermed enhetsmåttet eller den med 1 betecknade längdenheten utan någon rigtningsbestämning.

P:s läge i förhållande detta nya origo angifves derföre af *vägen* O_1OP, hvilken vi teckna

$$b_\beta + a_\alpha .$$

Komplexen a_α säges nu vara *reducerad till nytt origo* förmedelst komplexen b_β. Uttrycket $b_\beta + a_\alpha$ kallas *geometrisk summa*, och de ingående komplexerna sägas vara *adderade* eller *summerade* och benämnas *termer*, *addender* eller *summander*. Genom upprepande af samma förfaringssätt erhållas tretermiga, fyrtermiga summor, o. s. v.

10. Man lägge märke till, att tecknet + här ofvan endast betyder, att räta linien a_α börjar, der räta linien b_β slutar. Termerna i en geometrisk summa utgöra derföre alltid en sammanhängande följd af räta linier eller en väg, början i origo och slutande i den punkt, som skall bestämmas. Hvarje rätlinigt stycke af en sådan väg angifves alltid till sin rigtning af en längs vägen från dess början till dess slut tänkt rörlig punkt.

11. Punkten P kan lika väl bestämmas till sitt läge af den rätliniga vägen O_1P, tecknad r_θ, som af den brutna vägen O_1OP eller $b_\beta + a_\alpha$, då nämligen båda vägarna äro hänförda till samma origo, enhet och grundrigtning. Detta ger oss anledning sätta

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

hvilken likhet utsäges: vägarne r_θ och $b_\beta + a_\alpha$ äro lika, såsom fixerande samma punkt P och såsom hänförda till samma grundbestämningar; eller: komplexen r_θ är lika med summan af komplexerna b_β och a_α, såsom fixerande samma punkt som denna och såsom hänförd till samma grundbestämningar.

Vår definition på geometrisk likhet blir derföre följande: *vägar, som fixera samma punkt och äro hänförda till samma grundbestämningar, äro lika.*

Detta likhetsbegrepp, ehuru icke innebärande någon likhet i afseende på de ingående komplexernas modyler eller argument, är dock fullt berättigadt, såsom grundande sig på de geometriska komplexernas betydelse och ändamål att i förhållande till gifna grundbestämningar bestämma punkters lägen i planet; och då vägarne på ömse sidor om likhetstecknet bestämma samma punkt och äro hänförda till samma grundbestämningar, så äro de att betrakta såsom fullt lika eller identiska till sin betydelse. Vi skola ock se, att den geometriska likheten låter handtera sig efter samma eller analoga räknelagar som den algebraiska, och att denna senare utgör blott ett enskildt species af den förra.

12. Såsom en omedelbar följd af ofvan gifna definition ha vi följande sats: *en geometrisk likhet rubbas icke, om vägarne på ömse sidor om likhetstecknet reduceras till samma nya grundbestämningar.*

13. Om vi således reducera de båda vägarne i likheten (1) till ett nytt origo förmedelst komplexen c_γ, så äro de nya vägarne lika eller

$$c_\gamma + r_\theta = c_\gamma + b_\beta + a_\alpha,$$

såsom fixerande samma punkt i förhållande till samma grundbestämningar.

Denna sats uttryckes ock: *man eger rättighet att »lägga lika till lika.»*

14. Om vi på b_β och a_α som hopstående sidor konstruera en parallelogram O_1OPB (fig. 23), så bestämmes punkten P lika väl af vägen O_1BP som af vägen O_1OP, då således

$$b_\beta + a_\alpha = a_\alpha + b_\beta,$$

d. v. s. »*termernas ordning i en summa är likgiltig.*»

Denna sats gäller för summor af huru många termer som helst; ty $c_\gamma + b_\beta + a_\alpha = c_\gamma + a_\alpha + b_\beta = a_\alpha + c_\gamma + b_\beta = \text{etc.}$

15. Såsom omedelbart sanna ha vi följande två satser:

1:o. *Summan af två lika rigtade komplexer är = aritmetiska summan af deras modyler med deras gemensamma rigtning,* eller

$$a_\alpha + b_\alpha = (a + b)_\alpha .$$

Anm. Är $\alpha = 0$, så ha vi $a_0 + b_0 = (a + b)_0$, då således komplexer i grundrigtningen eller sådana, som tecknas med argumentet 0, äro att betrakta som *positiva* tal eller qvantiteter.

2:o. *Summan af två motsatt rigtade komplexer är aritmetiska skilnaden mellan deras modyler med den större rigtning,* eller, då a antages $> b$,

$$a_\alpha + b_{\alpha+\pi} = (a - b)_\alpha .$$

Anm. Af denna likhet följer, att $b_{\alpha+\pi}$ kan tecknas $- b_\alpha$ och tvärtom. Är $\alpha = 0$, så blir $b_\pi = - b$, då således komplexer i rigtningen motsatt grundrigtningen eller sådana, som tecknas med argumentet π, äro att betrakta som *negativa* tal eller qvantiteter. Denna motsatta rigtning kallas med anledning häraf *negativ grundrigtning*, då i sammanhang härmed den egentliga grundrigtningen stundom benämnes *positiv grundrigtning.* Man talar ock om *positiv* och *negativ vinkelrät rigtning*, af hvilka den förra bildar vinkeln $\frac{1}{2}\pi$ och den senare vinkeln $\frac{3}{2}\pi$ med grundrigtningen.

16. Om vi hafva likheten (1) eller

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha$$

och vi enligt § 13 lägga $b_{\beta+\pi}$ eller $- b_\beta$ till på båda sidor, så blir, enär $b_\beta + b_{\beta+\pi} = 0$:

$$b_{\beta+\pi} + r_\theta = a_\alpha ,$$

hvilken sats utsäges: *man eger rättighet att i en geometrisk likhet öfverflytta en term från ena sidan (mumbrum) till den andra, om blott »tecknet ändras» eller termens argument ökas med π.*

17. Häraf inses, *att om den ena sidan i en geometrisk likhet är noll, så utgöres den af den andra sidan betecknade vägen en sluten polygon, början och slutande i origo.*

18. Hvarje komplex r_θ kan sättas = summan af två komplexer $a_{k\pi}$ och $b_{k_1+\frac{1}{2}\pi}$, hvaraf den ena således ligger i den positiva eller negativa grundrigtningen ($k = 0$, $k = 1$)

$b_{(k_1+\frac{1}{2})\pi}$

och den andra i den positiva eller negativa vinkelräta rigtningen ($k_1 = 0$, $k_1 = 1$); eller, om vi teckna $a_{k\pi} = x$ och $b_{k_1\pi} = y$, der således x och y äro positiva eller negativa tal, så kan alltid sättas

$$r_\theta = x + y_{\frac{1}{2}\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Komplexen r_θ säges nu vara *projicierad* på grundrigtningen och den vinkelräta rigtningen; x och y kallas hans *projektioner*, den förra på grundrigtningen och den senare på den vinkelräta rigtningen. Den förra benämnes ock *grundrigtningsprojektion* och den senare *vinkelrät projektion.*

19. Är komplexen, som projicieras, den geometriska enheten 1_θ, så kallas grundrigtningsprojektionen *kosinus*, tecknad $\text{Cos}\,\theta$, och den vinkelräta projektionen *sinus*, tecknad $\text{Sin}\,\theta$, då således

$$1_\theta = \text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta_{\frac{1}{2}\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Kosinus och sinus äro således positiva eller negativa tal mellan gränserna $+1$ och -1, till sina storlekar och tecken beroende af värdet på argumentet θ.

Såsom omedelbart gifven genom konstruktion ha vi likheten

$$1_{-\theta} = \text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta_{\frac{1}{2}\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

då således kosinus blir oförändrad, men sinus ändrar tecken vid en teckenförändring hos argumentet.

20. Om komplexen r_θ enligt § 3 tecknas $r\,.\,1_\theta$, så erhålles med stöd af (3)

$$r_\theta = r(\text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta_{\frac{1}{2}\pi}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Högra sidan af denna likhet utgör ett ofta användt uttryckssätt för komplexen r_θ och benämnes *reduceradt uttryck* (»reducerad expression»).

Anm. Parentesens betydelse för de geometriska komplexerna är den vanliga, att nämligen de inom parentesen förekommande termerna tänkas hoptagna till en enda term eller summa.

21. Om vi ha likheterna

$$r_\theta = x + y_{\frac{1}{2}\pi},$$
$$\varrho_\varphi = \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi},$$

der argumenten θ och φ äro räknade i samma led samt hvardera $< 2\pi$, så kan icke likheten $r_\theta = \varrho_\varphi$ ega rum (Eukl. I: 26), utan att särskildt

$$\left.\begin{aligned} r &= \varrho \\ \theta &= \varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

och

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

d. v. s. utan att modylerna och argumenten äro lika äfvensom grundrigtningens och den vinkelräta rigtningens projektioner äro lika.

22. Om vi sätta $r_\theta = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ och $\varrho_\varphi = \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$, så är enligt §§ 14 och 15

$$r_\theta + \varrho_\varphi = x + y_{\frac{1}{2}\pi} + \xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi} = (x + \xi) + (y + \eta)_{\frac{1}{2}\pi}\ *,$$

då således *projektionen af en geometrisk summa vare sig på grundrigtningen eller den vinkelräta rigtningen är = algebraiska summan af de ingående termernas projektioner på de nämnda rigtningarna.*

Denna sats gäller tydligen för en geometrisk summa af huru många termer som helst.

På grund häraf och med stöd af (7) kunna vi nu uttala följande, under namn af *projektionsteoremet* kända, sats:

Om man projicierar de två vägarne i en geometrisk likhet på grundrigtningen och den vinkelräta rigtningen, så äro grundrigtningsprojektionerna sinsemellan och de vinkelräta projektionerna sinsemellan lika.

Anm. Är den ena sidan i den geometriska likheten noll (jfr § 17), så är den andra sidans projektioner äfven noll, då följaktligen *projektionen af en sluten polygon såväl på grundrigtningen som den vinkelräta rigtningen är noll.*

(Forts.)

* De tre membra i denna likhet representeras i ordning af de tre lika vägarne i fig. 24, nämligen: OAB, $OCADB$, $OCEDB$.

Satser af docent C. E. Lundström.

7. Att inskrifva i en gifven cirkel en triangel, hvars area är lika med en gifven qvadrat, så att dess perimeter blifver ett maximum eller ett minimum.
8. Det begäres att inskrifva en månghörning med ett gifvet antal sidor i en ellips, så att dess area blifver så stor som möjligt. Visa att uppgiften har ett obegränsadt antal lösningar och huru hvar och en af dem erhålles, när man känner den regelbundna månghörningen med samma antal sidor.

Satser af student T. B. Johansson.

9. Att genom en gifven punkt inom en konisk sektion draga en korda, som afskär minsta möjliga segment.

En i mitt tycke synnerligen vigtig sats är följande:

10. Tvenne ellipssegment, som stå på lika stora baser och mellan samma parallela linier (d. v. s. den gemensamma tangenten är || de lika stora kordorna, hvilka ligga i samma räta linie) äro lika stora, så vida deras med kordorna parallela konjugatdiametrar äro lika stora och ligga i samma räta linie.

Satser af C. O. Börje af Gennäs,

elev vid Halmstads högre elementarläroverk.

11. Att i en ellips inskrifva en liksidig triangel.
12. Från en punkt på omkretsen af en ellips äro kordor dragna. Sök locus för midtpunkterna af dessa kordor.
13. En ellips och en punkt P på dess omkrets äro gifna. Från P dragas tvenne lika stora kordor PL och PM. L och M sammanbindas. Sök locus för midtpunkten af LM.

AFDELNING III.

Lord Rosse.

I den medlersta delen af Irland ligger en liten och oansenlig stad, benämnd *Parsonstown*, hvilken för oss väl icke skulle egt något egentligt intresse, så framt den ej bildade ett slags bihang till och vunne sin glans från det åldriga, i stadens omedelbara närhet belägna herresätet *Birr Castle.*

Denna i medeltidsstil uppförda borg är omgifven af en vidsträckt, från staden genom höga murar afskild park. Kring hufvudbyggnaden sträcka sig likaledes höga vallar, och dessa omgifvas i sin ordning af en djup löpgraf, öfver hvilken en vindbrygga leder till det med tinnar och torn försedda porthvalfvet, der ett grefligt vapen med orden *pro Deo et Rege* högförnämt prunkar. I öfverensstämmelse med dessa anordningar är äfven sjelfva slottet inrättadt; den höghvälfda och med ekpanelning i taket försedda sal till exempel, i hvilken jag vid mitt besök derstädes först inkom, hade sina väggar behängda med gamla rustningar och familjeporträtter från aflägsna tider, och fenstren voro prydda med målade glas. Med ett ord: allt, det ena i förening med det andra, för att nu ej glömma de pudrade betjenterna på trappan, lika litet som de ståtliga påfoglarne på gården, eller svanorna i den närbelägna fiskdammen, gaf åt det hela en så äkta aristokratisk prägel, att det aldrig skulle fallit mig in att taga en närmare kännedom om detta Birr Castle, och ännu mindre att här sysselsätta mig med dess beskrifning, så framt det icke varit residens för den genom sina utmärkta jetteteleskoper vidtberömde Lord *Rosse.*

Kunde det någonsin med skäl sägas, att ytan bedrager, så var det här, ty den nyss till utseendet så stela och högförnäma borgen visade sig snart vid en närmare granskning i en ganska förändrad och fördelaktig dager.

På sidan om den gamla riddarsalen ligger nämligen ett med böcker rikt försedt biblioteksrum, hvarifrån man genom en med bokhyllor dold dörr inkommer i ett med svarfstolar och hyfvelbänkar, verktyg och modeller fyldt rum, der Lorden sjelf jemte sina söner sysselsatte sig med så oridderliga saker som svarfning och hyfling. Icke mindre oväntadt var att i ett närbeläget rum finna en fullständig fotografisk atelier, der de sista och bästa fotografiska recepterna pröfvades af Lady *Rosse*, för att sedan användas för vetenskapliga ändamål.

Bakom slottet äro smärre, men särdeles vidsträckta byggnader uppförda, i hvilka en kraftig ångmaskin arbetade; der funnos ock ugnar för smältning och afkylning, apparater för slipning och polering, m. m.

Alla dessa arbetslokaler, hvilka kostat ofantliga summor, voro dock ej till blott för att tillfredsställa en rik familjs skiftande nycker, utan med dem åsyftades verkligen uppnåendet af ett bestämdt och rent vetenskapligt ändamål. Lord *Rosse*, en ifrig vän och befordrare af astronomiens framsteg, följde, liksom så många andra privatastronomer i England, den gamle *Herschels* exempel deri, att han sjelf förfärdigade sina metallspeglar, och det lyckades honom äfven efter otaliga försök att konstruera ett teleskop af så betydliga dimensioner, att dess spegel var 6 fot i diameter. Det var för tillverkandet af denna jette bland de astronomiska instrumenten han egnade en god del af sin tid och sina rikedomar, och detta hans arbete har för vetenskapen ej heller varit fruktlöst.

Vi kunna här, i följd af bristande utrymme, icke ingå i någon detaljerad beskrifning öfver de metoder, han använde vid förfärdigandet af dessa sina metallspeglar, ej heller fullständigt angifva, huru hans tuber voro inrättade, men några af de svårigheter, han hade att bekämpa och lyckades öfvervinna, torde dock förtjena att omnämnas.

Den till spegeln afsedda metallmassan, som utgöres af koppar och tenn i en bestämd blandning, nemligen 32 till 15, eller noggrannare: fyra equivalenter koppar mot en tenn, måste vid gjutningen vara fullt homogen och fri från luftblåsor. Afsvalningen måste försiggå särdeles långsamt och lika på alla punkter af den blifvande spegelytan, på det att sprickor och härdning der skola undvikas. Slipningen och poleringen böra åt ytan gifva en sferisk eller ännu heldre en parabolisk form; och slutligen måste denna form bibehålla sig oförändrad, då spegeln, insatt i tuben, vid begagnandet till observationer kommer att intaga helt olika och vexlande lägen mot horizonten.

För att uppnå detta mål, lät Lord *Rosse* den till en vigt af 4 tons, d. v. s. af ungefär 95 svenska centner uppgående massan smälta i tre stora deglar, ur hvilka metallen sedan hastigt, men samtidigt häldes i gjutformen. Denna var, för värmens jemnare fördelning inom massan och för att lämpligen uppbära spegelns stora tyngd, i bottnen försedd med grofva stänger af jern. Afsvalningen fortgick under sex veckors tid i en särskild dertill afsedd och ursprungligen till rödglödgning, d. v. s. till omkring 500 grader C. upphettad afkylningsugn, i hvilken spegeln insattes och med den tillstängda ugnen fick långsamt afsvalna.

Slipningen och poleringen, hvilka verkställdes med tillhjelp af en ångmaskin, voro naturligtvis, liksom gjutningen, det svåraste arbetet; såsom bevis hvarpå kan nämnas, att ej färre än tre speglar af fem sprungo sönder under dessa försök. Det var nämligen, för att nu anföra några exempel på de försigtighetsmått, som här måste iakttagas, icke likgiltigt, huru länge arbetet för hvarje gång fick under dessa operationer fortgå. Ty genom den friktion, som vid slipningen egde rum, alstrades värme, i följd hvaraf temperaturen i spegelns yta oupphörligt steg, men hade detta oafbrutet fått ske, skulle den spröda metallen lätt kunnat spricka. Ej heller fick man, så besynnerligt det än vid första påseende kan förefalla, förbise inflytandet af atmosferens fuktighetstillstånd, ty då detta var under eller öfver det normala, medförde den för hastiga eller för långsamma afdunstningen af det vid poleringen erforderliga vattnet ett menligt inflytande på den polerade ytans slutliga beskaffenhet.

Beskrifningen af det vidlyftiga maskineri, som vid slipningen och poleringen användes, kan ej vara lämplig att intaga i denna lilla uppsats. Här torde blott behöfva nämnas, att, då spegeln på behörigt sätt blifvit bearbetad och medan han ännu qvarlåg i poleringsapparaten, man eftersåg, huruvida en klar bild af något lämpligt föremål, t. ex. porslinstaflan på ett fickur, kunde med densamma erhållas, eller icke. Men den egentliga undersökningen skedde dock först, när spegeln blifvit insatt i sin tub, hvarvid naturligtvis någon himmelskropp fick tjena såsom objekt.

Från sliphuset till tuben, som befann sig i parken, fraktades spegeln på jernbana, och när han till tuben anländt, anbragtes under honom en mängd häfstänger, försedda med lämpliga belastningar. Genom dessa motvigter hindrades den i icke färre än 81 punkter understödda spegeln från att antaga någon ofördelaktig och af läget beroende böjning, och följaktligen uteblef härigenom äfven det vanställande af den optiska bilden från himmelskropparne, som eljest nödvändigtvis skulle hafva egt rum.

Nästan lika stora svårigheter voro att öfvervinna vid sjelfva tubens uppställning och rörelse. Det kolossala röret var mer än 50 fot långt och hade 8 fots diameter, så att det vid rörets horizontela läge verkligen var möjligt för en fullvuxen karl att gå rak längs in i detsamma. Tuben rörde sig, kring sin nedre ända såsom fix, i meridianplanet och emellan tvenne särdeles starka, med nämnda plan parallela och 60 fot höga stenmurar. Naturligtvis måste en så betydlig tyngd, som denna tub i förening med sin spegel egde, nämligen 245 sv. centner, på lämpligt sätt vara motvägd, för att utan en allt för stor kraftansträngning kunna sättas i rörelse. För detta ändamål begagnade sig Lord *Rosse* af en, längs en kroklinie löpande motvigt, och han hade således praktiskt utfört det inom mekaniken bekanta problemet om vindbryggan, som bör stadna i jemnvigt i hvilket läge som helst, ehuru motvigten här för enkelhets skull fick löpa längs den cirkelbåge, som så nära som möjligt kunde ersätta den egentliga jemnvigtskurvan.

Enär instrumentet var inrättadt till ett Newtons teleskop, måste okularpjesen befinna sig vid rörets öppna ända, och på det observatören der skulle beqvämt kunna göra sina iakttagelser, voro läktare på olika delar af den ena muren anbragta, hvilka på rullar kunde föras ut mot tubens mynning. Tubens såväl som läktarnes rörelse åstadkoms medelst kedjor, hvilka lupo öfver blocktrissor och valsar.

Spegelns brännvidd var 54 fot, och ehuru teleskopet understundom medgaf användandet af en förstoring större än 2000, visade sig dock, i följd af klimatets beskaffenhet, 1300 gångers förstoring såsom den lämpligaste.

Med förfärdigandet af detta instrument var Lord *Rosse* sysselsatt under en tid af mer än 16 år, och det uppgifves för honom hafva medfört en uppoffring af 20000 pund sterling, eller omkring $\frac{1}{3}$ million riksdaler riksmynt *.

Innan han företog sig att utföra det ofvannämnda teleskopet med 6-fots öppning, hade han allt ifrån 1827 öfvat sig med att förfärdiga dylika instrument af mindre dimensioner. Bland dessa må i främsta rummet nämnas en reflektor med 3-fots spegel och 26 fots brännvidd, hvars

---

* The illustrated London News, 1867, s. 536.

uppställning i det närmaste liknar den af Sir *John Herschel* använda. Detta teleskop har äfven visat sig ega särdeles goda egenskaper och medgaf, om ock blott i sällsynta fall, användandet af till och med 2000 gångers förstoring.

Önskar man för sig åskådliggöra i hvilken betydlig grad Lord *Rosse's* stora teleskop förmår skärpa synförmågan, kan man roa sig med att beräkna längden på den person, hvars pupillöppning vore i stånd att från en stjerna direkt uppfånga lika mycket ljus, som den ifrågavarande 6-fots spegeln. Man erinre sig dervid, att ljusstyrkan hos bilden på ögats näthinna i närvarande fall mångdubblas vid begagnandet af ett teleskop lika många gånger mot hvad som eger rum vid direkt seende, som spegelns yta är större än pupillöppningen. Men derjemte bör ihågkommas, att spegelmetallen reflekterar endast $\frac{2}{3}$ af den infallande ljusmängden, i följd hvaraf spegelns dimensioner först måste något reduceras; den effektiva diametern kommer icke desto mindre att uppgå till 4,9 fot. Antages nu pupillöppningen hos en karl om 6 fots längd vara 1 linie i diameter, så skulle, under de gjorda förutsättningarne, den ifrågavarande jetten uppnå den respektabla längden af 2940 fot, eller i rundt tal $\frac{1}{12}$ svensk mil, hvilken längd utgör omkring 6 gånger den stora egyptiska pyramidens höjd.

De resultat, hvilka Lord *Rosse* med dessa sina teleskoper vunnit, har han angifvit i några till Royal Society i London insända afhandlingar *. Hade han uppstält sitt instrument i ett land, hvars klimat varit mera gynsamt för anställandet af astronomiska observationer, än det töckniga Irland, skulle resultaten otvifvelaktigt blifvit större än nu; men detta oaktadt äro de redan vunna icke obetydliga.

Till en början ingick det i hans plan att undersöka, huruvida de töckenstjernor, som förut trotsat en *Herschels* bemödanden, skulle medelst 6-fots spegeln kunna sönderdelas i smärre stjernor eller icke, och häri lyckades han

* Philos. Transactions för åren 1840, 1850 och 1861.

äfven fullständigt. Men då han dervid upptäckte, att vissa af dessa himmelskroppar egde en förut alldeles icke anad form, nämligen af en eller flere med hvarandra sammanhängande spiraler, af hvilka några liknade vattenhvirflar, egnade han hela sin uppmärksamhet åt dessa himmelskroppars *utseende*. Vid denna granskning af *Herschels* nebulosor fann han, att en betydlig mängd bland dem verkligen voro spiralformiga, och med afseende på de öfrigas form har han genom sina mätningar och teckningar om dem lemnat en noggrannare kännedom, än hvad *Herschel* med sitt instrument förmådde. Det är således uppenbart, att det af Lord *Rosse* utförda arbetet måste ega stor betydelse vid bedömmandet af dessa aflägsna himmelskroppars verkliga natur.

Alla de, som under gynsamma atmosferiska förhållanden haft tillfälle att med det ofvannämnda stora teleskopet betrakta vare sig månans berg, dalar och utsläckta vulkaner, eller planeten Veneris bergiga inre kant vid någon af dess faser, eller system af dubbelstjernor eller nebulosor, hafva derom enstämmigt yttrat, att dessa fenomens verkliga skönhet vida öfverstiger hvarje derå lemnad beskrifning.

De egentliga observationsgöromålen öfverlemnade Lord *Rosse* vanligtvis åt sina assistenter; sjelf sysselsatte han sig mest med instrumentens förfärdigande och iordningsställande, samt med öfvervakandet af de å desamma ytterligare erforderliga arbetena, hvarförutom han naturligtvis ledde sjelfva observationerna. Hans starkaste sida var utan all fråga den praktiska mekaniken, och han har vid dess tillämpning i ifrågavarande fall vetat att på ett lyckligt sätt tillgodogöra sig vetenskapens alla resurser, der dessa såsom gifna redan funnos för handen, men då detta icke var förhållandet, måste han på egen hand söka det rätta och visade sig dervid vara en lika skicklig som ihärdig experimentator.

Bland sina samtida åtnjöt Lord *Rosse* ett särdeles stort och välförtjent anseende. Redan medan fadren lefde, var han åren 1821—34 under namn af Lord *Oxmantown* parlamentsledamot för Kings County, hvarest Parsonstown är beläget. Till ledamot af Royal Society nämndes han 1831, och till dess president 1849; han var dessutom kansler för universitetet i Dublin.

Född 1800 dog han den 31 Oktober 1867.

ROB. THALÉN.

AFDELNING IV.

Anmälda skrifter.

2. Euklides' fyra första böcker, med smärre förändringar och tillägg. Af C. F. LINDMAN, lektor vid Strengnäs högre elementarläroverk. Stockholm 1867. Pris 1,50.

(Forts. fr. sid. 99).

Det är oss ett kärt nöje att för vännerna af det matematiska studiet få presentera vår gamle bepröfvade Euklides i den drägt, hvari förf. af ofvanstående arbete klädt honom. Förf. har följt Euklides sats för sats. De förändringar i bevis och stil, som förf. gjort, hafva sin grund förnämligast i pedagogiska skäl: korthet, redighet, metodik, enkelhet, antydningar om sättet att tänka för att finna de konstruktioner, hvilka äro behöfliga för en uppgifts lösande o. s. v.

Genom att begagna teckenspråket ($+$, $—$, $>$, $\wedge$ o. s. v.) har förf. fått sina bevis korta och lätta att öfverse. Framställningen är synnerligen redig och metodisk. Sålunda förekomma under hvarje teorem, sedan satsen blifvit uttryckt, rubrikerna: hypotes och tes, och under en mängd af problemen rubrikerna: gifvet, sökt, upplösning och bevis. På flere ställen har förf. vid problemens upplösning på ett särdeles pedagogiskt sätt gifvit läsaren en ledtråd, enligt hvilken han sjelf kan finna lösningen. Som exempel på förf:ns pedagogiska metod välja vi den för oss alla välbekanta satsen:

«Att på en till längd och läge gifven rät linea *AB* upprita en liksidig triangel.

Gifven: räta linien AB.

Sökt: en punkt, hvars afstånd från A och B är $= AB$.

Upplösning: Alla punkter, hvilkas afstånd från A är $= AB$, ligga på en cirkelperiferi, som går genom B och har A till medelpunkt. Alla punkter, hvilkas afstånd från B är $= BA$, ligga på en cirkelperiferi, som går genom A och har B till medelpunkt. Den sökta punkten skall uppfylla begge dessa vilkor; således ligga på båda de nämnda periferierna, d. v. s. i den eller de punkter, der de träffas. Tag derföre o. s. v.

Bevis. Emedan A är medelpunkt till cirkeln BCD, så är o. s. v.»

För åtskilliga satser har förf. lemnat enklare bevis. Så t. ex. bevisar han den satsen, att vinklarne B och C vid basen BC i en likbent triangel ABC äro lika stora derigenom, att han tänker sig den likbenta triangeln ABC flyttad så, att han får läget $A'B'C'$. Af kongruensen hos trianglarne ABC och $A'C'B'$ erhåller han $\wedge B = \wedge C' = \wedge C$*.

Satsen «att upprita en triangel, der hvardera af vinklarne vid basen är dubbelt så stor som vinkeln vid spetsen har förf. i likhet med Weström ** löst utan att förutsätta kännedom om Euklides' tredje bok.

Satserna om cirklars tangering äro förenklade. Andra bokens satser äro behandlade dels med, dels utan konstruktion äfvensom algebraiskt. Flere satser äro tillagda dock utan att rubba nummerföljden. Bland sådana nämna vi endast det fjerde fallet för trianglars kongruens (2 sidor och motstående vinkel), och en rät linies delning i huru många lika stora delar som helst.

I slutet af sitt arbete har förf. ett tillägg, der han visar, huru man vid lösningen af ett uppgifvet problem kan förfara än syntetiskt och än analytiskt. Sjelf gör han tillämpning deraf på flere vackra satser.

Tryck, papper och figurer äro ypperliga.

Vi öfvergå till betraktande af några punkter, i hvilka vi äro af en något skiljaktig mening med förf. Följande äro de vigtigaste.

1. Först vända vi oss emot definitionen på en linie, såsom en längd utan bredd. Man kan fråga: finnes det någon längd, som har bredd? En likartad anmärkning gäller definitionen på yta.

2. Definitionerna på trubbvinkliga, rätvinkliga och spetsvinkliga trianglar böra flyttas fram näst efter den satsen, att i hvarje triangel är summan af två vinklar mindre än två räta. Först då blifva de fullt klara. En sådan framställning strider ej emot förf:ns åsigter för öfrigt.

3. Definitionen på en qvadrat innehåller för många bestämningar, alldenstund några följa af de öfriga. Den kan lyda: den fyrsidiga figur,

---

* Anmärkningsvärdt är att detta bevis samtidigt offentliggjordes i Pædagogisk tidskrift af Aulin. Decemberhäftet.

** Äfven i afseende på detta bevis inträffar det nästan samtidiga offentliggörandet i tvenne arbeten, efter hvad vi nu sett.

som har alla ~~vinklarna~~ lika stora, och uti hvilken tillika någon vinkel är rät, kallas en qvadrat.

4. Vid det tredje postulatet «att taga hvad punkt som helst till medelpunkt och rita en cirkel, hvars periferi går genom hvad punkt som helst« har förf. gjort det tillägget: «detta är, *annorlunda uttryckt* *, att med godtycklig medelpunkt och radie rita en cirkel«. Här tro vi, att förf. missförstått Euklides. Så väl de euklideiska ordalagen, som tillvaron af satserna 2 och 3: «att från en gifven punkt draga en rät linie lika stor med en gifven rät linie«, och «att, då två olika stora räta linier äro gifna, afskära af den större ett stycke lika stort med den mindre«, visa tydligt att Euklides förutsätter väl, att man på fri hand kan genom en gifven punkt upprita en periferi kring en gifven medelpunkt, men ej att man kan med godtycklig radie och medelpunkt upprita en cirkel. Detta är vida svårare och förutsätter att man genom minnet eller åskådningen skulle vara i stånd att upprita cirkeln, blott jag kommer ihåg eller ser radiens storlek. Vi hålla ej på Euklides' tredje postulat, vi blott bestrida förf:ns påstående, att detta postulat och förf:ns uttryck på det äro samma sak. På grund häraf erkänna vi ej, att de af förf. tillagda lösningarna af satserna 2 och 3 äro rigtiga, så framt man ej får utbyta Euklides' tredje postulat emot förf:ns uttryck. I detta fall åter anse vi, att de Euklideiska lösningarna äro både öfverflödiga och oklara, alldenstund de göra en enkel sak invecklad.

5. I satsen (I. 22): «att upprita en triangel af tre gifna räta linier«, har förf. uraktlåtit att lemna bevis för, att cirklarne skära hvarandra.

6. I satsen (I. 24): «om två sidor AB, AC i en $\triangle ABC$ äro lika stora med hvar sin af två sidor DE och DF i $\triangle DEF$, men mellanliggande vinkeln A i den förra är större än mellanliggande vinkeln EDF i den senare, så är basen BC i den förre $>$ basen EF i den senare«, har förf. lemnat ett bevis, som gäller för alla händelser. För fullständighetens skull hade dock bort visas, att den der förekommande linien EG verkligen alltid skär linien DF.

7. Tillägget vid det fjerde kongruensfallet (I. 26 A) bör heta (såsom Todhunter har det): «likväl med det förbehåll, att de öfriga vinklarne C och F äro antingen båda spetsiga eller båda trubbiga eller *en af dem rät*. Satsen blir derigenom något allmännare än förf. har den.

8. I beviset för det s. k. 12 axiomet hade förf. bort först bevisa, att den yttre $\wedge\, KAD >$ den motsvarande inre $\wedge\, ABF$ på samma sida, innan förf. i punkten A vid KA satte en $\wedge = \wedge\, ABF$.

9. För satsen (III. 13) «en cirkel kan ej tangera en annan i flere än en punkt« har förf. ett mycket bra bevis i föregående sats 10. Men förf:ns tillägg: «hvartill kommer, att, om de kunde tangera hvarandra

* Kursiveringen är gjord af granskaren.

i två punkter, så skulle linien, som sammanbinder medelpunkterna, gå genom båda, hvilket är omöjligt«, bevisar ingenting. Om nämnl. man ej får förutsätta satsen 10, så bör tesen i sats 11 förändras till följande: om två cirklar tangera hvarandra innantill, så ligga medelpunkterna i samma räta linie med någon af de möjliga tangeringspunkterna.

10. I satsen IV. 2: «att i en gifven cirkel ABC inskrifva en $\triangle$, som är likvinklig med en gifven $\triangle DEF$ har förf. utom den Euklideiska lemnat en annan upplösning. Denna andra upplösning, ehuru rigtig, är svårfattlig derföre, att förf. ej lemnat bevis för att verkligen linien BA skär cirkeln.

11. På några ställen t. ex. vid I. 25, I. 26 A) hade de indirekta bevisen med fördel kunnat utbytas mot direkta. Detta är dock en smaksak.

12. Upplösningen af satsen «att från en gifven punkt A utom en gifven cirkel draga en linie så, att det stycket af denna, som blir korda i cirkeln, erhåller en gifven längd BC. är mer invecklad, än den behöfver vara. Enklare är väl att i den gifna cirkeln inpassa en korda lika med den gifna linien BC, att rita en med den förra koncentrisk cirkel, som tangerar denna kordan och att från den gifna punkten till den sist erhållna cirkeln draga en tangent.

Orsaken till att förf. ej vidtagit de förändringar, vi i föreg. punkten antydt, torde till en del bero af förf:ns pietet för Euklides. Vi sluta denna anmälan med att tacka förf. derför, att han i detta arbete meddelat oss frukterna af en under många år förvärfvad lärareerfarenhet, förvissade om, att detta hans goda arbete länge skall gagna vårt fosterlands ungdom.

F. W. Hultman.

Tidsskrift for Mathematik. Udgifvet af Camillo Tychsen. Kjøbenhavn, Otto Schwartz forlag.

Denna tidskrift, som i år kommer att fira sin tionde födelsedag, borde vara allmänt känd och spridd bland oss svenskar. Redan den omständigheten, att tidskriften har en förläggare, som fortfar i denna sin egenskap, vittnar att tidskriften fullgör sin bestämmelse att främja det matematiska och fysiska studiet. Ännu mera finner man detta, då man i densamma får läsa utmärkta afhandlingar af Danmarks ypperste matematiker och fysiker, de berömde professorerna Ramus, Jürgensen, Oppermann, Steen, d'Arrest, Schjellerup, docenterna Lorenz, Thiele m. fl. för att ej tala om redaktören d:r Tychsen sjelf, hvilkens afhandlingar i differentialeqvationers integrering väckt den lärda verldens uppmärksamhet. Man får i denna tidskrift läsa gedigna uppsatser inom den gamla och nyare geometrien, inom de första elementen af algebran ända till den hittills hos oss ännu jemnförelsevis litet kända lösningen af femte gradens eqvationer; man får der göra bekantskap med de mest delikata undersökningar inom sannolikhetskalkylen eller talteorien. De senare årgångarne innehålla en hel följd af elementära uppsatser, benämnda matematiska lekar, för hvilka lemnas en matematisk teori. Dessa lekar bestå förnämligast i räknegåtor, kortkonster m. m. Som exempel framställa vi följande tvenne allmänt kända: huru skall man flytta hästen på ett schackbräde, för att den skall passera alla rutor utan att komma två gånger på någon? huru skall man med ett tre-kannekärl och ett fem-kannekärl mäta upp fyra kannor ur ett fullt åtta-kannekärl?

Som det skulle blifva för vidlyftigt att redogöra för alla de föregående årgångarne, inskränka vi oss till att endast omnämna det hufvudsakligaste af det som förekommer i fjolårets och det första häftet af innevarande års årgång.

Äfven i denna årgång förekomma matematiska teorier af Steen och Hertzsprung för flere matematiska lekar och vilja vi bland dem särskildt framhålla hasardspelet «spekulation«. Vidare bjuder prof. Steen på några synnerligen eleganta geometriska bevis för satser ur plana och sferiska trigonometrien om sinus, kosinus, tangenter och kotangenter för halfva vinklar. I stor förbindelse stå vi till samme författare för hans elementära och lättfattliga framställning af Plückers trilineära koordinatsystem. Förf. behandlar här temligen utförligt alla de satser, som i våra vanliga läroböcker förekomma under räta linien. Hvad som genast slår an i denna teori är den symmetri, som alla uttryck erhålla. Med längtan motse vi fortsättningen. — I det i år utkomna häftet redogör prof. Steen för ett af herr Sörensen uppfunnet sätt att medelst en liksidig hyperbel dela en vinkel i 3 lika stora delar. Denna metods intresse ligger deri, att den ledde till upptäckten af en egenskap hos den liksidiga hyperbeln, motsvarande den egenskapen hos cirkeln, att periferivinklar, som stå på samma båge, äro lika stora. Ifrågavarande sats lyder så: «förenar man ändpunkterna af en godtycklig båge på en liksidig hyperbel med ändpunkterna af en genom medelpunkten godtyckligt dragen korda, så blifva de vinklar lika stora, som stå på hyperbelbågen en vid hvardera grenen«.

Af prof. Steen förekommer dessutom en afhandling i de elliptiska funktionernas teori och en, der han visar några konstgrepp vid integrering af differentialeqvationer af högre ordning. I sistnämnda ämne har löjtnant Madsen och d:r Tychsen lemnat värdefulla afhandlingar.

I mekaniken har bland andra mag. Christiansen skrifvit ett par afhandlingar, den ena om kraftlinier och den andra om centralrörelsen, der han genom synnerligen originella och eleganta metoder får fram eqvationerna på en mängd i fysiken förekommande kroklinier äfvensom formlerna för rörelsen efter tangenten och radius vektor.

Under årets lopp äro omkring 50 satser inom matematikens och fysikens olika områden framstälda till lösning och bevis, och hafva under samma år omkring 30 blifvit lösta. Bland dessa har isynnerhet en ådragit sig vår uppmärksamhet. Denna af prof. Opperman år 1859 utgifna sats angående sannolikheten af äktenskap mellan olika qvalificerade personer har först nu blifvit löst. Magister Pullich har nämligen särdeles grundligt och fullständigt besvarat densamma.

Ett högt begrepp om den höga ståndpunkt matematiken intager i den danska bildningen lemna oss de i häfte för häfte förekommande examensuppgifterna vid de lärda skolorna, den polytekniska läroanstalten, skogsinstitutet m. fl.

Af arbeten utkomna under året i Danmark framhåller tidskriften isynnerhet Zeuthens analytiska geometri och Andræ's metod att approximativt beräkna bestämda integraler.

Vi kunna ej annat än på det varmaste förorda denna tidskrift öfver hela Skandinavien. Den rigtning tidskriften i de senare årgångarne visat — att lemna rum äfven för mera elementära afhandlingar — anse vi prisvärd. Ännu en gång: vi rekommendera d:r Tychsens tidskrift öfver hela norden.

Satser *,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen v. t. 1868.

För latinlinien.

(2 st. på 4 tim.)

1. Skär en gifven rät linie i fem lika stora delar med tillhjelp af satser ur Euklides' första bok.

2. Att upprita en triangel, som har gifven perimeter och är likvinklig med en gifven triangel.

3. En triangel är inskrifven i en cirkel. Bevisa, att summan af vinklarne i de tre utanför triangeln belägna segmenten är lika med 4 räta.

4. Att upprita en qvadrat, då man känner summan af hans diagonal och sida.

5. Två lika stora cirklar tangera hvarandra utantill. Att upprita en parallelogram, som har en gifven vinkel och med tre af sina sidor tangerar hvardera cirkeln.

6. Tvenne cirklar tangera hvarandra. Att bevisa det hvarje genom tangentpunkten dragen sekant afskär likformiga segment af båda cirklarne.

7. En triangels tre sidor äro delade så, att rektangeln af hvarje sida och dess mindre del är lika med qvadraten på den större delen. Af de tre större delarne är en ny triangel bildad. Bevisa denna triangels likformighet med den gifna.

8. Bevisa, att om någon cirkel utantill tangerar tvenne gifna cirklar, så måste den räta linie, som sammanbinder tangeringspunkterna, skära den räta linie, som förenar de gifna cirklarnes medelpunkter, i en fix punkt.

(2 st. på 4 tim.)

9. Det finnes en rätvinklig triangel, hvars sidor äro sådana, att hypotenusan öfverskjuter den större kateten äfvensom den större kateten den mindre med en enhet. Beräkna dess sidor.

10. Ett ur är försedt med tim-, minut- och sekundvisare. Angif några af de tider, då

1:o. sekund- och minutvisare äro parallela,

2:o. tim- och sekundvisare stå vinkelrätt mot hvarandra.

11. En person köper ett visst antal alnar kläde för 300 R:dr. Hade han för denna summa fått en aln mindre, skulle alnen hafva kostat honom 50 öre mera. Hur många alnar köpte han?

12. Bevisa, att summan af två tals qvadrater alltid är större än talens produkt.

13. Bestäm värdena af x och y i eqvationssystemet

$$\frac{x+y}{x-y} = 5\,,$$

$$x^2 - y^2 = 5\,.$$

---

* Vi skola i nästa häfte intaga de bäst vitsordade lösningarna af dessa satser.

14. Tre personer A, B och C spela tillsammans. I första spelet fördubbla A och B sina kassor på C:s bekostnad, i det andra fördubbla A och C sina på B:s bekostnad, i det tredje B och C sina på A:s bekostnad. Vid tredje spelets slut befanns A hafva 2 R:dr, B 12 R:dr, C 16 R:dr i behåll. Med huru stor kassa hade hvardera börjat?

15. Tre tals summa är 36. Summan af det första och tredje är lika med det andra, två gånger taget; summan af två gånger det första och det andra är två gånger det tredje. Hvilka äro talen?

16. En cylinder, som är inskrifven i en sfer, är sådan att dess bugtiga yta är lika med ytan af sferens storcirkel. Huru stor är cylinderns volym. Sferens radie = 1 fot.

För reallinien.

(2 st. på 5 tim.)

17. Att upprita en cirkel, som tangerar en gifven cirkel och två till densamma hörande tangenter.

18. Att konstruera en triangel, då man känner basen, motstående vinkeln och perimeterns storlek.

19. Att genom en mellan tvenne vinkelben belägen punkt draga en rät linie, så att de delar deraf, som begränsas å ena sidan af den gifna punkten och å den andra af liniens intersektioner med vinkelbenen, blifva till hvarandra i förhållandet m : n.

20. Bevisa, att den räta linie, som halfverar en vinkel i en fyrsidig figur, hvilken är inskrifven i en cirkel, och den räta linie, som halfverar den motstående yttre vinkeln, skära hvarandra i en punkt på periferien.

21. Att dela en gifven rät linie i två delar, så att summan af deras qvadrater blir lika med en gifven qvadrat.

22. Att upprita den största möjliga liksidiga triangel, hvars sidor gå genom en gifven triangels vinkelspetsar.

23. Bevisa, att de polygoner, som bildas, då man skär en pyramid med parallela plan, blifva likformiga.

(2 st. på 4 tim.)

24. På en vagn är hvardera framhjulets omkrets 5,5 fot och hvardera bakhjulets omkrets 6,75 fot. Om nu under en resa framhjulet gjort 3000 omlopp mera än bakhjulet, så frågas: huru stor är den väg, som blifvit tillryggalagd?

25. Hvilket tal satisfierar equationen:

$$a^{x+1} = a^2 . \sqrt[x+2]{a^{3(x+3)}} .$$

26. En likbent triangel, hvars bas BC = 4 fot och sida AB = AC = 2,5 fot, svänger kring en rät linie, som är parallel med AB och går genom C. Hur stor är den på detta sätt alstrade solida figurens volym?

27. I en triangel äro vinklarne vid basen $78^0\ 10'\ 4''$ *och* $54^0\ 3'\ 16''$. *Triangelns höjd är 15 fot. Hur stora äro sidorna?*

28. Emellan talen 9 och 13 skola inskjutas 11 termer, så att en aritmetisk serie derigenom bildas; hvilken blifver denna serie?

29. Med huru stort belopp skall ett kapital, som blifvit lånadt mot 6 procent ränta, årligen amorteras, för att vara fullt inbetalt efter 20 år?

30. Om en regulier 6-hörnings sida är 7 tum, huru stor blir då volymen af den solida figur, som uppstår genom 6-hörningens vridning omkring en af sina diagonaler?

31. Gif eqvationen för den kroklinie, på hvilken hvarje punkt utgör intersektionen mellan en normal till ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

och den mot normalen vinkelräta linie, som går genom origo.

(1 på 3 tim.)

32. Huru lång väg tillryggalägger en kropp vid fritt fall a) under loppet af 58:de sekunden, b) under n:te sekunden?

33. Hvar ligger tyngdpunkten till en cirkelrund skifva, som någonstädes har ett cirkelrundt hål?

34. På hvilket afstånd från en konkav spegel bör man ställa en lysande linie, för att hennes spegelbild skall blifva hälften så lång som linien?

35. På en cirkels periferi tagas sex på lika afstånd från hvarandra belägna punkter, af hvilka en förenas genom räta linier med de öfriga fem. Om linierna beteckna krafter, anbragta i förstnämnde punkt, hvilken rigtning och storlek har då deras resultant?

36. En vertikalt fallande kropp befinnes under en sekund genomlöpa 143 fot. Huru lång tid hade han rört sig, innan sagde iakttagelse egde rum, om tyngdkraften ensam antages hafva förorsakat rörelsen?

Tyngdkraftens acceleration 33 fot.

37. En glascylinder, hvars inre diameter vid 0^0 *är 1.5 fot innehåller vid sagde temperatur en 18 tum hög qvicksilfverpelare. Huru stor höjd kommer samma qvicksilfvermassa att i kärlet intaga, då temperaturen blir* 40^0*?*

Qvicksilfrets kubiska och glasets liniära utvidgningskoefficienter äro $\frac{1}{5550}$ *och* $\frac{1}{11430}$.

38. Hos en af glas förfärdigad plan-konvex lins är tjockleken 2,5 linier, diametern 2,5 tum och fokaldistansen 5,5 tum; man begär få veta glassortens brytningsindex.

39. Angif grunderna för beräkningen af volymen hos en gasmassa, vid gifven temperatur och gifvet tryck, då man känner hennes volym, temperatur och spänstighet vid ett annat tillfälle.

Rättelse.

Sid. 86 rad. 4 nedifr. står: *undersökningarna* läs: *sönderdelningarna.*

Fig. 20.

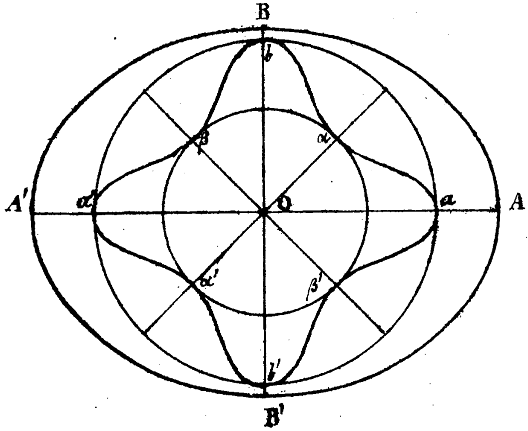


Fig. 23.

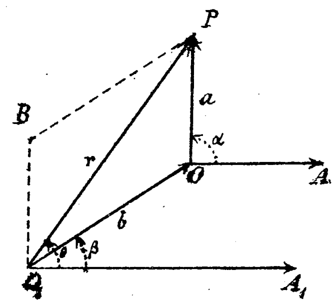


Fig. 22.

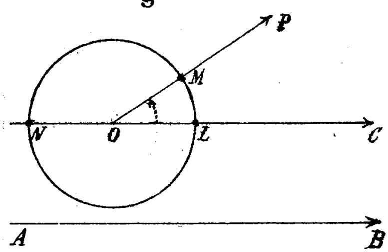


Fig. 21.

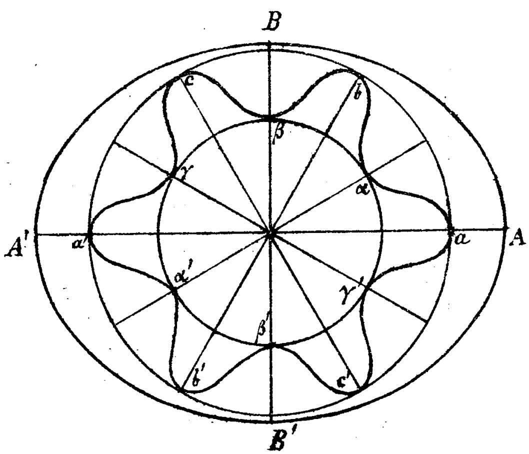
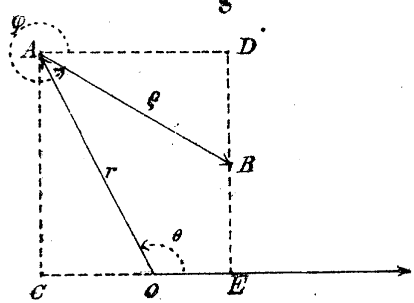


Fig. 24.



Trian

metisi

procei

lymen
en af

inters

och a

loppei

des h

linie,

belägi
Om l
och s

143
rum,

vid s
mer s

$\frac{1}{5550}$

nier,
glassc

gifven
och s

Si

AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 67).

1. OLOF BURE *.

Så vidt vi känna, är Bure den förste svenske man, som utgifvit en räknebok. Hans arbete har titeln: *Arithmeticæ instrumentalis Abacus ratione nova ex geometricis fundamentis absque supputatione numerationes arithmeticas, proportiones simplices, multiplices, directas, reciprocas, disjunctas ac continuas explicans: et eodem intuitu exempla plura ad oculum monstrans. Inventione et opera Olai Engelberti Bure. Angerm. Sueci. S. Medicin. et Math.* Helmæstadii **, anno 1609. Motto: In numero, mensura et pondere. Liten oktav utan paginering.

---

* Olof Engelbrektsson Bure föddes 1578 och dog år 1655. Fadren Engelbertus Olai var kyrkoherde i Själevad i Ångermanland och härstammade från den i Sveriges historia bekante Fale Bure den yngre. Olof Bure adlades 1621, blef utomlands medecine doktor, derefter lifmedikus hos hertig Johan af Östergötland och sedan hos konung Gustaf Adolf, vidare borgmästare i Stockholm och 1637 vice president i Åbo hofrätt. Han hade 3 bröder: Anders, Jonas och Lars. Af desse har den äldste, Anders (öfverste, arkitekt och generalmatematikus), gjort sig namnkunnig genom utgifvande af de första någorlunda pålitliga kartor öfver Skandinavien. Då vi komma att redogöra för decimalräkningens införande i vårt land, hafva vi äfven att säga ett par ord om denne man. Brodren Lars var svärfar till vår berömde Georg Stjernhjelm, hvilken, som vi skola få se, kommer att intaga en hög plats i vår historik. Se Anrep, Svenska adelns ättartaflor, 1858, samt Biografiskt lexikon. ** Helmstedt.

Arbetet är tillegnadt hertig Johan af Östergötland och utgifvet under Bures vistande vid akademien i Helmstedt. Det är bygdt på strängt geometriska grunder (en linies delning i lika stora delar och likformiga trianglar). Hans definitioner äro ungefär desamma som hos Clavius, hvilken han troget följt äfven i förfaringssättet vid lösningarna af problemen. Stilen är vårdad, klar och tilldragande samt förråder öfverallt en man med mycken bildning. De lyckönskningsversar på latinska och grekiska hexametrar, hvarmed professorerna i juridik och grekiska vid Helmstedts akademi hedrat honom i detta hans arbete, bära vittne om det anseende han åtnjöt bland sin tids förnämste vetenskapsmän.

Bokens ändamål är att, utan räkning på papper eller tafla, medelst en maskin *(abacus)* göra de aritmetiska operationerna. Bures abacus består af en rektangulär skifva $ABGF$ (fig. 25), tvärs öfver hvilken går en lineal CD, som kan flyttas parallelt med AB eller GF upp och ned. Sidan AB är delad i 10 lika stora delar genom de med 10, 20, 30... utmärkta punkterna. Dessa punkter äro sammanbundna med vinkelspetsen G. De med 150, 200, 400... utmärkta linierna hafva uppkommit genom sammanbindning af G med punkter belägna på förlängningen af AB på afståndet 150, 200, 400,... från A. Det är tydligt att denne abacus bör vara öfverfull med linier för att kunna beteckna alla möjliga hela och brutna tal. Vi hafva endast upptagit ett ringa antal linier för att ej göra figuren oredig. Den med AB lika stora linealen CD är uppdelad i delar, hvilka äro lika stora med delarne på AB. På denna lineal finnes ett stift E, som kan flyttas från venster till höger och tvärtom.

Förmedelst denna enkla räknemaskin kan man verkställa de i vanlig räkning förekommande operationer utan svårighet. Vi öfvergå till några exempel, men anvisa endast vid de enkla räknesätten, huru Bures abacus skall användas, alldenstund det faller af sig sjelft, huru han skall begagnas vid de öfriga räknesätten, hvilka äro sammansatta af de enkla.

Ex. 1. Hvad utgöra 10 och 30 tillsammans?

Man ställer stiftet E på punkten 10 af linealen, flyttar derefter stiftet på linealen 30 enheter till höger. Punkten 40, på hvilken stiftet stadnar, gifver det sökta svaret.

Ex. 2. Hvad utgöra 60 och 90 tillsammans?

Som linealens längd ej är tillräcklig för att direkt finna denna summa, skaffar man sig enheter af en mindre storlek genom att flytta ned linealen, tills t. ex. punkten 6 på densamma faller in på den med 60 markerade linien af abacus, ställer stiftet E på punkten 6 (hvilken numera heter 60), flyttar det sedan till höger 90 af de nya enheterna framåt. Den med talet 150 utmärkta linien, på hvilken stiftet stadnar, lemnar svaret. Linealen tänkes nämnligen nu delad i lika många delar, som det faller linier på honom.

Ex. 3. En person gaf en annan 9 joakimstaler (»joachimicos»), vidare 6; den andre lemnade tillbaka först $5\frac{1}{2}$ och sedan $2\frac{1}{4}$; den förre gaf åter 11, derpå 4, sedan 13, men fick tillbaka först 8, sedan $9\frac{1}{4}$ och slutligen 6. Huru mycket hade den förre att fordra af den senare?

Genom stiftets flyttande till höger och venster i den ordning, i hvilken additionerna och subtraktionerna äro framställda, finner man svaret 12.

Vi hoppas, att användningen af vår abacus vid *addition* och *subtraktion* härigenom blifvit tydlig. Som *multiplikation* ej är annat än en upprepad addition och *division* kan anses som en upprepad *subtraktion*, möta dessa räknesätt inga svårigheter.

Ex. 4. Till 2 täcken åtgå 20 alnar tyg, huru mycket tyg erfordras för 9 dylika täcken?

Man flyttar linealen, tills punkten 2 på densamma infaller med linien 20; linien 90, på hvilken punkten 9 då inträffar, lemnar svaret. Sanningen häraf inses af trianglarnes $G-2-9$ och $G-20-90$ likformighet.

Såsom exempel på *omvänd regula de tri* har Bure bland andra följande:

Ex. 5. 21 studerande afskrifva gemensamt Homeri iliad på 49 dagar. Huru många dagar behöfva 14 studerande för att göra detsamma?

Sammansatt regula de tri uträknar Bure liksom Clavius genom att sönderdela frågan i flera enkla regula de tri frågor. Vi anföra endast följande tvenne exempel, af hvilka det ena bär en pregel af tidens intolerans mot i religionsfrågor olika tänkande.

Ex. 6. En person ingick aftal med en jude om ett lån af 54 gyllen mot villkor att juden skulle om tre år återfå lånet jemnte en årlig ränta på ränta efter $\frac{1}{9}$ af kapitalets storlek vid hvarje års början. Huru många gyllen skulle denne person efter de tre årens förlopp betala åt juden?

Bure löser det på sin abacus genom att efter hvarandra besvara de tre frågorna:

Då 9 gyllen gifva 10, hvad gifva 54? Svar: 60.

Då 54 gifva 60, hvad gifva 60? Svar: $66\frac{2}{3}$.

Då 60 gifva $66\frac{2}{3}$, hvad gifva $66\frac{2}{3}$? Svar: $74\frac{2}{27}$ gyllen.

Anm. Som vi se, begagnas ännu ej uttrycket *procent.*

Ex. 7. Det öfre röret af en reservoir fyller ett kar på 4 timmar, det andra tömmer detsamma på 12 timmar. På huru många timmar fylles karet, då begge rören samsamtidigt äro öppna?

Genom passande sönderdelning af frågan kan man på Bures abacus finna svaret: 3 timmar.

Såsom exempel på *bolagsräkning* upptaga vi följande:

Ex. 8. Tre personer ingå ett bolag att i ett spel dela vinst eller förlust i förhållande till insatsen, så att, i händelse af vinst, den som insatt mer, skall vinna i samma förhållande mer, men i händelse af förlust förlora i samma förhållande mer. En af dem skall sköta tärningarne. Den förste insätter 35 joakimstaler, den andre 21, den tredje

14. Den som åtagit sig att sköta tärningarne, spelar olyckligt. Förbittrad öfver förlusten sporras han till försök att återvinna penningarne, lånar derföre af någon 100 joakimstaler, men spelar äfven nu olyckligt. Huru mycket af denna sista förlust kommer på hvar och en af de tre bolagsmännen?

Bures abacus lemnar svaren: 50, 30 och 20 joakimstaler.

På *alligationsräkning* förekommer bland andra exempel det om Hieros krona. Vi framställa dock här ett annat, vid hvilket man kan göra flera kombinationer.

Ex. 9. Man vill blanda 4 slag af vin. Ett mått af det första kostar 21 penningar, af det andra 27 penningar, af det tredje 30, af det fjerde 40 penningar. Man vill hafva inalles 60 mått så blandade, att efter blandningen hvarje mått kostar 33 penningar. Frågas: huru många mått böra tagas af hvarje slag?

Liksom Ramus och Clavius löser Bure problemet genom att kombinera två och två slag enligt följande schema, hvars förklaring vi visat under Clavius.

				Skilnader från medelpriset.
Priset på ett mått af n:o	1	är	21	7
. . . .	2	»	27	7
. . . .	3	»	30	7
Medelpriset är 33.				
Priset på ett mått af n:o	4	är	40	12 . 6 . 3.
			Summa skilnader	42.

Hvarje af de tre första prisen är kombinerad med det fjerde priset.

Antalet af mått, som skall tagas af hvar och en af de tre första, erhålles genom att besvara frågan:

Då 42 gifver 60, hvad gifver 7? Svar 10 mått.

Antalet mått af n:o 4 finnes genom besvarandet af frågan:

Då 42 gifver 60, hvad gifver 21? Svar 30 mått.

Bland exempel, hvilka hos Clavius skulle lösas genom *regula falsi*, förekomma följande:

Ex. 10. Tvenne löpare begifva sig från Lyon till Venedig. Den förste tillryggalägger dagligen 21 tusen steg, den andre 35 tusen steg. Den långsammare får fyra dagars försprång; när upphinnes han af den snabbare?

Ex. 11. »Jag Pallas är guldsmidd, men guldet är en skänk af unga skalder. Hälften af guldet har Charisius lemnat, Thespis åttondelen, Solon tiondedelen, Themison tjugondedelen, men de öfriga nio talenterna har Aristodicus gifvit mig. Hvad kostar min rustning?»

Ex. 12. Augeam interrogavit etc. Se Ramus.

På *aritmetiska och geometriska serier* anföra vi följande tvenne exempel:

Ex. 13. Efter en stads plundring delar hufvudanföraren bytet emellan anförarne för de 40 legionerna på det sätt, att den som sist hade bestigit muren, skulle få 90 gyllen, den som näst förut hade bestigit skulle erhålla 110, den näst föregående 130 o. s. v. Huru många gyllen skulle den 40:de anföraren hafva, hvilken först besteg muren?

Ex. 14. Enligt den saxiska lagen (1:a boken art. 54) skall en bonde på en bestämd dag betala skatten till sin herre, vid straff af skattens oupphörliga fördubblande för hvarje följande dag, som skatten uteblifver. En hårdnackad bonde uppskjuter skattens betalning i nio dagar. Domaren dömer honom enligt lagens stränghet att betala för första dagen ett mått (»modium»), andra två, tredje fyra o. s. v. Huru många mått skall han inalles betala?

Vi hafva redan förut omtalat, att Bure troget följt Clavius. På flere ställen känner man igen Ramus. *Nollan* kallar han liksom denne för *circulus* *, ett namn, som erinrar på en gång om dess utseende och ursprung, ehuru ej om dess betydelse.

---

* «Circulis sive ut vocant cifris recisis« (sedan nollorna blifvit frånskilda), säger Bure på ett ställe.

Bures abacus synes ej vunnit något större utbredande eller erkännande, enär ingen senare svensk författare mig veterligen omnämner densamma. I stilens behag och i sträng behandling af sitt ämne står Bure långt framför de fleste af hans efterföljare.

2. Johannes Bothvidi*.

Den aritmetik, hvilken denne kyrkans apostel under sin andra utländska resa utgifvit, utgöres endast af en ny upplaga af Buscheri lärobok. Enligt Hammarskölds i Stockholm år 1817 utgifna »Förteckning på de i Sverige från äldre till närvarande tider utkomne schole- och undervisningsböcker» är dess titel följande: *Arithmeticæ vulgaris libri duo, primum ab Heizone Buschero breviter collecti, nunc vero auctiores editi, studio et opera Johannis Bothvidi, Rostochii 1613.* 8:o.

* Ur biografiskt lexikon hemta vi följande.

Bothvidi föddes 1575 i Norrköping och dog 1635 såsom biskop i Linköping. Fadren Bothvid Hansson var stadsskrifvare. Bothvidi undervisades i Linköpings och Stockholms skolor ända till 1599, då han begaf sig till Upsala akademi. Gjorde 1603 sin första resa till Tyskland. Prestvigdes 1604, företog omedelbart derefter sin andra utländska resa, under hvilken han besökte många orter i Tyskland och dessutom Holland, England och på hemvägen Danmark. Hemkommen 1616 till Sverige blef han antagen till hofpredikant hos Gustaf Adolf. Promoverades 1617 till teologie doktor, trädde 1618 i äktenskap med Katarina Nilsdotter, hvars andre man blef den olycklige Arnold Joh. Messenius. Bothvidi var tillika Gustaf Adolfs konfessionarie och derjemnte hans konsistorialråd, åtföljde konungen på hans många krigståg i Lifland, Kurland, Preussen och Tyskland. Under slaget vid Kleve stod Bothvidi jemte andra krigsprester på ett berg och anropade Gud om seger med utsträckta händer. Aftonen efter slaget sade konungen till honom: «herr doktor! det hafver icke varit svårt för oss att strida i dag, emedan Moses stod på berget och stridde med bönen.« År 1630 begärdes Bothvidi till biskop af Linköpings stift, men hans biskopliga verksamhet afbröts året derpå, då han måste till Tyskland beledsaga drottning Maria Eleonora. År 1632 fick han förordnande att i Sachsen oga anstalter till evangeliska religionens bästa och att i Magdeburg och

Som jag ej lyckats få se detta arbete, redogör jag i stället för en äldre af Buscherus sjelf utgifven upplaga * med titeln: *Arithmeticæ logica methodo in usum scholarum trivialium succinctæ conscriptæ libri duo. Auctore M. Heizone Buschero* **, *Scholæ Hannoverensis Rectore.* Editio tertia 1601. Witebergæ. 56 sidd.

I företalet, dateradt år 1590 ***, tackar Buscherus Gud, derföre att han frambragt en man sådan som Ramus, hvilken genom lättfattliga definitioner och indelningar infört reda och klarhet i det koas, hvari matematiken förut var. Ramus skall för detta prisas genom sekler, tillägger han. Denna sin beundran för Ramus visar Buscherus öfverallt i sitt arbete. Han har nämnligen följt honom nästan stycke för stycke. Sjelfva nummerexemplen äro Rami. Skiljaktigheterna, hvilka till större delen bestå i ute-

---

Minden upprätta konsistorier. Samma år i Augusti tillträdde han sitt biskopsstift i Linköping, der han utmärkte sin styrelse genom att anskaffa skickliga och lärda prestmän och genom den omsorg han drog för skolors och hospitalers välfärd. Han dog 1635 efter att hafva fått slag under det han satt i konsistorium. Hans söner Samuel och Noe adlades af drottning Kristina 1650 och erhöllo tillnamnet Örn med hänseende till fadrens apostoliska namn och det detta tillhöriga attribut.

Skrifter. Liber de radii structura et usu.

Arithmeticæ vulgaris libri duo. Rostochii 1613.

Dessutom har Bothvidi utgifvit en mängd religiösa skrifter, bland hvilka vi endast nämna tvenne:

1. Psalmen 39 i gamla svenska psalmboken.
2. Utrum Moscovitæ sunt Christiani? Holmiæ 1621.

* Denna bok har jag till låns erhållit från Skara elementarläroverks bibliotek. Jag begagnar här tillfället att tacka nyssnämnde biblioteks föreståndare, herr magister Torin, för den stora tjenst, han härigenom gjort mig.

** Utom detta arbete har Buscherus utgifvit: Exercitationes contra J. Piscator et Rdph. Goclenium. P. I—III. Frf. 1612. O.

*** Siffran näst framför nollan i årtalet är ej läslig, kan möjligen vara en 8. I denna händelse kan Buscherus ej ha någon kunskap om Clavii aritmetik, hvilken utkom först år 1583. Rami aritmetik utgafs år 1555.

slutningar, äro ej stora. Division i bråk uträknar han medelst att göra bråken liknämniga och derefter dividera den ene täljaren med den andre. Ex. $\frac{4}{5}$ divideradt med $\frac{2}{3}$ eller $\frac{12}{15}$ divideradt med $\frac{10}{15}$ gifver qvoten $\frac{12}{10}$ eler $1\frac{1}{5}$. På några ställen erinrar han om Clavius. Så t. ex. har han Clavii lätta metod att finna produkten af tvenne mellan 4 och 10 liggande hela tal.

Vid bolagsräkning har han följande exempel, hvilket sedermera förekommer i flere af våra svenska räkneböcker.

»Kort före sin död bestämde Titius genom testamente, att hans hafvande hustru skulle, om hon födde en dotter, af hans efterlemnade 3600 gyllen bekomma $\frac{2}{3}$ och dottern $\frac{1}{3}$; men om hon födde en gosse, skulle hon få blott $\frac{1}{3}$ och sonen $\frac{2}{3}$. Nu fick hon tvillingar, en gosse och en flicka. Frågas: huru stor andel af arfvet får hvar och en?»

Geometriska serier summerar han utan förklaring enligt den numera vanliga formeln

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

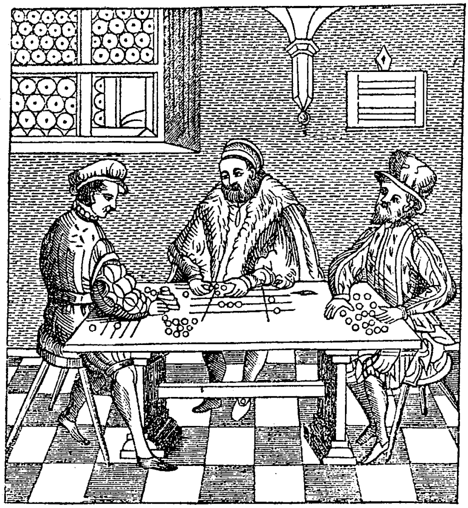
Härpå har han blott ett enda exempel, nämnligen:

»En man säljer sin stridshäst, som på sina fötter hade 24 söm på det villkor, att han skulle få för det första sömmet 2 penningar, för det andra 4, för det tredje 8 o. s. v. Huru mycket kostade hästen?»

I ordning följer att redogöra för Aurelii aritmetik. Hans lärobok är den första svenska, der vi påträffat räkning medelst räknepenningar. I utländska räkneböcker hafva vi påträffat detta slag af räkning 100 år tidigare (1514). Trogne vår grundsats att behandla hvarje kapitel enligt den författare, der vi först finna det framstäldt, skola vi meddela läran om räknepenningar enligt Silicei aritmetik.

Räkning med räknepenningar
enligt
Johannes Martinus Siliceo *.

I spetsen för detta kapitel ställa vi bifogade karakteristiska och upplysande teckning **. Man ser här tre förnäma



män vid ett bord eller en s. k. räknebänk sysselsatta att räkna medelst räknepenningar. Penningarne läggas på och

* Ur Jöcher's Allgemeinen Gelehrten Lexicon, Leipzig 1750, hemta vi om denne man följande biografiska underrättelser.

Johannes Martinus Siliceo eller du Bois, eljest Guiso eller Guijeno kallad, föddes 1477 i Villagarcia i Castilien. Han var en fattig bondson och måste med bekymmer hjelpa sig fram. Han införde filosofien i Sevilla, begaf sig derifrån till Rom, blef sedan professor i filosofi i Salamanca, teolog i Coria och Philippi samt prins Karl V:s informator och allmoseskötare. Slutligen blef han kardinal och erkebiskop i Toledo. Utom sin aritmetik har han utgifvit ett arbete öfver några böcker i Aristoteles. Dessutom har han öfversatt ett verk af engelsmannen Svisset, hvilket han kallat Calculatio. Han dog 1557 i det 80:de året.

** Denna figur är afritad efter en vignett på titelbladet af R. Gemma's förträffliga aritmetik: Aritmeticæ practicæ methodus facilis per emellan enkom derför dragna linier. På väggen hänger en linierad räknetafla. Personerna äro klädda i pösbyxor och pösärmar samt bära hermelinmantlar. Golfvet är rutigt. I taket hänger en praktfull krona. Fönstret är sammansatt af en mängd linsformiga glas *. Allt antyder personer af en hög, kanske furstlig rang.

Silicei räknebok har till titel: Ars arithmetica Ioannis Martini Silicei; in theoricem ** et praxim scissa, in Beluacorum *** palestra composita anno domini 1514.

Af inledningen synes, att räkning medelst räknepenningar måste vara urgammal. Enligt Siliceo omtalar nämnligen biskop Isidorus Hispalensis i den tredje boken af sin etymologia, att *numerus* (tal) har sitt namn af *nummus* (penning), en måhända något vågad gissning, men som dock bevisar räknepenningarnes ålder. »Konsten att räkna med räknepenningar är nyttig för alla dem, hvilka ej för-

---

Gemmam Friesium, medicum ac mathematicum, Vitebergæ 1593. Boken, hvilken vi godhetsfullt till låns erhållit från Skara elementarverks bibliotek genom dess bibliotekarie Torin, synes hafva begagnats såsom lärobok i Sverige.

Gemma, nederländsk läkare och matematiker, föddes i Friesland och dog i Löwen 1555, der han sedan år 1541 var medicine professor. Glansen af hans läror ådrog honom Karl V:s uppmärksamhet. Han har skrifvit många arbeten.

Gemma har i sin aritmetik för öfrigt ej ett ord om räknepenningar. Ofvanstående figur, som ej finnes i de 2:ne äldre på Stockholms k. bibliotek befintlige upplagorna, är, såsom vi sedermera funnit, tagen ur Hilderici i Wittenberg år 1568 utgifna aritmetik, der den också förekommer såsom vignett på titelbladet.

Anm. Hildericus von Varel, en lutersk teolog, f. 1533 i Jevern, dog 1599 i Altorf efter många vexlande öden. Han var bland annat matheseos prof. i Jena 1564—1567.

* Dessas medelpunkter äro i figuren utmärkta med prickar.

** Den teoretiska delen är full af skolastiska spetsfundigheter angående talens natur.

*** Beauvais.

† S. Isidorus Hispalensis, uppkallad af sitt biskopsdöme i Sevilla, spanior, dog år 636. Han har bland annat utgifvit Originum seu etymologiarum libri viginti.

stå betydelsen af siffror, såsom fallet är med flertalet handlande, snickare, krögare och andra personer i ringa vilkor», säger Siliceo.

Vi öfvergå till sjelfva redogörelsen för räkning medelst räknepenningar.

Såsom figuren antyder, drager man på ett bord, en bänk, en tafla eller ett papper flere sins emellan parallela linier, ofta grupperade så, att tre linier höra till hvarje grupp. Den nedersta linien kalla vi den första linien, linien deröfver benämna vi den andra, linien deröfver den tredje o. s. v. Mellanrummet mellan första och andra linien kalla vi första mellanrummet, mellanrummet mellan andra och tredje linien benämna vi andra mellanrummet o. s. v. Då en penning ligger på första linien, gäller han för en enhet; då han ligger på den andra, betecknar han ett tiotal; ligger han på den tredje linien, utmärker han ett hundratal o. s. v. En penning i första mellanrummet gäller lika mycket som fem enheter, en i andra mellanrummet gäller 5 tiotal, en i tredje mellanrummet utmärker 5 hundratal o. s. v. I allmänhet gäller en penning på en linie $\frac{1}{5}$ af värdet på en penning i mellanrummet ofvan linien. En penning i ett mellanrum åter är lika med hälften af en penning på linien strax der ofvan. På en linie får ej förekomma mer än fyra penningar, och i ett mellanrum aldrig mer än en enda penning. Enligt detta skrifver man 1358 ducati sålunda (fig. 1), och 374 ducati 17 duodeni så som fig. 2 visar.

Fig. 1.

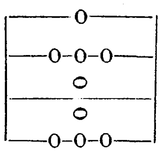
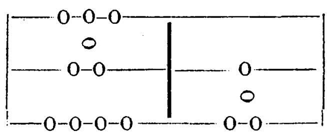
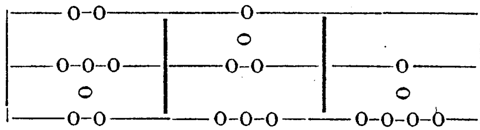


Fig. 2.



Huru 237 ducati 173 franci 19 duodeni skrifves, derom se fig. 3.

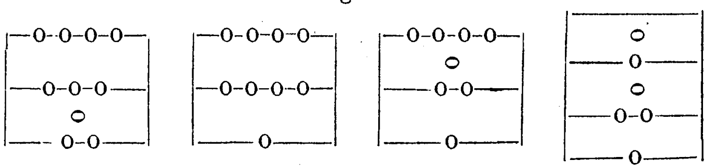
Fig. 3.



Vid *addition* börjar man med enheterna.

Ex. 1. Man vill till 437 ducati lägga 234 ducati. Man erhåller till summa 671 enligt en räkning, hvars gång vi hoppas skall blifva tydlig af fig. 4, der man efter hvarandra finner talen 437, 441, 471 och 671.

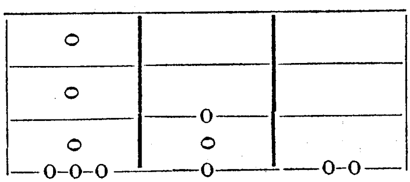
Fig. 4.



Ex. 2. Man vill addera 323 franci 19 duodeni 19 turoni
till 234 franci 15 duodeni 7 turoni.

Genom att börja med turoni och ihågkommande att 1 duodenus är 12 turoni, samt att 1 francus är 20 duodeni finner man summan (se fig. 5) vara 558 franci 16 duodeni 2 turoni.

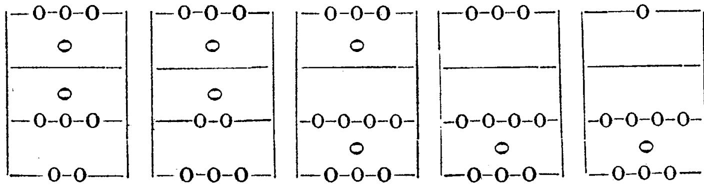
Fig. 5.



Subtraktion. Man vill från 3582 subtrahera 2534.

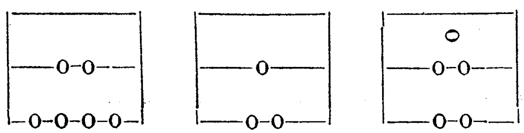
Gången af räkningen synes af fig. 6, der man efter hvarandra finner talen 3582, 3578, 3548, 3048, 1048.

Fig. 6.



Multiplikation. Ex. 1. Man vill multiplicera 24 med 3. Man säger: 3 gånger 4 är 12, vidare 3 gånger 20 är 60. Summan af 12 och 60 gifver den sökta produkten 72. Gången af räkningen synes af fig. 7, der man efter hvarandra finner talen 24, 12, 72.

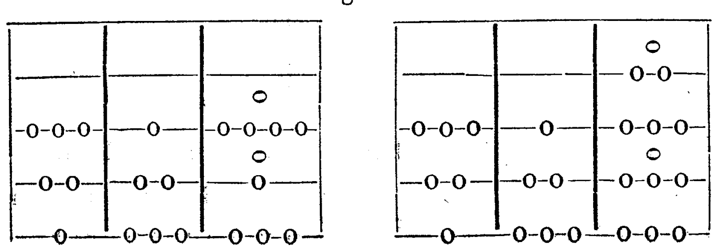
Fig. 7.

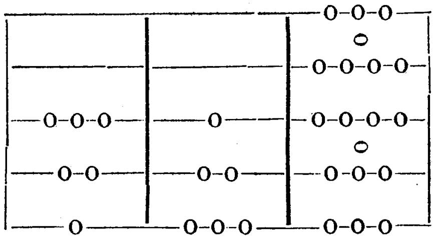


Ex. 2. Man vill multiplicera 321 med 123.

Man söker först 3 gånger 321 eller 963, adderar derefter till 963 20 gånger 321, hvaraf man finner 7383. Härtill adderar man 100 gånger 321, hvaraf slutligen erhålles 39483. Se närmare fig. 8, der man efter hvarandra finner talen (321, 123, 963), (321, 123, 7383) och (321, 123, 39483). Som man ser, förblifva multiplikanden och multiplikatorn oförändradt qvarstående under räkningen.

Fig. 8.

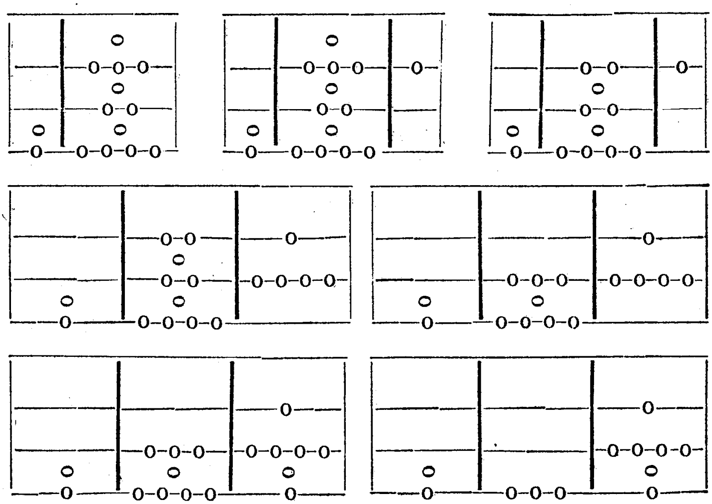




Division. Ex. 1. Man vill dividera 879 med 6.

Förfaringssättet synes af fig. 9, der man efter hvarandra finner talen (6, 879), (6, 879, 100), (6, 279, 100), (6, 279, 140), (6, 39, 140), (6, 39, 146), (6, 3, 146). Som man ser, står divisorn oförändrad under räkningen.

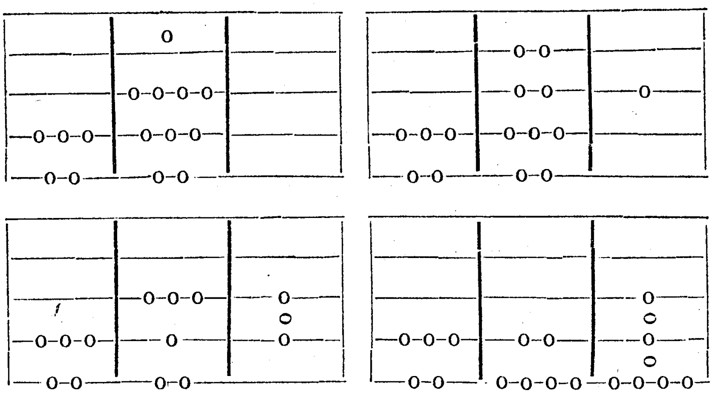
Fig. 9.



Qvoten blir 146 med resten 3.

Ex. 2. Man vill dividera 5432 med 32. Förfaringssättet visar sig af fig. 10, hvarest man efter hvarandra finner talen (32, 5432). (32, 2232, 100), (32, 312, 160), (32, 24, 169).

Fig. 10.



Qvoten blir 169 med 24 till rest.

Vid räkning med räknepenningar kan man antingen lägga penningarne i en stapel på hvarandra, hvilket Siliceo gör, ehuru vi ej angifvit detta i figurerna, eller bredvid hvarandra. För att lättare utmärka de linier, som beteckna tusental, milliontal, tiotusenmilliontal o. s. v. bruka Aurelius och hans efterföljare sätta ett kors på dessa linier.

Härmed anse vi oss ha tillräckligt redogjort för läran om räknepenningar.

(Forts.)

Satserna 4, 5 och 8 (F. W. Hultman),

lösta af E. M. Frykberg,
elev vid Teknologiska Institutet.

4. Sätter man y = den delen af sidan a, som ligger intill b och z = det stycket af a, som ligger mellan skärningspunkten och den mot sidan a fälda höjden, samt bissektricerna w_a, w_b, w_c, så fås lätt

$$y : a - y = b : c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$b^2 = w_a^2 + y^2 + 2yz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$c^2 = w_a^2 + (a-y)^2 - 2(a-y)z \quad \ldots\ldots (3).$$

Medelst (1) kan man eliminera y ur (2) och (3), hvarefter z lätt bortskaffas, och man finner

$$w_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

På samma sätt fås

$$w_b = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)}}{a+c},$$

$$w_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

5. Bibehållas samma beteckningar, som i det föregående, under iakttagande att de obekanta äro punkterade samt att y betyder hela den förlängda sidan a, så fås lätt

$$y : y - a = b : c,$$
$$b^2 = w_a'^2 + y^2 - 2yz,$$
$$c^2 = w_a'^2 + (y-a)^2 - 2(y-a)z.$$

Man finner

$$w'_a = \frac{\sqrt{bc(a+b-c)(a+c-b)}}{b-c},$$

$$w'_b = \frac{\sqrt{ac(b+c-a)(a+b-c)}}{c-a},$$

$$w'_c = \frac{\sqrt{ab(a+c-b)(b+c-a)}}{a-b}.$$

Vore två af sidorna lika stora, så synes af formlerna, att bissektricen, som skulle falla på den tredje sidan blir oändlig d. v. s. parallel med denna sida.

Sättas de mot sidorna a, b, c stående vinklar $= A$, B, C, triangelns yta $= T$, samt

$$a + b + c = 2p,$$

erhålles ur föregående båda system af formler följande enkla samband mellan w_c och w'_c:

$$w_c \,.\, w'_c = \frac{4abT}{a^2-b^2}$$

och

$$\frac{w_c}{w'_c} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

eller, enligt kända trigonometriska formler,

$$\frac{w_c}{w'_c} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{Cot} \frac{C}{2} = \operatorname{Tg} \frac{A-B}{2}$$

$$\therefore \frac{w_c}{w'_c} = \operatorname{Tg} \frac{A-B}{2},$$

en egenskap, som lätt visas rent geometriskt.

8. α) Låt y beteckna den delen af a, som ligger mellan tangeringspunkten och sidan c, z det stycket, som ligger mellan tangeringspunkten och den på a fälda höjden, t_a, t_b och t_c de sökta linierna, så fås

$$b-(a-y) = c-y,$$
$$b^2 = t_a^2 + (a-y)^2 + 2(a-y)z,$$
$$c^2 = t_a^2 + y^2 - 2yz.$$

Genom eliminering af y och z finner man

$$t_a = \sqrt{\frac{b^2(p-b)+c^2(p-c)}{a} - (p-b)(p-c)},$$

$$t_b = \sqrt{\frac{c^2(p-c)+a^2(p-a)}{b} - (p-c)(p-a)},$$

$$t_c = \sqrt{\frac{a^2(p-a)+b^2(p-b)}{c} - (p-a)(p-b)}.$$

β) Låt t'_a, t'_b, t'_c vara de tre sökta linierna, hvilka sammanbinda triangelns spetsar med tangeringspunkterna till den utanför sidan c inskrifna cirkeln. Genom ett förfarande analogt med det föregående finner man:

$$t'_a = \sqrt{p(p-a) - \frac{b^2(p-a)-c^2p}{a}},$$

$$t'_b = \sqrt{p(p-b) - \frac{a^2(p-b)-c^2p}{b}},$$

$$t'_c = \sqrt{\frac{a^2(p-b)+b^2(p-a)}{c} - (p-a)(p-b)}.$$

Ur dessa och föregående formler finner man följande begge rätt enkla samband:

$$t'^2_c - t^2_c = \frac{(a-b)^2(a+b)}{c}$$

och

$$at'^2_b - bt'^2_a = (a-b)(p-a)(p-b).$$

Sats 52 (C. F. Lindman), löst af Knut Wicksell.

Låt $ABCD$ vara ett trapezium, hvars sidor äro skurna i samma proportion i punkterna E, F, G, H, så att $AE:EB = FC:BF = CG:GD = AH:HD$. Det är då klart att $EF // AC // HG$ och $EH // BD // FG$, samt att således E, F, G och H äro spetsar i en parallelogram. Vi öfvergå derföre till den senare delen af beviset. Låt M vara midtpunkten på AC och N midtpunkten på BD och sammanbind M och N. Drag FH och låt den skära MN i O. Det bör nu bevisas att $FO = OH$, i hvilket fall tydligen den andra diagonalen EG i parall. $EFGH$ äfven går genom O, samt att $MO:ON = AH:HD$.

Sammanbind F med MON samt drag ut FM till I och FN till K, så att $FM = MI$ och $FN = NK$, sammanbind I med A och H samt K med D och H.

Emedan nu $AM = MC$ (Hyp.) och $IM = MF$ (Kon.), så är tydligen $AI //$ och $= FC$; på samma sätt bevisas att $KD //$ och $= BF$. Emedan då $AI = FC$ och $KD = BF$, så är $AI:KD = CF:FB = AH:HD$. Och emedan $AI // BC // KD$, så är $\wedge HAI = \wedge HDK$. Trianglarna

AIH och DKH äro följaktligen likformiga $\therefore \wedge IHA = \wedge KHA$, IHK är således en rät linie.

Enär nu $FM = MI$ och $FN = NK$, så är $IK // MN \therefore FO = OH$, hvilket var det ena s. s. b.

Vidare är af samma skäl $IH : MO = HF : OF = HK : ON$. Följ. är $MO : ON = IH : HK = AH : HD$, hvilket var det andra s. s. b.

Sats 55 (C. F. Lindman), löst af S. B. S. Cavallin, elev vid Östersunds högre elem.-läroverk.

Vi vilja först behandla *den senare händelsen.*

Om n är ett helt tal hvilket som helst, så är $2n$ ett jemnt tal och sålunda $2^{2n} - 1$ ett uttryck, som, uppdeladt i faktorer, bör få en sådan lika med 3.

Detta uttryck kan sättas $(2^n)^2 - 1^2 = (2^n + 1)(2^n - 1)$, i hvilken produkt faktorn 2^n fattas för att den må utgöras af 3 konsekutiva hela tal; men i en produkt af 3 konsekutiva hela tal har ovillkorligen en af faktorerna sjelf en faktor 3. Deraf följer att $(2^{2n} + 1)(2^{2n} - 1)$ har en faktor 3, emedan 2^{2n}, som fattas, endast innehåller faktorn 2.

Förra händelsen.

$2^{2n+1} + 1$ är det uttryck, som skall bevisas hafva 3 till faktor. Detta uttryck kan sättes $2 \cdot 2^{2n} - 2 + 3 = 2(2^{2n} - 1) + 3$, men $2^{2n} - 1$ är nyss bevisadt hafva en faktor 3, derföre har äfven $2^{2n+1} + 1$ en faktor 3.

AFDELNING II.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. Dillner.

(Forts. fr. sid. 132).

B) **Reduktion till ny enhet**

med bibehållande af samma origo och grundrigtning.

23. Om modylen af komplexen r_θ tecknas $1 . r$, d. v. s. enhetslängden 1 tagen r gånger, så inses på grund af enhetens arbiträra natur, att man i stället för 1 kan införa en längd betecknad med talet s, då *produkten* $s . r$ utmärker, att längden s är tagen r gånger eller *multiplicerad* med talet r. Genom denna *aritmetiska multiplikation*, här kallad *reduktion till ny enhet* eller *enhetsreduktion*, antager komplexen formen

$$(s . r)_\theta \quad \text{eller enklare} \quad sr_\theta ,$$

då vi säga, *att komplexen r_θ blifvit reducerad till ny enhet förmedelst talet s.*

Anm. Enär faktorernas ordning i en produkt är likgiltig, så kan sr_θ under alla omständigheter ersättas af rs_θ.

24. Vi antaga vägarne OP och OBP (fig. 26), hänförda till OA som grundrigtning, representeras af likheten (1) eller

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha .$$

Genom en enkel konstruktion inses, att vägen $2r_\theta$ fixerar samma punkt som vägen $2b_\beta + 2a_\alpha$ och i allmänhet att vägen pr_θ fixerar samma punkt som vägen $pb_\beta + pa_\alpha$, då p är ett helt tal. Likaledes inses, då q är ett helt tal, att vägen $\frac{1}{q}r_\theta$ fixerar samma punkt som vägen $\frac{1}{q}b_\beta + \frac{1}{q}a_\alpha$, då följaktligen vägen $\frac{p}{q}r_\theta$ fixerar samma punkt som vä- $\frac{p}{q}b_\beta + \frac{p}{q}a_\alpha$. Enär slutligen hvarje irrationelt tal kan fås att ligga mellan gränserna $\frac{p+1}{q}$ och $\frac{p}{q}$ och dessa gränser kunna bringas hvarandra huru nära som helst, så följer, att likheten

$$sr_\theta = sb_\beta + sa_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

representerad af vägarne OP' och $OB'P'$, är sann för alla möjliga rationella och irrationella värden på talet s.

Detta bevis kan äfven formuleras sålunda: enär $sb : sa = b : a$ och den mellan sb och sa samt mellan b och a liggande vinkeln är lika, så måste den mot sb och sa svarande tredje sidan i triangeln vara sr, bildande vinkeln θ med grundrigtningen (Eukl. VI: 6), då följaktligen vägen sr_θ fixerar samma punkt som vägen $sb_\beta + sa_\alpha$.

Likheten (8) säges nu vara härledd ur likheten (1) genom tillämpning af satsen: *man eger rättighet att »multiplicera lika med samma tal.»*

Satsen utsträckes med lätthet till likheter, hvilkas sidor eller membra utgöres af huru många termer som helst.

Anm. Det här utförda beviset bestyrker nu rigtigheten af den i § 12 uttalade grundsatsen, så vidt den beträffar reduktion till ny enhet.

25. Om vi i (8) införa $b_\beta + a_\alpha$ i stället för r_θ, hvilka uttryck på grund af parentesens betydelse (jfr § 20, anm.) äro att betrakta såsom fullt identiska, så erhålles

$$s(b_\beta + a_\alpha) = sb_\beta + sa_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

hvilken sats utsäges: »*då en summa multipliceras med ett tal, så multipliceras hvar och en af summanderna med talet och resultaten adderas;*» och omvändt: »*då alla termerna i en summa äro multiplicerade med samma tal, så sättes talet som faktor till termernas summa.*»

Satsen gäller i enlighet med föregående § för summor af huru många termer som helst.

26. Den i § 20 framstälda likheten kan nu sättas under formen

$$r_\theta = r(\text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta_{\frac{1}{2}\pi}) = r\,\text{Cos}\,\theta + r\,\text{Sin}\,\theta_{\frac{1}{2}\pi}\,,$$

hvaraf följer (§ 21), då vi enligt § 18 sätta $r_\theta = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{Cos}\,\theta \\ y &= r\,\text{Sin}\,\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

då således $r\,\text{Cos}\,\theta$ *är grundrigtningsprojektionen och* $r\,\text{Sin}\,\theta$ *den vinkelräta projektionen af komplexen* r_θ.

27. Med stöd af föregående § kunna vi nu framställa det i § 22 uttalade projektionsteoremet under följande för detsamma gängse form. Om vi projiciera de två vägarne i likheten

$$l_\lambda = a_\alpha + b_\beta + c_\gamma + \ldots$$

så äro deras projektioner på grundrigtningen lika eller

$$l\,\text{Cos}\,\lambda = a\,\text{Cos}\,\alpha + b\,\text{Cos}\,\beta + c\,\text{Cos}\,\gamma + \ldots$$

äfvensom deras projektioner på den vinkelräta rigtningen lika eller

$$l\,\text{Sin}\,\lambda = a\,\text{Sin}\,\alpha + b\,\text{Sin}\,\beta + c\,\text{Sin}\,\gamma + \ldots$$

Denna sats är tydligen sann, äfven om vi i stället för l_λ tänka oss en summa af huru många termer som helst eller ock noll, i hvilket senare fall den högra sidan af den geometriska likheten representerar en sluten polygon.

C) Reduktion till ny grundrigtning

med bibehållande af samma origo och enhet.

28. Om vi låta komplexen r_θ, fixerande punkten P (fig. 27) i förhållande till O som origo och OA som grundrigtning, hänföras eller, som det här kallas, *reduceras till en ny grundrigtning* OA_1, från hvilken den gamla grundrigtningen be-

stämmes af argumentet σ, så representeras en sådan reduktion till ny grundrigtning af beteckningen

$$1_\sigma . r_\theta,$$

der den geometriska enheten 1_σ, tecknad som faktor till r_θ, kallas *reduktionsenhet till ny grundrigtning.* Då komplexens argument i förhållande till den nya grundrigtningen är $\sigma + \theta$, så framgår deraf följande identitet

$$1_\sigma . r_\theta = r_{\sigma+\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

hvilken sats utsäges: *en komplex r_θ reduceras till ny grundrigtning förmedelst reduktionsenheten 1_σ genom addition af argumenten σ och θ.* — Argumentet σ kallas ock med anledning häraf *reduktionsargument* och kan vara såväl positivt som negativt.

Anm. Enär termernas ordning i en summa är likgiltig, så kan $1_\sigma . r_\theta$ under alla omständigheter ersättas af $1_\theta . r_\sigma$.

29. Vi låta likheten

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha$$

representera de två vägarne OP och OBP (fig. 28), hänförda till O som origo och OA som grundrigtning. Dessa vägar, såsom hänförda eller reducerade till den nya grundrigtningen OA_1, från hvilken den gamla grundrigtningen OA bestämmes af argumentet σ, äro fortfarande lika och blifva, såsom fig. omedelbart visar, $r_{\sigma+\theta}$ och $b_{\sigma+\beta} + a_{\sigma+\alpha}$, då alltså på grund af (11)

$$1_\sigma . r_\theta = 1_\sigma . b_\beta + 1_\sigma . a_\alpha \ldots\ldots\ldots (12).$$

Denna likhet säges nu vara härledd ur den förra genom tillämpning af satsen: *man eger rättighet att multiplicera lika med samma geometriska enhet.*

Satsen gäller tydligen för en likhet af huru många termer som helst på ömse sidor om likhetstecknet.

30. Om vi i likheten (12) ersätta r_θ med det identiska uttrycket $b_\beta + a_\alpha$, så erhålles

$$1_\sigma . (b_\beta + a_\alpha) = 1_\sigma . b_\beta + 1_\sigma . a_\alpha \ldots\ldots (13),$$

hvilken sats utsäges i öfverensstämmelse med (9), då ordet *tal* utbytes mot *geometrisk enhet.* Satsen gäller i öfverensstämmelse med föreg. § för summor af huru många termer som helst.

31. Om den geometriska likheten i § 27 multipliceras med 1_σ, så erhålles

$$l_{\sigma+\lambda} = a_{\sigma+\alpha} + b_{\sigma+\beta} + c_{\sigma+\gamma} + \ldots,$$

hvaraf genom projicering

$$l \operatorname{Cos}(\sigma + \lambda) = a \operatorname{Cos}(\sigma + \alpha) + b \operatorname{Cos}(\sigma + \beta) + c \operatorname{Cos}(\sigma + \gamma) + \ldots$$

$$l \operatorname{Sin}(\sigma + \lambda) = a \operatorname{Sin}(\sigma + \alpha) + b \operatorname{Sin}(\sigma + \beta) + c \operatorname{Sin}(\sigma + \gamma) + \ldots$$

Detta är en utsträckning af projektionsteoremet, som ofta eger användning.

D) Samtidig reduktion till ny enhet och ny grundrigtning.

(Geometrisk multiplikation).

32. Enär $sr_{\sigma+\theta}$ kan betraktas som resultat af såväl $1_\sigma . (sr_\theta)$ som $s . (1_\sigma . r_\theta)$, så följer, att vid reduktion till ny enhet och ny grundrigtning det är likgiltigt, *i hvilken ordning reduktionen verkställes.* Vi sätta derföre

$$s_\sigma . r_\theta = sr_{\sigma+\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

der komplexen s_σ, satt som faktor till komplexen r_θ, utmärker, *att r_θ är samtidigt reducerad till ny enhet och ny grundrigtning och det så, att s utgör reduktionstalet till ny enhet och σ reduktionsargumentet till ny grundrigtning.*

33. Då det är likgiltigt, i hvilken ordning man adderar och multiplicerar tal och således $sr_{\sigma+\theta} = rs_{\theta+\sigma}$, så följer att

$$s_\sigma . r_\theta = r_\theta . s_\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

då alltså *faktorernas ordning i en produkt af komplexer är likgiltig, d. v. s. man erhåller samma resultat, om* s_σ *tages som reduktions qvantitet för* r_θ *eller tvärtom* r_θ *för* s_σ.

Satsen gäller tydligen för en produkt af huru många faktorer som helst.

34. Om vi antaga likheten

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha,$$

så följer genom samtidig reduktion till ny enhet och ny grundrigtning enligt (8) och (12), att äfven likheten

$$s_\sigma . r_\theta = s_\sigma . b_\beta + s_\sigma . a_\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (16)$$

är sann, då denna likhet säges vara härledd ur den förra genom tillämpning af satsen: *man eger rättighet att multiplicera lika med samma komplex.*

Om vägarne i den förra likheten äro OP och OBP, hänförda till OA som grundrigtning (fig. 29), så blifva vägarne i den senare likheten OP_1 och OB_1P_1, hänförda till OA_1, som grundrigtning, då nämnligen

$$\frac{OP_1}{r} = \frac{OB_1}{b} = \frac{B_1P_1}{a} = s \quad \text{och} \quad \wedge A_1OA = \sigma.$$

Satsen gäller i öfverensstämmelse med §§ 24 och 29 för likheter, hvilkas sidor utgöras af huru många termer som helst.

35. Om i (16) r_θ ersättes af det identiska uttrycket $b_\beta + a_\alpha$, så erhålles i enlighet med (9) och (13):

$$s_\sigma . (b_\beta + a_\alpha) = s_\sigma . b_\beta + s_\sigma . a_\alpha \quad \dots\dots \quad (17),$$

hvilken sats utsäges i öfverensstämmelse med (9), då ordet *tal* utbytes mot *komplex.*

36. Om vi sätta

$$s_\sigma = d_\delta + c_\gamma$$

och vi i stället för s_σ taga summan $d_\delta + c_\gamma$ till reduktions-qvantitet för en komplex r_θ, så låter visa sig genom konstruktion, att ett *lika* resultat erhålles.

Ty låt vägen OP (fig. 30), hänförd till O som origo och OA som grundrigtning, betecknas af r_θ; låt vidare vägarne BE och BDE, hänförda till B som origo och BC som grundrigtning, betecknas af s_σ och $d_\delta + c_\gamma$. Konstruera på OP en med $\Delta\, BDE$ likformig $\Delta\, OFP$, så att r och s bli homologa och hafva lika vinkel åt samma sida vid begynnelsepunkten, då följaktligen

$$\frac{r}{s} = \frac{OF}{d} = \frac{FP}{c} \quad \text{eller} \quad OF = \frac{dr}{s} \quad \text{och} \quad FP = \frac{cr}{s}.$$

Linierna OF och FP bilda med OA respektive vinklarne

$$\theta - (\sigma - \delta) \quad \text{och} \quad \theta + (\gamma - \sigma),$$

då alltså

$$r_\theta = \left(\frac{dr}{s}\right)_{\theta+\delta-\sigma} + \left(\frac{cr}{s}\right)_{\theta+\gamma-\sigma},$$

hvilken likhet, multiplicerad med talet s och reducerad till den nya grundrigtningen OA_1 förmedelst argumentet σ, blir

$$s_\sigma \,.\, r_\theta = d_\delta \,.\, r_\theta + c_\gamma \,.\, r_\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

då således *ett lika resultat erhålles, om* r_θ *multipliceras med hvar och en af termerna i summan* $d_\delta + c_\gamma$ *och produkterna adderas eller om* r_θ *multipliceras med* s_σ, *då nämligen* $s_\sigma = d_\delta + c_\gamma$.

Satsen gäller tydligen för summor af huru många termer som helst.

37. Om i (18) s_σ ersättes af det identiska uttrycket $d_\delta + c_\gamma$, så fås

$$(d_\delta + c_\gamma) \,.\, r_\theta = d_\delta \,.\, r_\theta + c_\gamma \,.\, r_\theta \quad \ldots\ldots \quad (19),$$

hvilken identitet utsäges: *produkten af en summa och en komplex är identiskt lika med summan af de produkter, som uppkomma, då komplexen multipliceras med hvar och en af summanderna.*

38. Om vi i (17) sätta $s_\sigma = d_\delta + c_\gamma$, så fås med stöd af (19):

$$(d_\delta + c_\gamma)(b_\beta + a_\alpha) = d_\delta \,.\, b_\beta + c_\gamma \,.\, b_\beta + d_\delta \,.\, a_\alpha + c_\gamma \,.\, a_\alpha \,.\,.(20).$$

Satsen gäller i enlighet med föregående vid multiplikation af summor med huru många termer som helst.

Vi kunna genom konstruktion lätteligen öfvertyga oss om rigtigheten af det i (20) gifna multiplikationsresultatet. Vi låta vägarne OP och OBP, hänförda till O som origo och OA som grundrigtning, representeras af likheten

$$r_\theta = b_\beta + a_\alpha .$$

Vidare låta vi vägarne CF och CEF, hänförda till C som origo och CD som grundrigtning, representeras af likheten

$$s_\sigma = d_\delta + c_\gamma .$$

Konstruera på OB en med $\triangle\, CEF$ likformig $\triangle\, OGB$, så att b och s bli homologa och hafva lika vinkel åt samma sida vid begynnelsepunkten; upprita vidare på BP efter samma konstruktion $\triangle\, BHP$. Vi erhålla då

$$\frac{b}{s} = \frac{OG}{d} = \frac{GB}{c} \quad \text{och} \quad \frac{a}{s} = \frac{BH}{d} = \frac{HP}{c}$$

eller

$$OG = \frac{db}{s}, \quad GB = \frac{cb}{s}, \quad BH = \frac{da}{s}, \quad HP = \frac{ca}{s},$$

hvilka fyra linier bilda med grundrigtningen OA respektive vinklarne

$$\beta - (\sigma - \delta), \quad \beta + (\gamma - \sigma), \quad \alpha - (\sigma - \delta), \quad \alpha + (\gamma - \sigma),$$

då följaktligen

$$r_\theta = \left(\frac{db}{s}\right)_{\beta + \delta - \sigma} + \left(\frac{cb}{s}\right)_{\beta + \gamma - \sigma} + \left(\frac{da}{s}\right)_{\alpha + \delta - \sigma} + \left(\frac{ca}{s}\right)_{\alpha + \gamma - \sigma},$$

hvilken likhet, multiplicerad med talet s och reducerad till den nya grundrigtningen OA_1, förmedelst argumentet σ, blir

$$s_\sigma \,.\, r_\theta = d_\delta \,.\, b_\beta + c_\gamma \,.\, b_\beta + d_\delta \,.\, a_\alpha + c_\gamma \,.\, a_\alpha ,$$

hvilken likhet åter efter utbyte af s_σ och r_θ mot respektive $d_\delta + c_\gamma$ och $b_\beta + a_\alpha$ sammanfaller med (20).

39. De i detta kap. utvecklade räknelagar för de geometriska qvantiteterna äro till formen helt och hållet sammanfallande med de räknelagar inom algebran, hvarur den algebraiska kalkylen leder sin utveckling. Således hafva vi funnit, att den geometriska likheten låter behandla sig efter samma reglor som den algebraiska, att de geometriska multiplikationsreglorna för binomer och polynomer äro desamma som de algebraiska; och liksom den algebraiska kalkylen leder sin utveckling ur de grundsatser, som motsvara de här afhandlade räknelagarne, likaså kunna vi ur dessa lagar steg för steg leda utvecklingen af den geometriska kalkylen i full öfverensstämmelse med de algebraiska räkneformlerna. Det är derföre tillåtet och fullt rigtigt, för så vidt som de begge utvecklingarna gå ur formelt lika grundsatser, att i en algebraisk formel införa geometriska komplexer, med den särskilda tolkning naturligtvis, som är öfverensstämmande med dessas natur. Så t. ex. äro de kända multiplikations- och divisionsformler, som inom algebran härledas ur den mot (20) svarande grundsatsen, fullt gällande äfven inom den geometriska kalkylen, såsom lika möjliga att der utveckla; likaså skola vi finna, att de algebraiska eqationerna med sina lagar för upplösning kunna omedelbart förvandlas till geometriska. Å andra sidan, enär den algebraiska qvantiteten utgör det species af den geometriska, som betecknas med $a_{k\pi}$ eller a_o (positiv) och a_π (negativ), så utgör den algebraiska kalkylen blott ett enskildt fall af den geometriska, hvilken senare är till sina förutsättningar helt och hållet oberoende af den förra, då den algebraiska kalkylen (den imaginära) deremot vinner sin fulla förklaring först i och genom den geometriska. Hvarje geometrisk formel öfvergår derföre omedelbart och under alla omständigheter till algebraisk, så snart de förekommande argumenten göras till o eller π eller i allmänhet $k\pi$ (k är ett helt tal eller noll).

Summors modyler och argument.

40. Vi antaga likheten

$$r_\theta = a_\alpha + b_\beta .$$

Enär den led, i hvilken vi räkna våra bågar, är helt och hållet arbiträr, så är likheten

$$r_{-\theta} = a_{-\alpha} + b_{-\beta}$$

på samma gång sann som den förra. Genom att multiplicera dessa två likheter sida med sida erhålles

$$r^2 = a^2 + b^2 + ab(1_{\alpha-\beta} + 1_{-(\alpha-\beta)}) = a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)$$

eller

$$r = [a^2 + b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (21),$$

hvarigenom vi således uttryckt modylen r för en tvåtermig summa $a_\alpha + b_\beta$ i termernas modyler och argument (jfr Eukl. II: 12 & 13). Är $\beta = \alpha + \frac{1}{2}\pi$, erhålles $r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ (jfr Eukl. I: 47). På samma sätt blir modylen r för en tretermig summa $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$:

$$r = [a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) + 2ac\,\mathrm{Cos}(\alpha-\gamma) + 2bc\,\mathrm{Cos}(\beta-\gamma)]^{\frac{1}{2}}.$$

Vi kunna med lätthet utsträcka denna sats till summor af huru många termer som helst.

41. Af likheten $r_\theta = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ följer

$$r\,\mathrm{Cos}\,\theta = x \quad \text{och} \quad r\,\mathrm{Sin}\,\theta = y,$$

hvaraf genom att dividera sida med sida fås

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \quad \text{eller} \quad \theta = \mathrm{artg}\,\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots (22).$$

Vi böra nogsamt lägga märke till, att den qvadrant, hvari θ ligger, bestämmes af tecknen för x och y, såsom man omedelbart finner genom konstruktion.

Således

för x och y begge pos. är θ i första qvadranten,
» x neg. och y pos. är θ i andra qvadranten,
» x och y begge neg. är θ i tredje qvadranten,
» x pos. och y neg. är θ i fjerde qvadranten.

I enlighet med (22) erhålles argumentet för summan $a_\alpha + b_\beta$ genom att projiciera likheten $r_\theta = a_\alpha + b_\beta$. Vi få nämnligen

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a \operatorname{Sin}\alpha + b \operatorname{Sin}\beta}{a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta} \text{ eller } \theta = \operatorname{arctg}\frac{a \operatorname{Sin}\alpha + b \operatorname{Sin}\beta}{a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta} \quad (23).$$

På enahanda sätt finnes argumentet för en summa af huru många termer som helst.

Vi kunna finna ett annat uttryck för argumentet θ i (23) genom att sätta

$$a_\alpha + b_\beta = 1_\beta \,.\, (a_{\alpha-\beta} + b)\,.$$

Men argumentet för summan $a_{\alpha-\beta} + b$ är

$$\operatorname{arctg}\frac{a \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)}{b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\beta)},$$

då alltså

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)}{b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\beta)} + \beta \; . \; . \; . \; . \; . \; (24).$$

(Forts.)

AFDELNING III.

Om Luftpumpar.

Af Rob. Thalén.

Utan anspråk på fullständighet antecknas här följande momenter såsom de vigtigaste med afseende på luftpumpens historia.

Den vanliga luftpumpen.

Såsom bekant är, konstruerades den första luftpumpen af den namnkunnige borgmästaren *Otto von Guericke* i Magdeburg (1650), hvilken förnämligast genom denna sin uppfinning och de med den ifrågavarande apparaten anstälda experimenten förvärfvade sig ett välförtjent rum inom fysikens historia *.

Hans luftpump, som icke egde mer än *en* cylinder, och denna enkelverkande, var i följd af atmosferens tryck mot kolfven i samma mån svårhandterlig, som förtunningen ökades. Visserligen afhjelptes detta fel till en god del redan af *Boyle*, hvilken för att lättare kunna sätta pumpstången i rörelse begagnade tandadt hjul och häfstång, men fullständigt skedde det först genom *Papins* metod att,

* I ett, för sin tid, praktfullt arbete, benämndt: Ottonis de Guericke experimenta nova Magdeburgica de vacuo Spatio, (Amstelodami 1672), har Guericke redogjort för de experiment med luftpumpen, hvilka han inför Kejsaren och de vid riksdagen i Regensburg 1654 församlade furstarne anstälde, hvarvid de Magdeburgska kulorna flitigt användes. Man finner der äfven beskrifningen på den första elektricitetsmaskinen, för hvars uppfinning vi likaledes hafva samma sinnrike man att tacka.

på samma sätt som i den nu brukliga luftpumpen sker, låta *två* pumpar verka skiftevis, hvarigenom atmosferens menliga inverkan eliminerades. Först omkring hundrade år efter Guerickes uppfinning satte en engelsk ingeniör, *Smeaton*, klockan i förening med en barometer, så att man i hvarje ögonblick kunde direkt bestämma, hvilken grad af förtunning åvägabragts. Den vigtigaste förbättring, luftpumpen sedan den tiden undergått, härrör onekligen från ledamoten af Franska Institutet *Babinet*, hvars förändrade konstruktion af den mellan de båda pumpcylindrarne befintliga kranen förminskade inflytandet af det skadliga rum, som alltid uppstår mellan kolfven och cylinderns botten. För att i korthet angifva, hvari denna Babinets förbättring bestod, kan man säga, att han, vid inträdande stor förtunning, lät den ena pumpen pumpa luften ur den andras skadliga rum.

Deleuils pump.

Ända intill senaste tid har det ansetts såsom ett oeftergifligt vilkor, att hvardera pumpkolfven skulle sluta lufttätt till väggarne inom sin cylinder, men *Deleuil*, fabrikant af fysiska instrument i Paris, har nyligen visat, att detta icke behöfver vara förhållandet. Genom att konstruera en pump, hvars kolf löper fullt fri från väggen, har han nämnligen visat, att förtunningen icke desto mindre kan bringas lika långt som eljest.

Kolfven, hvars form är cylindrisk med tre gånger större höjd än diameter, eger på sin bugtiga yta ett stort antal sinsemellan och med bottenkanterna parallela fördjupningar och skiljer sig från cylinderväggen genom ett mellanrum af endast $\frac{1}{50}$ millimeters bredd. Det luftlager, som qvarstadnar i detta mellanrum och i de nämnda fördjupningarna, adhererar starkt vid väggarne och utgör den enda packning, som kolfven verkligen eger. För att visa, huru stor denna adhesion är, lät Deleuil en gång genomborra kolfven och pumpstången på sådant sätt, att nämnde luftlager kom att stå i omedelbar förening med den yttre luften. När pumpen fick arbeta under dessa, såsom det kan synas, rent af orimliga förhållanden, visade det sig likväl, att lufttrycket i klockan kunde nedgå ända till *två* millimeter.

Det besynnerliga faktum, vi nu omnämnt, att nämnligen en dylik pump verkligen kan åstadkomma en betydlig förtunning, eger sin förklaring i den redan omnämnda stora adhesionen mellan luftlagret och kolfven. Ty besinnar man rätt, hvilken liten qvantitet $\frac{1}{50}$ millimeter är, skall man lätt inse, att det kapillärfina mellanrummet kan, på grund af nyssnämnda orsaker, vara i stånd att hindra luften från att tränga derigenom.

En direkt bekräftelse på rigtigheten af föregående förklaring kan enhvar lätt förskaffa sig genom anställandet af följande försök. I en upptill öppen, till en vanlig luftpump hörande glasklocka inpassas ett fint thermometerrör af större längd, medelst hvilket den i klockan instängda luften således kommer att stå i en oafbruten förbindelse med den atmosferiska luften. Om man nu på vanligt sätt genom pumpning söker göra klockan lufttom, kommer naturligtvis den yttre luften att oupphörligen genom röret inströmma i henne, men denna inströmning sker så ytterst långsamt, i följd af friktionen mot väggarne och deras dragningskraft på luftpartiklarne, att förtunningen inom en jemnförelsevis förvånande kort tid kan bringas temligen långt. Så snart pumpningen upphört och cylindrarne blifvit afstängda från klockan, kommer profvaren naturligtvis att stiga, men den ringa hastighet, hvarmed detta sker, ådagalägger tydligt, att ett stort motstånd utöfvas genom det hårfina röret mot luftens inträngande i klockan.

De fördelar, som denna *Deleuils* luftpump erbjuder, äro, att ingen friktion förefinnes mellan kolfven och cylinderväggen, följaktligen att ingen upphettning, ingen nötning och likaledes intet motstånd derstädes eger rum. Någon olja behöfves icke i pumpen för att täta den, i följd hvaraf man ej heller har att befara någon förstoppning hos ventiler och rörledningar. Pumpen har endast *en* cylinder, men denna är dubbelverkande, och följaktligen kommer kolfven att röra sig i en allt mer och mer förtunnad atmosfer. Den hålles i rörelse genom kringvridning af ett stort svänghjul, hvilket medelst tandade hjul står i förening med pumpstången. Förtunningen, som under vanliga förhållanden kan åstadkommas med denna pump, uppgår till *en* millimeters tryck.

Slutligen bör nämnas, att den ifrågavarande pumpen kan omedelbart förvandlas från sugpump till kompressionspump, och att man med dess tillhjelp kan utan märkbart motstånd eller upphettning åstadkomma en förtätning hos gasmassan motsvarande fem atmosferers tryck.

Denna pump var utstäld och förevisades under verldsexpositionen förlidet år i Paris och tillvann sig då ett allmänt bifall. En lika konstruerad pump, hvars pris är 700 francs, har sedan början af detta år blifvit använd å kemiska laboratoriet vid Upsala Universitet och synes motsvara de billiga fordringar, man på en luftpump för det närvarande kan ega.

AFDELNING IV.

Anmälda skrifter.

1. Euklides fyra första böcker, af C. F. Lindman.

Med anledning af några punkter, i hvilka granskaren af detta arbete i tidskriftens förra häfte haft något skiljaktiga åsigter med förf., har förf. lektor Lindman meddelat följande upplysningar.

1. Uti Euklides' def. på linie har jag ej gjort ändring, emedan jag ej ansåg någon annan för undervisningen mera lämplig.

2. Här delar jag rec:s åsigt, men trodde mig ej böra göra en så stor förändring. Jag hade visst kunnat bibehålla numret och hänvisa till längre fram, men tror, att en mängd andra, mot min plan i öfrigt stridande, förändringar deraf blifvit en nödvändig följd.

3. Här måste vara något tryckfel (det bör stå: sidorna i stället för vinklarna). Emellertid tror jag, att Eukl:s def. i den ställning, som hon har, kan försvaras. Helt annat vore förhållandet, om jag icke bundit mig vid nummerföljden, i hvilket fall de senare deff. bort få helt annan plats och form.

4. Här har rec., sannolikt i följd af mitt mindre noggranna uttryckssätt, missförstått mig. Med orden: «annorlunda uttryckt« har jag alls icke velat säga, att det följande är fullt identiskt med Euklides' tredje postulat, utan blott bana väg för det af mig föreslagna sätt att upplösa I: 2 och 3. Vid sådant förhållande har rec. sjelf på bästa sätt rättfärdigat mig. Beträffande Euklides' eget 3:dje postulat, så tog jag mig just af det deri förekommande ordet *διάστημα* anledning till det af mig föreslagna.

5. Samma anmärkning, som här göres, är befogad redan vid I: 1, men sjelfva saken synes vid min plan svår att hjelpa.

6. Här har jag visat, att FG alltid faller inom $\wedge$ DFH, hvilket tyckes mig tillräckligt.

8. Orsaken till det klandrade förfarandet är, att Eukl. i allmänhet plägar göra konstruktionen först och sedan låta beviset utan afbrott följa.

9. Gerna medges, att orden: «hvartill kommer . . . . . omöjligt« bevisa föga och således äro öfverflödiga; men jag trodde mig böra taga något ur III: 13.

10. Det bevis, rec. saknar, hade lätt kunnat lemnas, men torde ock vid betraktande af några propp. i I och III kunna umbäras. För öfrigt var min afsigt med denna solution endast att visa, det en $\triangle$, likvinklig med en gifven, kunde inskrifvas, utan att en tangent behöfde dragas.

11. Jag har ingen smak för indirekta bevis, utan anser fastmera, att sådana böra undvikas, der det låter sig göra. I de citerade fallen skulle jag således hafva föreslagit direkta, om jag kommit att tänka derpå, men det är vanligen svårt att hitta något nytt sätt, då man blifvit väl invand vid ett annat. Annars hade nog den lättare upplösningen på IV: 10 tidigare blifvit funnen. För min del fann jag den d. 3 April 1867, under det jag arbetade med den nya upplagan och just på den väg, som ses i ex. 2 sid. 93.

12. Det här af rec. rekommenderade sättet för problemets lösning

var mig visst icke obekant, isynnerhet som ett specielt fall deraf vid skrifning för afgång v. t. 1867 framställdes (i hr lektor Hultmans samling pag. 31 n:o 68). Jag begagnade det icke, emedan problemets upplösning der på stället för mig ej var hufvudsak, utan emedan jag ville på ett enkelt exempel visa användningen af III: 36 A. Att solutionen då kunde ske på ett annat, till och med enklare sätt, var i min tanke ingen olägenhet.

C. F. Lindman.

---

2. Afhandling om relationen emellan kordan för en cirkelbåge och kordan för en part af densamma af Chr. Norberg, civilingeniör. Första häftet. Stockholm 1867. Pris 2: 50. 110 sidor 8:o.

Ifrån äldsta tider nästan lika långt tillbaka, som man kan följa geometriens studium, ända till närvarande tid, torde knappast något geometriskt problem varit föremål för en sådan mängd försök af lösningar som det att dela en gifven vinkel i tre lika stora delar. Problemet löstes redan af de gamle med tillhjelp af vissa kroklinier, sedan de misslyckats att göra det med endast cirkeln och räta linien *. I nyare tider, sedan analysen blifvit upptäckt, fann man snart att den elementära lösningen medelst räta linien och cirkeln var omöjlig. Problemet leder nämnligen till lösning af en kubisk eqvation. Denna omöjlighet kan emellertid ej den fatta, som ej studerat analysen. Hvarföre kan man ej med räta linien och cirkeln dela en vinkel i tre lika stora delar, när man kan dela honom i 2, 4, 8,... lika stora delar? Detta gör att problemets geometriska lösning på elementär väg med synnerlig ifver försökes af en mängd dilettanter i geometrien, så mycket mer, som många fått för sig, att ett stort pris är utsatt för den, som kan lemna en lösning af detsamma. Jag känner en fästningsfånge, som trott sig skola få nåd hos konungen på grund af en sådan lösning; jag vet en yngling, som offrat en ansenlig tid och nattvak på försök med lösningen af detta problem i akt och mening att derigenom bereda sig och sina obemedlade föräldrar och syskon en framtid af guld och gröna skogar. Jag vill ej tala om alla de ynglingar vid våra läroverk, hvilka år efter år pröfva sina krafter på detta otacksamma problem.

Ofvanstående afhandling sysselsätter sig med det vida allmännare problemet att dela en gifven vinkel i huru många lika stora delar som

---

* *Nikomedes* begagnade dertill konkoiden, *Diokles* cissoiden, *Dinostratus* qvadratricen o. s. v.

helst, i det den framställer en eqvation, som visar sambandet mellan kordan för en godtycklig cirkelbåge ABC och kordan för en part BC af densamma. Vi skola söka att lemna en redogörelse för författarens sätt att gå till väga härvid.

Tag till enhet radien i den cirkel, hvaraf bågen ABC utgör en del. Sätt kordan $AC = b$, kordan $BC = a$ och kordan $AB = c$. Drag diametern BOD samt kordorna AD och CD. På grund af den satsen om en i en cirkel inskrifven fyrhörning, att rektangeln af diagonalerna är lika med summan af rektanglarna af de motstående sidorna, erhåller man

$$2b = a\sqrt{4-c^2} + c\sqrt{4-a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Göres här $a = c$, finner man

$$b = c\sqrt{4-c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

hvilken eqvation visar sammanhanget mellan kordan för en båge och kordan c för en hälften så stor båge. Gör man i (1) $a = c\sqrt{4-c^2}$, d. v. s. man låter [se (2)] bågen för a vara dubbelt så stor som bågen för c, kommer man till den enkla eqvationen

$$c^3 - 3c + b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

hvilken eqvation löser problemet trisectio anguli. Låter man i (1) bågen för a vara 3 gånger så stor som bågen för c, d. v. s. gör man enl. (3) $a = 3c - c^3$, erhåller man såsom eqvation för sambandet mellan kordan för en båge och kordan för dess fjerdedel följande relation:

$$(c^3 - 2c)\sqrt{4-c^2} = -b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Genom analogt förfarande finner man såsom eqvationer för sambanden mellan kordan för en båge och kordan för dess femte-, sjette-, sjunde-, åttonde-del relationerna

$$c^5 - 5c^3 + 5c - b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$(c^5 - 4c^3 + 3c)\sqrt{4-c^2} = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

$$c^7 - 7c^5 + 14c^3 - 7c + b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

$$(c^7 - 6c^5 + 10c^3 - 4c)\sqrt{4-c^2} = -b \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Fortsätter man dessa eqvationer, skall man vid en blick på dem genom induktion finna, att eqationerna (1), (3), (5), (7),..., hvilka gälla för en båges delning i ett jemnt antal lika stora delar utgöra specialfall af eqvationen

$$\left[c^{n-1} - \frac{(n-2)_1}{n-2} c^{n-3} + \frac{(n-3)_2}{n-4} c^{n-5} - \frac{(n-4)_3}{n-6} c^{n-7} + \ldots\right.$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{n}{2}+1\right)_{\frac{n}{2}-2}}{4} c^3$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2}\right)_{\frac{n}{2}-1}}{2} . c\right]\sqrt{4-c^2} = -(-1)^{\frac{n}{2}} . b^2 *,$$

samt att eqvationerna (2), (4), (6), (8), . . ., hvilka gälla för en båges delning i ett udda antal lika stora delar, utgöra specialfall af eqvationen

$$c^n - nc^{n-2} + n . \frac{(n-3)_2}{n-4} c^{n-4} - n . \frac{(n-4)_3}{n-6} c^{n-6} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}} n . \left(\frac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-3}{2}}}{3} c^3$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n . \left(\frac{n-1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} . c = -(-1)^{\frac{n+1}{2}} . b.$$

Höjas dessa båda eqvationer i qvadrat, sammanfalla de till följande eqvation:

$$c^{2n} - 2nc^{2n-2} + 2n \frac{(2n-3)_2}{2n-4} c^{2n-4} - 2n \frac{(2n-4)_3}{2n-6} c^{2n-6} + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} 2n . n_{n-1} . c + (-1)^n b^2 = 0,$$

hvilken eqvation utvisar sambandet mellan kordan b för en båge och kordan c för dess $n^{\underline{te}}$ part. Vi se att mot hvarje rot c finnes en rot $= -c$. Dessa eqvationers allmängiltighet bevisar förf. genom att gå från n till $n + 1$.

Återstår att se, om man på förhand kan finna, att denna eqvation måste i afseende på c vara af $n^{\underline{te}}$ eller $2n^{\underline{te}}$ graden.

---

* I denna och de båda följande eqvationerna mena vi med uttryck af formen n_k binomialkoefficienter, så att

$$n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots k}.$$

Emedan hvarje korda b är korda ej allenast för den deremot svarande mindre bågen β, utan äfven för den större bågen $2\pi - \beta$ samt för dessa bågar ökade eller minskade med ett godtyckligt antal cirkelperiferier, så följer, att kordorna c skola tillhöra ej allenast bågen $\frac{\beta}{n}$ utan äfven bågarna $\frac{\beta \pm 2k\pi}{n}$ och $\frac{2\pi - \beta \pm 2k\pi}{n}$, der k betyder hvilket som helst af talen 0, 1, 2, 3... i oändlighet. Vid första påseendet skulle det tyckas, som om man på detta sättet skulle få oändligt många kordor, emedan antalet bågar är oändligt stort. Men man finner snart att antalet bör vara inskränkt, emedan alla bågar som hafva samma begynnelse- och slutpunkter hafva samma kordor. Nu är tydligt att den senare båggruppen $\frac{2\pi - \beta \pm 2k\pi}{n}$ kan sättas under formen $-\frac{\beta \mp 2l\pi}{n}$ och således sammanfaller med den förra båggruppen med ombytt tecken. Denna grupp gifver således inga nya kordor. Vidare inses, att, om $k > n$ i den återstående båggruppen, man kan sätta $k = rn + s$, der $s < n$. Bågarne $\frac{\beta \pm 2k\pi}{n}$ kunna derigenom skrifvas $= \frac{\beta \pm 2s\pi}{n} \pm 2r\pi$. Häraf synes, att inga nya värden på k erhållas för $k > s$ eller $> n - 1$. Är $s > \frac{n}{2}$, kan man sätta $s = n - s_1$, der $s_1 < \frac{n}{2}$; man får då $\frac{2s\pi}{n} = 2\pi \mp \frac{2s_1\pi}{n}$ och således båggruppen inskränkt till $\frac{\beta \mp 2s_1\pi}{n}$, der $s_1 < \frac{n}{2}$. Lätt inses, att antalet olika kordor här äro n.

Sättes i den allmänna eqvationen $b = 0$ och eqvationen derefter divideras med c, betyder den minsta c-roten, sidan i en regulier månghörning. Förf. redogör för de i Euklides' fjerde bok förekommande månghörningar samt dessutom för 17-hörningen, hvilkens eqvation af 16:de graden han fullständigt löser. Han har härigenom bevisat möjligheten att med endast räta linien och cirkeln inskrifva en sådan i en cirkel. Förf. lofvar att i ett senare häfte lemna en särskild teori för reguliera månghörningar. Sannolikt kommer han der att lemna ett elementärt bevis för den af Gauss först uppstälda satsen, att det ej är möjligt att i en cirkel inskrifva andra reguliera månghörningar än dem, hvilkas sidoantal kan representeras med ett primtal af formen $2^{(2^n)} + 1$.

Förf. skall ha tack för sitt oegennyttiga bidrag till en populär framställning i läran om en båges delning. Han skall genom denna sin afhandling utan tvifvel höja det matematiska vetandet hos sitt fäderneslands ungdom. Mot afhandlingen skulle vi vilja anmärka, ifall det vore tillåtet i afseende på en gåfva, att stilen är långtrådig, vidtsväfvande, att hufvudsak och bisak ej skarpt skiljas. Vi säga detta endast för att förf. må göra gåfvan af sitt utlofvade andra häfte i dubbelt hänseende välkommen.

F. W. Hultman.

---

3. Elementerna af Algebraiska Analysen och Differentialkalkylen i korthet framstälda af C. F. E. Björling, lektor i Halmstad. Förra delen: reella qvantiteter. Förra häftet, pris 2,25. Senare häftet, pris 2,25.

Detta arbete är en i många afseenden intressant och i sitt slag ny företeelse inom den svenska matem. litteraturen, hvarpå vi nu fästa våra läsares uppmärksamhet. Vi torde framdeles blifva i tillfälle att egna detsamma en närmare granskning.

Profskrifning för maturitetsexamen v. t. 1868.

Af en elev från Westerås högre elem.-läroverk.

25. *Hvilket tal satisfierar eqvationen*

$$a^{x+1} = a^2 \cdot \sqrt[x+2]{a^{3(x+3)}} \, ?$$

Som på vår ståndpunkt potenser* af negativa och imaginära qvantiteter äro främmande, förutsätta vi i det följande, att a är en positiv qvantitet.

Den framstälda eqvationen kan transformeras till

$$a^{x+1} = a^2 \cdot a^{\frac{3(x+3)}{x+2}},$$

samt derefter till

$$a^{x+1} = a^{2+\frac{3(x+3)}{x+2}},$$

på grund af hvilken sistnämnda likhet man erhåller eqvationen

$$x + 1 = 2 + \frac{3(x+3)}{x+2}.$$

---

* "(andra än digniteter, förstås)", lärarens rättelse.

Denna eqvation gifver vid öpplösningen

$$x = 1 \pm \sqrt{12};$$

men då det begäres att få veta det tal, som satisfierar den framstälda eqvationen, kan endast det öfre värdet här komma i fråga.

Nu är (se log.tab. sid. 372)

$$\sqrt{12} = 3{,}464101\ldots,$$

således

$$x = 4{,}464101\ldots$$

24. *På en vagn är hvardera framhjulets omkrets* 5,5 *fot och hvardera bakhjulets omkrets* 6,75 *fot. Om nu under en resa framhjulet gjort* 3000 *omlopp mera än bakhjulet, så frågas: huru stor är den väg, som blifvit tillryggalagd?*

Om vägens längd, uttryckt i fot, betecknas med x, så angifver tydligen qvoten $\frac{x}{5{,}5}$, huru många hvarf, framhjulet gjort på den ifrågavarande vägen, och qvoten $\frac{x}{6{,}75}$ huru många hvarf bakhjulet gjort på samma väg.

På grund af uppgiften erhåller man derföre eqvationen

$$\frac{x}{5{,}5} = \frac{x}{6{,}75} + 3000,$$

hvilken upplöst gifver

$$x = 89100 \text{ fot}^*.$$

---

* På samma gång det är oss ett nöje att erkänna det utmärkta sätt, hvarpå förf. löst och redigerat detta och öfriga problem, kunna vi dock ej underlåta den anmärkning, att i ett prof vi önskade se ett problem sådant som detta mera uttömmande behandladt, äfven med risk, att man derigenom skulle medhinna ett eller annat problem mindre. För att göra klart, hvad vi mena, skola vi sjelfva upptaga detta problem till behandling.

Uppgiften angifver ett samband mellan

1) en väglängd, som tillryggalägges af tvenne par hjul;
2) det antal omlopp, som hjulen göra på denna väglängd; och
3) hjulens omkretsar.

Eqvationen kan följaktligen angifva tvenne olika uttryck på

1) väglängden, eller på
2) antalet hjulomlopp hos någotdera hjulparet, eller på
3) hjulens omkretsar.

Emedan inga andra storheter förekomma i uppgiften, kan ej gerna någon fjerde möjlighet komma i fråga.

27. *I en triangel äro vinklarne vid basen $78^0\,10'\,4''$ och $54^0\,3'\,16''$. Triangelns höjd är 15 fot. Huru stora äro sidorna?*

Låt ABC föreställa den ifrågavarande triangeln och låt $\wedge B$ vara $= 78^0\,10'\,4''$ och $\wedge C = 54^0\,3'\,16''$ samt höjden AD vara betecknad

---

Om vägens längd betecknas med x fot, antalet hjulomlopp hos framhjulet med y och dess omkrets med p fot, så eger mellan dessa tre storheter följande samband rum:

$$x = yp,$$

alldenstundväglängden x liksom uppmätes med y stycken mått, hvarje mått p fot långt. Af denna eqvation följer, att

$$(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{x}{p} \quad \text{och} \quad p = \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta),$$

hvilka båda eqvationer utan svårighet direkt kunna fattas.

Uppställning 1.

Eqvationen skall angifva tvenne olika uttryck på väglängden. Uppmäter man väglängden med framhjulets omkrets, blir uttrycket på den $= y \,.\, 5{,}_5$; uppmäter man den deremot med bakhjulets, blir uttrycket på den $= (y - 3000) \,.\, 6{,}_{75}$. Dessa båda uttryck skola vara lika. Man har alltså

$$y \,.\, 5{,}_5 = (y - 3000) \,.\, 6{,}_{75}\,,$$

hvilken eqvation löst gifver

$$y = 16200 \text{ omlopp.}$$

Bakhjulet har således gjort 13200 omlopp. Hela vägen är

$$16200 \,.\, 5{,}_5 = 13200 \,.\, 6{,}_{75} = 89100 \text{ fot.}$$

Uppställning 2.

Eqvationen skall angifva tevnne olika uttryck på antalet omlopp hos t. ex. framhjulet. Se förf:s lösning.

Uppställning 3.

Eqvationen skall angifva tvenne olika uttryck på framhjulets omkrets. Enligt eqvationen (β) har man omkretsen $= \dfrac{x}{y}$; men enligt uppgiften är den $5{,}_5$ fot. Eqvationen blir således

$$\frac{x}{y} = 5{,}_5\,.$$

På samma sätt erhålla vi för bakhjulet

$$\frac{x}{y - 3000} = 6{,}_{75}\,.$$

Ur dessa två eqvationer finna vi samma värden på x och y som förut.

F. W. Hultman.

med h. Om nu sidan BC betecknas med x, AC med y och AB med z, så erhållas lätt eqvationerna:

$$h = y \operatorname{Sin} C,$$
$$h = z \operatorname{Sin} B,$$

hvilka gifva

$$y = \frac{h}{\operatorname{Sin} C} = \frac{15}{\operatorname{Sin} 54^0\, 3'\, 16''} = 18{,}52824\ldots \text{fot},$$

och

$$z = \frac{h}{\operatorname{Sin} B} = \frac{15}{\operatorname{Sin} 78^0\, 10'\, 4''} = 15{,}32563\ldots \text{fot}.$$

Den tredje sidan x kan finnas enligt Sinusteoremet, således ur eqv.:

$$x = \frac{h \operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}.$$

Nu fås, alldenstund $\wedge A$ är supplementvinkel till $B + C$, utan svårighet

$$x = 14{,}01884\ldots \text{fot}.$$

29. *Med huru stort belopp skall ett kapital, som blifvit lånadt mot 6 proc. ränta, årligen amorteras, för att vara fullt inbetaldt efter 20 år?*

Låt kapitalet vara betecknadt med k och låt den årliga amorteringen utgöra x proc. derutaf. Om nu $\frac{x}{100} . k$ tills vidare tecknas $= y$, så kan skuldens storlek efter de särskilda inbetalningarna inhemtas af följande tableau:

$$\begin{array}{ll}
1) & k . 1{,}06 - y \\
2) & k . q^2 - yq - y \qquad (\text{om } q = 1{,}06) \\
3) & k . q^3 - yq^2 - yq - y \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
20) & k . q^{20} - y . q^{19} - \ldots - yq - y.
\end{array}$$

Som efter de 20 årens förlopp skulden skulle vara till fullo betald, erhålles eqv.:

$$kq^{20} - yq^{19} - \ldots - yq - y = 0.$$

Nu kan (se Algebr., sen. del.) det förra membrum i denna eqvation transformeras till: $kq^{20} - y \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1}$, till följd hvaraf förenämnda eqv. kan bringas till formen:

$$y \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = kq^{20},$$

och vidare, eftersom y är $= \frac{x}{100} \cdot k$, till

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = q^{20},$$

hvilken gifver

$$(\alpha) \qquad x = \frac{100(q - 1)q^{20}}{q^{20} - 1} = \frac{6 \cdot q^{20}}{q^{20} - 1} = \frac{6}{1 - q^{-20}}.$$

Nu är $q^{-20} < 1$ och kan således tecknas $= \mathrm{Sin}^2\varphi$ (nämnligen φ en båge i 1:a qvadr.), genom hvars införande i formeln (α) man erhåller

$$x = \frac{6}{\mathrm{Cos}^2\varphi}.$$

Ur eqv.: $\mathrm{Sin}^2\varphi = q^{-20}$ fås nu $\varphi = 30^\circ\, 56'\, 41{,}5''$; och sål.

$$x = 8{,}71845\ldots\,\%.$$

Då är också

$$y = 0{,}0871845\ldots k.$$

Något noggrannare svar kan icke på den framstälda frågan lemnas *.

(Forts.)

Nya böcker.

Nordlund, K. P. Räkneöfningsexempel för skolor uppstälda med afseende på den heuristiska metodens användande, 2 häften. (Hela tal och bråk). Stockholm. 80 öre.

Ljungzell, N. G. Räknetabeller. Stockh. 1865.

Hansen, C. Billed regnebog for smaabørn. 2:en udg. Kjøb. 1868. 8 sk.

Bokkenheuser, C. H. F. Regnebog for begyndere. Kjøb. 24 sk.

——— Facitliste till regnebog for begyndere. 10 sk.

Hemmel, L. L. Ledetråd ved undervisningen i brøkregning. 2:en udg. 28 sk.

---

* Ordet "lemnas" är af läraren rättadt till: finnas medelst de för oss tillgängliga tabellerna.

Schön, L. Sjuställiga vanliga logaritmer för alla hela tal från 1 till 10800. Stockh. (utan trigon. tabell) 1,90; med trigon. tabell och med interpolationstabell 4,90.

Mundt, C. E. Lærebog i den elementære stereometri tillige med den sphæriske trigonometri, 3:e udg. Kjøbenh. 80 sk.

Bergius, A, T. Sur quelques fonctions alternes. Afhandl. i programmet från nya elementarskolan 1868.

Smitt, J. D. Några satser ur vibrationsteorien. Afh. i progr. från Westerviks läroverk 1868.

Guldberg, C. M. Bidrag til Legemernas molekylartheori, aftryck ur Vidensk. Selsk. forh. for 1867. Christiania.

——— Kortfattet framstilling af den mekaniske varmetheori. Christiania 1868.

Ulle, O. Hvarför och derför. Frågor och svar ur naturlärans vigtigaste områden. Öfversatt och bearbetad af Fernlundh. Sthlm. 1,25.

Tychsen, C. Mekanikens grundsætninger efter Delaunay. 9:de og 10:de heft. à 40 sk. Kjøbenh.

——— Tidsskrift for mathematik. 2 rdr (4,20 svenskt).

Thomsen, J. et A. Tidsskrift for physik og chemi. 3 rdr.

Böcker, utgifna 1867—1868.

Aritmetik och Algebra.

(Forts. fr. sid. 100).

γ) I Danmark.

Skjoldager, N. H. Praktisk regnebog for almueskolernes yngste klasse. Fjerde udgave. 56 sid. i 8. Jörgensen. 16 sk.

Grünfeld, H. P. H. Theoretisk-praktisk regnebog. Andet cursus, for borger-, real- og latinskoler. 118 sider i 8. Tryde. 48 sk.

——— Theoretisk-praktisk regnebog. 3:e udg. 32 sk., Resultater. 8 sk. Tryde. Kjöbenh.

Hansen, C. Hoved- og tavleregningsopgaver (3:die deel) til anvendelsen af brøkregning ved delingsregning, procentregning o. s. v. 4:de udgave. 100 sid. 8:o. Schubothe. Inb. 32 sk.

Westrup, A. Regnekunstneren eller den nye hovednögle. 416 sid. i 12. Inb. 76 sk.

δ) I Frankrike.

Pichot, Éléments d'arithmétique (année préparatoire et 1:me année) 1 vol.
Jeanne, E. Cours d'arithmétique commerciale (2:me année) 1 vol. 3 fr.
Courcelle-Seneuil, Cours de comptabilité (1—4 années) 4 vol. à 1 fr. 50 c.
André. Leçons d'arithmétique. Année préparat. In 12. Delagrave. 1 fr.
Roguet. Traité d'arithmétique. In 8. Masson et fils. 3 fr.
Amey. Cours d'arithm. et de calcul litteral. In 8. Grassart. 5 fr.
Garcet. Traité d'arithmétique. In 8. Delagrave. 4 fr.
Laurent. Traité d'algèbre. In 8. Gauthier-Villars. 7 fr. 50 cent.

ε) I Tyskland.

Aschenborn. Lehrbuch d. Arithm. m. Einschluss d. Algebra. Berlin. v. Decker. 2 Th.
Kameke. Der Schnellrechner. Berlin. 6 Liefer. à $\frac{1}{6}$ Th. Berlin. Grieben.
Lübsen. Ausführliches Lehrbuck der Arithmetik u. Algebra. Leipzig. Brandstetter. $1\frac{1}{3}$ Th.
Möllman. Vorschule der Arithmetik. Rostock. Stiller. $\frac{1}{4}$ Th.
Ruland. Ausführl. Auflösung der Aufgaben in Heis' Sammlung. Aufgaben. In 8. Bonn. Cohen. $1\frac{1}{2}$ Th.
Sass. Buchstabenrechnung, nebst e. Anhang enth. die Logarithmen d. Zahlen 1—10000. Altona. Schlüter. 1 Th. $4\frac{1}{2}$ Gr.

Elementär Geometri.

α) I Sverige.

Lagerhamn, C. M. Geometri förenad med lineartecking för folkskolelärareseminarier och folkskolor. 7:e uppl. (Hæggström). 90 öre.
Weström, C. A. Lärobok i geometri, omfattande de 6 första böckerna i Euklides. 79 sidor (Bonnier). 75 öre.
Siljeström, P. A. Lärobok i geometrien till folkskolornas tjenst utarbetad. 50 öre.
Danielson, Adolf. Lärobok i praktisk geometri, med talrika öfningsexempel. Till folkskolornas tjenst. 75 öre. Örebro. (Lindh).
Cronhjelm, P. E. Elementerna af arithmetiken och planimetrien. Sjette uppl. omarbetad af Sylvan. Christianstad 1867. (Littorin). II. Planimetri. 1 rdr. 115 sid.

Norberg, Chr. Afhandling om relationen emellan kordan för en cirkelbåge och kordan för en part af densamma. Första häftet. Sthlm 1867. 2,50.

Lindman, C. F. Euclides' fyra första böcker med smärre förändringar och tillägg. (Hæggström). 1,50.

Bäckman. Tillämpad geometri med talrika öfningsexempel. 2 uppl. Stockh. Hæggström. 1,25.

β) I Norge.

Saxild, V. Geometri for begyndere. Indeholdende plan geometri, plan trigonometri och stereometri. Dydevad. Inb. 60 sk.

γ) I Danmark.

Mundt, C. E. Lærebog i den elementære plan geometri tillige med den plane trigonometri. Syv. Udg. 190 sid. i 8:o. Gydendal. Inb. 1 rdr 32 sk.

Petersen, J. Geometriske opgaver til skolebrug. 52 sid. i 8.

Steen, A. Elementar stereometri. 152 sid. i 8. Reitzel. Inb. 1 rdr 16 sk.

Simesen, R. J. Grundtræk af rumforholdenes naturlære eller geometrien, trigonometrien och stereometrien genetisk fremstilled. (Wöldike). 1 rdr 64 sk.

(Forts.)

Insända uppsatser.

Sats ur allmänna eqvationsläran af M. F. Hallström.
Lösning af sats 57 (I) af G. Mittag-Leffler.
Satser af T. B. Johansson.
Lösning af sats 13 (III) af P. W. Almqvist.
Om bråkexponenter af d:o.
Satser af C. O. Boije af Gennäs.
Satser af A. E. Hellgren.
Sats med lösning af S—g.
Satser af Otto Witt.
Satser af G. H. Lindqvist.
Lösning af satser 1—6 (III) af Cavallin.
Lösning af sats 56 (I) af E. M. Frykberg.
Lösning af satser 1 (ofullständig), 42, 45—47 samt 49 och 50 (I) af Erik.
Lösning af satser 53, 55, 57 och 58 (I) af Knut Wicksell.
Satser af J. R. Åkerlund.

AFDELNING I.

Om bicellens byggnad.

Af F. W. Hultman.

Bina älska värme och solljus. Derföre ställes vanligen bikupan så, att det s. k. flustret eller ingången till kupan vetter mot söder. Vi tänka oss kupan i detta läge, då vi nu göra ett besök i den samma. Strax innanför flustret påträffa vi en mängd lodräta, sins emellan parallela, väggar (honungs- eller vaxkakor), hvilka sträcka sig från kupans tak till dess botten i rigtning från söder till norr, så att bina genast efter inträdet lätt kunna förflytta sig mellan hvilka kakor som helst. För att underhjelpa kommunikationen äro dessutom kakorna ofta afbrutna eller försedda med öppningar. Mellanrummet mellan tvenne kakor är ej större än att tvenne bin utan svårighet kunna i detta gå bredvid hvarandra. Sjelfva väggarne eller kakorna hafva en tjocklek af ungefär 8,6 linier. Hvarje kaka är medelst en lodrät bucklig mellanvägg delad i 2 lager, hvartdera af 4,3 liniers tjocklek. Begge lagren äro sammansatta af en mängd vågräta, vinkelrätt mot mellanväggen liggande, 6-kantiga prismatiska celler, hvilka således sträcka sig emellan öster och vester. De äro bestämda dels till boningsrum för binas larver, dels till förvaringsrum för deras föda, honungen. Cellens längd är lika med lagrets tjocklek eller 4,3 lin., dess bredd är 1,7 lin. Hvarje cell är ihålig och försedd med ett plant lock i form af en regulier sexhörning, på sin fria sida, ifall den innehåller en larv eller honung, men utan betäckning, om den är tom. På den sidan deremot, som vetter åt den buckliga mellanväggen, är cellen täckt med ett lock i form af en tresidig pyramid. Denna pyramid står på den liksidiga triangel, som erhålles genom att sammanbinda hvarannat af de 6 hörn i den sexhörning, som skulle begränsa cellen intill mellanväggen. Pyramidens tre sidoplan äro sedan förlängda, tills de träffa de 6 sidoplanen af den prismatiska cellen, och blifva derigenom romber dubbelt så stora som trianglarne.

Cellen kommer sålunda att begränsas af en plan regulier sexhörning, af 6 sidoplan i form af paralleltrapezier samt af tre romber. Som vi se, kommer sålunda celllagret utefter mellanväggen att bilda en yta, bestående af en mängd pyramidspetsar, mellan hvilka ligga pyramidformiga gropar. Dessa gropar fyllas jemnt af pyramidspetsarne hos honingskakans lager på andra sidan om mellanväggen. Någon annan egentlig mellanvägg än de rombiskt pyramidaliska locken hos cellerna finnes dock ej. Utseendet af mellanväggens yta fattas för öfrigt bäst af vidfogade figur (fig. 33 α). Cellen i sin helhet synes i fig. 33 β.

Efter att hafva redogjort för cellens utseende, vilja vi söka utreda den förnuftiga grunden till cellens egendomliga form.

Hvad först den egenskapen beträffar, att basen till den prismatiska cellen utgöres af en regulier sexhörning, derpå har enligt *Maraldi* * redan *Pappus* ** lemnat svar.

---

* Astronomen Giacomo Filippo Maraldi föddes 1665 i Nizza och dog 1729 i Paris. Han har i Histoire de l'académie royale des sciences pour 1712. Paris 1714, skrifvit en utmärkt intressant naturhistorisk afhandling: «Observations sur les abeilles«. Han redogör der bland annat för de noggranna mätningar han gjort öfver vinklarnes storlek i de romber, hvarom vi nyss talat. Så har han funnit den trubbiga vinkeln $109^0 28'$ och den spetsiga $70^0 32'$.

** Den utmärkte matematikern Pappus från Alexandria lefde år

Vore cellerna cylinderformiga och ej prismatiska, skulle de ej kunna passas intill hvarandra, utan att en mängd onyttiga mellanrum skulle uppstå. För att hindra sådana att uppkomma böra cellerna vara prismer, hvilkas baser äro reguliera rätliniga figurer så beskaffade, att, då de ställas intill hvarandra med sina vinklar omkring en punkt i ett plan, hela planet omkring denna punkt blifver betäckt. Af så beskaffade månghörningar hafva vi endast tre, den liksidiga triangeln (der hvarje vinkel är $\frac{1}{6}$ af 4 räta), qvadraten (der hvarje vinkel är $\frac{1}{4}$ af 4 räta) och sexhörningen (der hvarje vinkel är $\frac{1}{3}$ af 4 räta). Men af dessa är sexhörningen den, som har minsta omkrets, då ytan är den samma. Bestämma vi nämnligen ytans storlek till a^2 ytenheter, blir hos den liksidiga triangeln

omkretsen $= 2\sqrt{3\sqrt{3}}\,.\,a = 4{,}559\,.\,a$ längdenheter,

hos qvadraten . . . $= 4a$ . . . . »

och hos sexhörningen $= 2\sqrt{2\sqrt{3}}\,.\,a = 3{,}722\,.\,a$ »

Det behöfves således mindre byggnadsämne till sexkantiga än till tre- eller fyrkantiga celler.

Vi vilja vidare tillse, huru locket på en sådan cell skall byggas med största hushållning.

Tänkom oss till en början cellen fullkomligt prismatisk med platt lock. Låt den reguliera sexhörningen vid locket vara $ABCDEF$* och vid basen $A'B'C'D'E'F'$. Låt O vara medelpunkten i den förra och O' i den senare. Drag ut axeln $O'O$ ett godtyckligt stycke OQ $(= x)$. Sammanbind O med A, F och E samt drag AE. Emedan $AF =$

---

400 e. Kr. Hans matematiska arbeten i 8 böcker, hvaraf olyckligtvis de två första äro förkomna, utgöra ett ytterst värdefullt arbete för matematikens historia. De äro öfversatta och kommenterade af den lärde geometern Commandinus, som lefde 1509—1575, och utgåfvos efter dennes död under titeln: Pappi Alexandrini Mathematicæ Collectiones a F. Commandino in latinum conversæ et commentariis illustratæ. Pisauri 1588.

* Figur upprite läsaren sjelf!

$FE = E\dot{O} = OA$ (AF och FE äro sidor i den reguliera sexhörningen, EO och OA äro radier i den kring sexhörningen omskrifna cirkeln), så är $AOEF$ en romb, och således måste dess diagonaler AE och OF skära hvarandra vinkelrätt midt itu i någon punkt S. Afskär vidare af FF' ett stycke $FR = OQ$. Alldenstund vidare $OQ \# FR$, måste $FQ \# OR$. Figuren $FQOR$ är således en parallelogram, hvarföre dess diagonaler QR och OF måste skära hvarandra midt i tu i en punkt. Men S är midtpunkten af OF. Punkten S måste således också vara midtpunkt af QR. Linierna AE, OF och QR skära hvarandra alltså i en och samma punkt. Drag nu linierna QA, AR, RE, EQ. Emedan i den plana fyrhörningen $QARE$ diagonalerna skära hvarandra midt i tu, är han en parallelogram, och emedan $AR = RE$ såsom baser i de kongruenta trianglarne AFR och RFE, så är fyrhörningen $AQER$ en romb. Låter man nu den pyramid, som till bas har triangeln AEF och till spets punkten R vrida sig till linien AE, tills punkten F faller in på O, måste FR falla in på OQ, punkten R på punkten Q, och således hela pyramiden $AEFR$ falla in på pyramiden med AEO till bas och Q till spets. Afskär man på samma sätt af DD' ett stycke $DT = OQ$, och af BB' ett stycke $BW = OQ$, samt gör samma konstruktion, erhålla vi en med det ursprungliga prismat lika stor solid figur, begränsad af en plan sexhörning, 6 parallеltrapezier och tre romber. Som vi se, *är volymen konstant för olika längder af* OQ *eller* FR.

Här är ock stället att anmärka, att spetsen af en pyramid i det ena lagret celler passar fullkomligt in i motsvarande fördjupning hos det andra lagret celler. I fig. α synes nämnligen, att solida vinkeln M är kongruent med solida vinkeln N, alldenstund alla 3 planvinklarne, som bestämma vinkeln M, och alla 3 planvinklarne, som bestämma solida vinkeln N, äro (alla 6) sins emellan lika stora.

Återstår nu att bestämma längden af $OQ(= FR = x)$ så, att cellens yta blir ett minimum.

Låt sexhörningens sida AF vara $= a$,
prismats längd eller höjd $AA' = l$;

då blir ytan af ett

paralleltrapezium t. ex. af $A A' F' R = \dfrac{a(2l - x)}{2}$,

af sexhörningen $A'B'C'D'E'F' = 6 . \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$,

af romben $AQER = AE . SQ = a\sqrt{3} . \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{4}}$.

Cellens hela yta blir alltså:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 + 6 \cdot \frac{a(2l - x)}{2} + 3a\sqrt{3} . \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \quad . . (1).$$

Denna yta är tydligen ett minimum, då

$$2l - x + \sqrt{3\left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right)}$$

är det. Genom att sätta detta uttryck $= m$ och lösa den så uppkomna eqvationen i afseende på x, finner man, att ytan blir ett minimum för

$$x = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2};$$

d. v. s. att FR skall göras lika stor med diagonalen i en qvadrat, hvars sida är fjerdedelen af sidan AF i den reguliera sexhörningen. Insättes detta värde på x i (1), finner man miniiytan vara

$$6a\left(l + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} \cdot a\right).$$

Hade cellen varit fullkomligt prismatisk med platt lock, skulle ytan ha blifvit

$$6a\left(l + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} \cdot a\right).$$

Den senare ytan öfverskjuter den förra med

$$\frac{3a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} = 0{,}477\,a^2$$

eller med nästan hälften af qvadraten på sexhörningens sida.

De öfriga längderna blifva:

$$ER = EQ = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \text{sidan i romben,}$$

$$QR = 2\,.\,SQ = 2\,.\,RS = 2\,.\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot a = \text{den mindre diagonalen i romben,}$$

$$AE = 2\,.\,SE = 2\sqrt{(ER)^2 - (SR)^2} = a\sqrt{3} = \text{den större diagonalen i romben.}$$

Vidare är, märkvärdigt nog, rombens höjd eller höjden i $\triangle\, AEQ$, dragen från E eller A, = sexhörningens sida a.

Genom trigonometrisk räkning finna vi vidare:

$$\text{Tg} \wedge EQS = \frac{ES}{SQ} = \sqrt{2} \quad \because \wedge EQS = 54^\circ 44' \quad \text{och} \quad \wedge AQE$$

$= 109^\circ\, 28'$, alldeles öfverensstämmande med Maraldi's mätningar. Utan svårighet erhålla vi derjemnte lutningsvinkeln mellan 2:ne romber $= 60^\circ$ = vinkeln i en liksidig triangel, samt lutningen mellan en romb och närliggande sidoplan i den prismatiska cellen att vara $= 120^\circ$.

Enligt de ungefärliga * mätningar, som vi hafva gjort med passare och skala, hafva vi funnit

den mindre diagonalen i romben	=	1,325	sv. dec.	linier,
» större	=	1,875	»	»
sidan a i sexhörningen	=	1,08	»	»
halfva bredden af vaxkakan = l	=	4,287	»	»

* Mätningarna äro gjorda på en honungskaka, 14 dagar efter sedan den tagits ur kupan, och i den tryckande sommarvärme, som nu i Aug. 1868 råder.

Beräknar man, med dessa värden på diagonalerna, rombens vinklar, skall man finna dem ej mycket skilja sig från de ofvan beräknade och af Maraldi uppmätta vinklarne.

Vi se alltså, att bina bygga med så stor hushållning som möjligt, och att de sålunda följa den stora naturlagen: *alla verkningar i skapelsen ske med den minsta möjliga omkostnad.*

Hvem som först funnit, att ytan af bicellen, då volymen är konstant, utgör ett minimum, vet jag icke. Problemet står upptaget bland maximiproblemen i Frenet's Recueil d'exercices du calcul differentiel. Dessutom finnes det utförligt behandladt i Tychsens tidskrift för matematik, årgången 1865, under den anspråkslösa titeln: »Et lille Regnestykke af en Biavler».

Ofvanstående problem, som genom sitt innehåll låter oss blicka in i skapelsens hemligheter, är intressant äfven derföre, att dess lösning förutsätter så ringa matemetiska insigter, men tillika erbjuder en rik tillämpning på flere olika områden inom de första elementen af matematiken. Vi rekommendera det derföre till behandling vid våra elementarläroverk.

Sats af löjtnant Joh. P. Torell.

På hvardera af två hvarandra skärande räta linier är en punkt gifven; det begäres att upprita två cirklar, som tangera dessa linier i de gifna punkterna och hvarandra, samt att linien genom medelpunkterna till de sökta cirklarne går genom de gifna liniernas skärningspunkt.

Låt SR och ST (fig. 34) vara de gifna räta linierna och A och B de bestämda punkterna.

Gör $SL = SM = \frac{1}{2}(SA + SB)$. Drag AE och LN vinkelräta mot SR samt BK och MN vinkelräta mot ST.

Rita med N till medelpunkt en cirkel med radien $= \frac{1}{2}(SB - SA) = AL = MB$. Drag från S tangenterna SP och SQ till denna cirkel, som äfven tangerar AE och BK. Om nu KO göres $= KB$, så måste $IK = KD$ och $OI = BD = LN = AC$, men $HI = HC$ och således $AH = HO$.

Cirklar med K och H till medelpunkter samt resp. BK och AH till radier uppfylla således de bestämda vilkoren.

På samma sätt bevisas äfven, att cirklar med E och G till medelpunkter samt resp. AE och BG till radier uppfylla de bestämda vilkoren.

Sats af studerande S—G.

AB och BC äro två mot hvarandra vinkelräta linier; A är fast och B rör sig utefter en gifven rät linie. Bestäm geometriskt locus för C, då förhållandet mellan AB och BC är konstant.

Låt xy vara den gifna räta linie utefter hvilken B rör sig. Drag AD vinkelrät mot xy; bestäm på xy en punkt E, sådan att AD är till DE i det gifna förhållandet AB till BC. Förena AE och drag genom E en mot AE vinkelrät linie. Denna linie är locus för C.

Förena A och E med C.

$\triangle ADE$ är likformig med $\triangle ABC$; följaktligen $\wedge AEB = \wedge ACB$. Om derföre kring $\triangle ABE$ en cirkel omskrifves, måste den äfven gå genom C. $\wedge ABC$ är då $= \wedge AEC$; $\wedge AEC$ således rät. Alltså ligger punkten C på den mot AE uti E vinkelräta linien, som således är locus för C.

AFDELNING II.

Om Keglesnitsliniernes Krumningsradier.

Af V. SAXILD,

Adjunkt ved Kongsbergs Middel- og Realskole.

Med megen Fornøielse læste jeg som Subskribent paa »Tidskrift för Matematik och Fysik» Afhandlingen om isoperimetriske Produkters Maxima. Den vakte ogsaa min Lyst til at prøve, om ikke Elementæralgebraen kunde gjøre nogen Indskrænkning i det Monopol, som Differentialkalkylen formentlig har paa at bestemme Krumningsradien. Skulde saadant lykkes, saa kunde man blandt andet komme ganska let over den Vanskelighed, som man har, naar man af den 2:den Keplerske Lov grundigt skal deducere Tyngdeloven for Elever, som ikke kjende høiere Analyse.

Saavidt jeg ved, pleie de elementære Lærebøger i analytisk Geometri ikke at beskjæftige sig med Keglesnitsliniernes Krumningsradier. Materien synes dog ikke at være uden praktisk Interesse; heller ikke synes den att ligge ganske udenfor den elementære Mathematik, endskjønt de Methoder, hvarefter denne faar behandle den, vel altid ville være noget vidløftige.

Følgende elementære Fremstilling støtter sig til Opfatningen af en Kurves Krumningscenter som det Punkt, hvortil Sjæringspunktet for Normalerne till to Kurvepunkter nærmer sig, naar de to Kurvepunkter løbe sammen.

Parabolen. Kurvens Ligning i retvinklet Koordinatsystem er $y^2 = 2px$. Et Kurvepunkts Koordinater være

x_1 og y_1, et andet Kurvepunkts Koordinater være $(x_1 + \Delta x)$ og $(y_1 + \Delta y)$, hvor Δx betegner et Stykke af Abscisseaksen og Δy et Stykke af Ordinataksen. Man har nu

$$(y_1 + \Delta y)^2 = 2p(x_1 + \Delta x)$$

og

$$y_1^2 = 2px_1\,,$$

altsaa

$$(y_1 + \Delta y)^2 - y_1^2 = 2p\Delta x$$

eller

$$(y_1 + \Delta y + y_1)(y_1 + \Delta y - y_1) = 2p\Delta x$$

eller

$$(2y_1 + \Delta y)\Delta y = 2p\Delta x\,,$$

følgelig

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2p}{2y_1 + \Delta y}.$$

Heraf faas

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{y_1}.$$

Ligningen for en Normal gjennem Punktet (x_1, y_1) er

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)\,,$$

og Ligningen for en Normal gjennem Punktet $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ er

$$y - (y_1 + \Delta y) = -\frac{y_1 + \Delta y}{p}[x - (x_1 + \Delta x)]\,.$$

Koordinaterne x og y til disse to Normalers Skjæringspunkt findes efter nogle Reduktioner at være

$$x = y_1\frac{\Delta x}{\Delta y} + x_1 + p + \Delta x\,,$$

$$y = -\frac{y_1(y_1 + \Delta y)}{p}\,\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Skal dette Skjærningspunkt være Krumnningscentret, saa gaar man til Grændsen for aftagende Δx og Δy, i hvilket Fald man har

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{y_1} \quad \text{eller} \quad \lim\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_1}{p}\,.$$

Følgelig ere Krumningscentrets Koordinater

$$x = \frac{y_1^2}{p} + x_1 + p$$

og

$$y = -\frac{y_1^3}{p}.$$

Betegner nu r Krumningsradien, saa faas, naar denne udtrykkes i Funktion af Abscissen,

$$r = \pm\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \pm\, p^{-\frac{1}{2}}(2x_1 + p)^{\frac{3}{2}}.$$

Anmærkning. Bestemmes i Parabolens Ligning $y_1^2 = 2px_1$ Størrelserne x_1 og y_1 ved Hjæp af Krumningscentrets Koordinater, saa faar man Evolutens Ligning

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$

Ellipsen. Kurvens Ligning i retvinklet Koordinatsystem er $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Et Kurvepunkts Koordinater være x_1 og y_1, et andet Kurvepunkts Koordinater være $(x_1 + \varDelta x)$ og $(y_1 + \varDelta y)$. Man har nu

$$a^2(y_1 + \varDelta y)^2 + b^2(x_1 + \varDelta x)^2 = a^2b^2$$

og

$$a^2y_1^2 + a^2x_1^2 = a^2b^2,$$

altsaa

$$a^2[(y_1 + \varDelta y)^2 - y_1^2] = -\, b^2[(x_1 + \varDelta x)^2 - x_1^2]$$

eller

$$a^2(y_1 + \varDelta y + y_1)(y_1 + \varDelta y - y_1) = -\, b^2(x_1 + \varDelta x + x_1)(x_1 + \varDelta x - x_1)$$

eller

$$a^2(2y_1 + \varDelta y)\varDelta y = -\, b^2(2x_1 + \varDelta x)\varDelta x,$$

følgelig

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = -\frac{b^2(2x_1 + \varDelta x)}{a^2(2y_1 + \varDelta y)}.$$

Gaar man til Grændsen for aftagende $\varDelta x$ og $\varDelta y$, saa faaes

$$\lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Ligningen for en Normal gjennem Punktet (x_1, y_1) er

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

og Ligningen for en Normal gjennem Punktet $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ er

$$y - (y_1 + \Delta y) = \frac{a^2(y_1 + \Delta y)}{b^2(x_1 + \Delta x)}[x - (x_1 + \Delta x)].$$

Koordinaterne x og y til disse to Normalers Skjæringspunkt findes efter nogle Reduktioner at være

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cdot \frac{x_1(x_1 + \Delta x)\Delta y}{y_1 \Delta x - x_1 \Delta y},$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1(y_1 + \Delta y)\Delta x}{y_1 \Delta x - x_1 \Delta y}.$$

Disse Ligninger giver følgende Form:

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cdot \frac{x_1(x_1 + \Delta x)}{y_1 \frac{\Delta x}{\Delta y} - x_1}, \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1(y_1 + \Delta y)}{y_1 - x_1 \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Skal dette Skjæringspunkt være Krumningscentret, saa gaar man til Grændsen for aftagende Δx og Δy, i hvilket Fald man har

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \quad \text{eller} \quad \lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Indsættes disse Værdier, og indfører man Størrelsen $c^2 = a^2 - b^2$, saa faar man Krumningscentrets Koordinater

$$x = \frac{c^2 x_1^3}{a^4}, \qquad y = -\frac{c^2 y_1^3}{b^4}.$$

Betegner nu r Krumningsradien, saa faaes, naar denne udtrykkes i Funktion af Abscissen,

$$r = \pm\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \pm\frac{(a^4 - c^2 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

Anmærkning. Sætter man for Kortheds Skyld $\frac{c^2}{b} = \beta$

og $\frac{c^2}{a} = \alpha$, saa faar Evolutens Ligning følgende Form

$$\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 .$$

Hyperbolen. Kurvens Ligning i retvinklet Koordinatsystem er $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$, og man ser let, at man kan bruge en Fremgangsmaade, som er analog med den under Ellipsen anførte.

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. Dillner.

(Forts. fr. sid. 179).

Tillämpning på algebra.

42. Vi hafva i § 39 antydt, huruledes den algebraiska kalkylen är att betrakta som ett enskildt fall af den geometriska. Vi vilja nu ur denna synpunkt lemna en närmare belysning öfver betydelsen af de i Inled. (1')–(4') framstälda multiplikationslagarne för algebraiska qvantiteter. Dessa lagar få här med stöd af (14) följande form:

$$\begin{aligned} a_0 \,.\, b_0 &= (ab)_0 \\ a_\pi \,.\, b_0 &= (ab)_\pi \\ a_0 \,.\, b_\pi &= (ab)_\pi \\ a_\pi \,.\, b_\pi &= (ab)_{2\pi} \end{aligned}$$

och tolkas i ordning sålunda:

1:o *ett tal i grundrigtningen* (b_0), *multipliceradt med ett tal a och hänfördt till en ny grundrigtning, som bildar med den gamla grundrigtningen vinkelen* 0, *ger till resultat ett tal ab i den ursprungliga grundrigtningen;*

2:o *ett tal i grundrigtningen* (b_0), *multipliceradt med ett tal a och hänfördt till en ny grundrigtning, från hvilken den gamla grundrigtningen bestämmes af vinkelen* π, *ger till re-*

sultat ett tal ab i den rigtning, som är motsatt den nya grundrigtningen;

3:o *ett tal i den negativa grundrigtningen* (b_π), *multipliceradt med ett tal a och hänfördt till en ny grundrigtning, som bildar med den gamla grundrigtningen vinkelen* 0, *ger till resultat ett tal ab i den negativa grundrigtningen;*

4:o *ett tal i den negativa grundrigtningen* (b_π), *multipliceradt med ett tal a och hänfördt till en ny grundrigtning, från hvilken den gamla grundrigtningen bestämmes af vinkelen* π, *ger till resultat ett tal ab i den nya grundrigtningen.*

43. Det är nu på samma sätt möjligt att i öfverensstämmelse med denna tolkning och med stöd af (20) närmare belysa betydelsen af den algebraiska multiplikationslagen för binomer och polynomer. Således, om k, k_1, k_2 k_3 beteckna hela tal eller noll, erhålles

$$(a_{k\pi}+b_{k_1\pi})(c_{k_2\pi}+d_{k_3\pi})=ac_{(k+k_2)\pi}+bc_{(k_1+k_2)\pi}+ad_{(k+k_3)\pi}+bd_{(k_1+k_3)\pi}$$

hvilken formel uttrycker, *att summan* $(c_{k_2\pi}+d_{k_3\pi})$, *multiplicerad med modylen för summan* $(a_{k\pi}+b_{k_1\pi})$ *och reducerad till ny grundrigtning förmedelst den senare summans argument, ger till resultat en summa, hvars termer bildas genom att multiplicera hvarje term i den förra summan med hvarje term i den senare.*

44. Vi hafva i § 39 antydt, huruledes den algebraiska kalkylen är att betrakta såsom ett enskildt fall af den geometriska. Hvad vi hos den algebraiska qvantiteten kallat *positiv* och *negativ sättning* (jfr Inled.) utgör hos den geometriska *positiv* och *negativ grundrigtning; att reducera till ny sättning* sammanfaller således med *att reducera till ny grundrigtning förmedelst argument af formen* $k\pi$ ($k = 0$ eller ett helt tal). Likasom man enligt den Cartesianska grundsatsen räknar med positiva och negativa tal såsom betecknande längder i motsatta rigtningar, så att, då t. ex. $+3$ betecknar en längd i en rigtning (grundrigtningen), så

betecknar -3 samma längd i den motsatta rigtningen, likaså kunna tal, tecknade med argumenten 0, π, 2π etc., i en räkning beteckna algebraiska qvantiteter af motsatta sättningar, så att t. ex. 3_0, $3_{2\pi}$ etc. kan beteckna en fordran, på samma gång som 3_π, $3_{3\pi}$ etc. betecknar en lika stor skuld o. s. v., då nämnligen i begge fallen såväl tecknet $\pm$ som argumentet $k\pi$ *hufvudsakligen* afser att gifva den talbetecknade qvantiteten en *additiv* eller *subtraktiv* karakter. Den invändningen, att den geometriska kalkylen, såsom uteslutande grundad på geometriska begrepp, icke vore tillämplig på qvantiteter in abstracto, bemötes med den erinran, att geometriska talförhållanden ständigt tilllämpats på qvantiteter, som blott haft det gemensamt med de geometriska att kunna med tal uttryckas. Att t. ex. dela en summa penningar, en värmemängd, en vigt o. s. v. efter »aurea sectio» (Eukl. II: 11), förutsatt att det på konstruktion grundade geometriska förhållandet är i tal uttryckt, är utan tvifvel en både sund och rimlig tanke; lika sundt och rimligt tänkt är det ock att i en räkneformel, hvilken ursprungligen gäller för talbetecknade linier af additiv eller subtraktiv natur (af formen $a_{k\pi}$), införa qvantiteter af hvad slag som helst, blott de kunna fattas under positiv eller negativ talform. Vi vilja belysa detta med ett exempel. Enligt den allmänna multiplikationslagen ha vi $(a_\alpha + b_\beta)(a_\alpha + b_{\beta+\pi}) = a^2_{2\alpha} + b^2_{2\beta+\pi}$, hvilken formel enligt § 38 kan geometriskt konstrueras. För $\alpha = k\pi$ och $\beta = k_1\pi$ erhålles $(a_{k\pi} + b_{k_1\pi})(a_{k\pi} + b_{k_1\pi+\pi}) = a^2_{2k\pi} + b^2_{2k_1\pi+\pi}$, hvilken formel måste vara sann för hvilka positiva och negativa tal som helst vi behaga införa i stället för $a_{k\pi}$ och $b_{k_1\pi}$, *och följaktligen för hvilka qvantiteter som helst, hvilka kunna med positiva eller negativa tal betecknas.* Vi kunna derföre uttala följande för den algebraiska kalkylen synnerligen vigtiga grundsats: *det är under alla omständigheter tillåtet och fullt rigtigt att i en räkneformel, hvars deduktion är rent geometrisk och hvars alla typer äro af formen* $a_{k\pi}$, *införa hvilka qvantiteter som helst, blott de kunna fattas under form af positiva eller negativa tal.* Med stöd af denna grundsats framstå de i föreg. §§ 42 & 43 framstälda algebraiska grundformler med full bevisningsstyrka, om hvars delvisa frånvaro på rent algebraisk grund de *konventionella* (!) räknelagarne och de ända till våra dagar fortsatta disputerna om de negativa qvantiteternas mer eller mindre berättigade plats inom vetenskapen nogsamt bära vittne; än mer, den algebraiska kalkylen, sedd i sitt intima samband med en ännu generellare kalkyl, den geometriska, hvarpå de imaginära symbolerna oupphörligt liksom peka, framstår härigenom i ett nytt ljus och med nya resurser att häfva de olägenheter, som ännu vidlåda honom.

Tillämpning på trigonometri.

45. Genom att sida med sida multiplicera de två likheterna

$$1_\alpha = \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{och} \quad 1_{-\alpha} = \mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha_{\frac{1}{2}\pi}$$

erhålles

$$1 = \mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Sin}^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Detta multiplikations resultat kan enligt § 38 konstrueras på följande sätt. Vi låta de två anförda likheterna representeras af trianglarna OBP och CEF (fig. 35). Genom att på OB och BP konstruera med CFE likformiga och homologt belägna trianglar OBG och BPG erhålles vägen $OGBGP$, hvilken, reducerad till OP som ny grundrigtning förmedelst argumentet $-\alpha$, ger till resultat $OP = OG + GP$, d. v. s. $1 = \mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Sin}^2\alpha$.

46. Genom att addera och subtrahera de två anförda likheterna erhålles

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,\alpha &= \tfrac{1}{2}(1_\alpha + 1_{-\alpha}) \\ \mathrm{Sin}\,\alpha_{\frac{1}{2}\pi} &= \tfrac{1}{2}(1_\alpha - 1_{-\alpha}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

I fig. 36 representeras $1_\alpha + 1_{-\alpha}$ af vägen OBP samt $1_\alpha - 1_{-\alpha}$ af vägen OBP_1, hvilka vägar äro respektive lika med $2 \operatorname{Cos} \alpha$ och $2 \operatorname{Sin} \alpha_{\frac{1}{2}\pi}$, då således de af perpendiklarne från B afskurna linierna OC och OD äro $\operatorname{Cos} \alpha$ och $\operatorname{Sin} \alpha_{\frac{1}{2}\pi}$.

47. Om vi sida med sida multiplicera de två likheterna

$$1_\alpha = \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{och} \quad 1_\beta = \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Sin} \beta_{\frac{1}{2}\pi}$$

erhålles

$$1_{\alpha+\beta} = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta_{\frac{1}{2}\pi} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta_{\frac{1}{2}\pi} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta_{\pi},$$

hvilken likhet efter projiciering sönderfaller i följande kända formler:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \\ \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (27).$$

Detta multiplikations resultat kan enligt § 38 konstrueras på följande sätt. Vi låta de två multiplicerade likheterna representeras af trianglarne OBP och CEF (fig. 37). Genom att på OB och BP konstruera med CFE likformiga och homologt belägna trianglar OBG och BPH erhålles vägen $OGBHP$, hvilken, reducerad till OG som ny grundrigtning förmedelst argumentet β, ger till resultat $OG - GI$ ($GI \# HP$) i grundrigtningen samt $GB + BH$ i den vinkelräta rigtningen, hvilket öfverensstämmer med formlerna (27).

48. Genom att sida med sida multiplicera likheterna

$$1_\alpha = \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{och} \quad 1_{-\beta} = \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sin} \beta_{\frac{1}{2}\pi}$$

erhålles

$$1_{\alpha-\beta} = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta_{\frac{1}{2}\pi} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta_{\frac{1}{2}\pi} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta,$$

hvaraf de kända formlerna:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\alpha-\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \\ \operatorname{Sin}(\alpha-\beta) &= -\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (28).$$

Detta multiplikations resultat kan på enahanda sätt konstrueras genom att låta de två multiplicerade likheterna representeras af trianglarne OBP och CEF (fig. 38). Man konstruere på OB och BP med CFE likformiga och homologt belägna trianglar OBG och BPH, hvaraf erhålles vägen $OGBHP$, hvilken, reducerad till OG som ny grundrigtning förmedelst argumentet $-\beta$, ger till resultat $OG + HP$ i grundrigtningen samt $-GB + BH$ i den vinkelräta rigtningen, hvilket öfverensstämmer med (28).

49. Genom att qvadrera och kubera likheten $1_\alpha = \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha_{\frac{1}{2}\pi}$ fås

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Cos} 2\alpha &= \operatorname{Cos}^2\alpha - \operatorname{Sin}^2\alpha \\ \operatorname{Sin} 2\alpha &= 2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (29),$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Cos} 3\alpha &= \operatorname{Cos}^3\alpha - 3\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}^2\alpha \\ \operatorname{Sin} 3\alpha &= 3\operatorname{Cos}^2\alpha \operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}^3\alpha\end{aligned}\right\} \ldots\ (30).$$

Det förra multiplikations resultatet (29) representeras i öfverensstämmelse med (27) af vägarne $OG - HP$ och GH (fig. 39); det senare multiplikations resultatet (30) åter representeras af vägarne $OI - KL$ och $IK - LP$.

Genom att upphöja likheten $1_\alpha = \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha_{\frac{1}{2}\pi}$ till m^{te} dignitet är det på enahanda sätt möjligt att uttrycka $\operatorname{Cos} m\alpha$ och $\operatorname{Sin} m\alpha$ i digniteter af $\operatorname{Cos}\alpha$ och $\operatorname{Sin}\alpha$ *(Moivre's teorem)*. Således är

$$1_{m\alpha} = \operatorname{Cos}^m\alpha + \frac{m}{1}\operatorname{Cos}^{m-1}\alpha(\operatorname{Sin}\alpha_{\frac{1}{2}\pi}) + \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{m-2}\alpha(\operatorname{Sin}\alpha_{\frac{1}{2}\pi})^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{Cos}^{m-3}\alpha(\operatorname{Sin}\alpha_{\frac{1}{2}\pi})^3 + \ldots,$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Cos} m\alpha &= \operatorname{Cos}^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{m-2}\alpha \operatorname{Sin}^2\alpha + \ldots \\ \operatorname{Sin} m\alpha &= \frac{m}{1}\operatorname{Cos}^{m-1}\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{Cos}^{m-3}\alpha\operatorname{Sin}^3\alpha + \ldots\end{aligned}\right\} (31).$$

Enligt ofvan gifna antydan kunna vi steg för steg genom konstruktion följa denna dignitets utveckling.

50. Genom att qvadrera likheterna (26) erhålles

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Cos}^2\alpha &= \tfrac{1}{4}(1_{2\alpha} + 2 + 1_{-2\alpha}) = \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{Cos} 2\alpha) \\ -\operatorname{Sin}^2\alpha &= \tfrac{1}{4}(1_{2\alpha} - 2 + 1_{-2\alpha}) = \tfrac{1}{2}(-1 + \operatorname{Cos} 2\alpha)\end{aligned}\right\} . (32).$$

Denna qvadrering belyses enligt § 38 genom följande konstruktion. Vi låta den förra likheten (26), satt under formen $2 \operatorname{Cos} \alpha = 1_\alpha + 1_{-\alpha}$, representeras in duplo af trianglarne *OBP* och *CEF* (fig. 40). Genom att på *OB* och *BP* konstruera med *CFE* likformiga och homologt belägna trianglar *OBG* och *BPH* fås vägen *OP* = vägen *OGBHP*, hvilken likhet, multiplicerad med $2 \operatorname{Cos} \alpha$, ger till resultat å ena sidan $4 \operatorname{Cos}^2 \alpha$ och å den andra $1_{2\alpha} + 2 + 1_{-2\alpha}$, hvaraf ofvan anförda resultat (32) omedelbart följer.

Genom att åter låta den senare likheten (26), satt under formen $2 \operatorname{Sin} \alpha_{\frac{1}{2}\pi} = 1_\alpha - 1_{-\alpha}$, representeras in duplo af trianglarne *OBP* och *CEF* (fig. 41) och genom en analog konstruktion fås vägen *OP* = vägen *OGBHP*, hvilken likhet, reducerad till ny grundrigtning *OI* förmedelst argumentet $\frac{1}{2}\pi$ och multiplicerad med $2 \operatorname{Sin} \alpha$, ger till resultat å ena sidan $\operatorname{Sin}^2 \alpha_\pi$ och å den andra $1_{2\alpha} - 2 + 1_{-2\alpha}$, hvaraf ofvan anförda resultat (32) omedelbart följer.

Genom att höja likheterna (26) till tredje, fjerde digniteten etc. kunna vi på enahanda sätt uttrycka tredje, fjerde digniteten etc. af $\operatorname{Cos} \alpha$ och $\operatorname{Sin} \alpha$ i första digniteten af Cos och Sin för multipla bågar af α.

51. Emedan $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ och $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, så är

$$1_\alpha + 1_\beta = 1_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \{1_{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} + 1_{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\} = 1_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot 2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

hvaraf genom projiciering

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Cos} \beta = 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Sin} \beta = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{array}\right\} \quad . \ . \ (33).$$

På samma sätt erhålles

$$1_\alpha - 1_\beta = 1_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \{1_{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} - 1_{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\} = 1_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)_{\frac{1}{2}\pi},$$

hvaraf genom projiciering

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \beta = -2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Sin} \beta = 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{array}\right\} \quad . \ . \ (34).$$

De i föreg. §§ 45—51 utvecklade formler utgöra nu den *plana trigonometriens* grundformler, och vi se, huruledes denna del af matematiken på ett högst enkelt och naturligt sätt så att säga framspringer ur den geometriska kalkylens första och enklaste operationer, addition och multiplikation, med dertill hörande konstruktioner.

Tillämpning på triangeln.

52. En triangel ABC (fig. 42), hvars sidor betecknas med a, b, c och vidstående yttre vinklar med α, β, γ, representeras, då linien a_0 eller BC tages till grundrigtning, af följande likhet

$$a_0 + b_\beta + c_{\beta+\gamma} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Genom att multiplicera denna likhet med 1_α eller, som är detsamma, genom att reducera henne till AB som ny grundrigtning erhålles likheten

$$a_\alpha + b_{\alpha+\beta} + c_{\alpha+\beta+\gamma} = 0,$$

hvilken ock kan tecknas

$$a_\alpha + b_{\alpha+\beta} + c_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

hvaraf följer, att

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Då $\alpha + B = \beta + C = \gamma + A = \pi$, så måste $A + B + C = \pi$ (jfr Eukl. I: 32).

Genom att multiplicera likheten (36) med 1_γ eller reducera henne till CA som ny grundrigtning erhålles en analog likhet, hvilken vi lemna åsido såsom obehöflig vid våra deduktioner.

53. Genom att taga de vinkelräta projektionerna af (35) och (36) erhålles

$$b \operatorname{Sin} \beta + c \operatorname{Sin}(\beta + \gamma) = 0 \quad \text{och} \quad a \operatorname{Sin} \alpha + b \operatorname{Sin}(\alpha + \beta) = 0,$$

hvilka likheter, efter utbyte enligt (37) af $\beta + \gamma$ och $\alpha + \beta$ mot respektive $2\pi - \alpha$ och $2\pi - \gamma$, kunna sättas under formen

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{Sin} \beta} = \lambda \quad \ldots \ldots \quad (38),$$

der λ är en gemensam beteckning för de lika qvoterna.

54. Genom att sätta (35) under formen

$$a_\pi = 1_\beta . (b_0 + c_\gamma)$$

erhålles enligt §§ 40 och 41

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{Cos} \gamma$$

samt

$$\pi - \beta = \operatorname{arctg} \frac{c \operatorname{Sin} \gamma}{b + c \operatorname{Cos} \gamma}.$$

Analoga formler erhållas för de öfriga sidorna och vinklarne.

Likaledes genom att sätta (36) under formen

$$a_{\pi+\alpha} = 1_\beta . (b_\alpha + c_{-\beta}),$$

erhålles

$$\pi + \alpha - \beta = \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{Sin} \alpha - c \operatorname{Sin} \beta}{b \operatorname{Cos} \alpha + c \operatorname{Cos} \beta}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha - \operatorname{Sin}^2 \beta}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta} \text{ [enligt (38)]}.$$

55. Genom att multiplicera (36) med $1_{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ fås

$$a_{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} + b_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} + c_{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = 0,$$

hvaraf genom projiciering

$$a \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + (b + c) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0,$$

$$a \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + (b - c) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0,$$

eller ock omedelbart enligt § 41

$$\pi + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{arctg} \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad \ldots \ldots \quad (39).$$

Vi kunna genom konstruktion belysa dessa formler på följande sätt. Låt ABC (fig. 43) vara den af likheten (36) representerade triangeln, hänförd till AB som grundrigtning; tag vidare A till medelpunkt och rita en halfcirkel DCE, förena DC och drag $DF // BC$. $\wedge BDC$ bevisas nu lätteligen vara $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (jfr sid. 69), då således en multiplikation med $1_{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ innebär en reduktion från AB till DC som ny grundrigtning, med hvilken rigtning således sidorna a, b, c bilda resp. vinklarne $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ [$= \wedge FDC$], $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ och $-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. I öfverensstämmelse med den trigonom. satsen på sid. 69 ha vi således

$$\frac{c-b}{c+b} = \frac{FC}{EC} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}[\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)]},$$

hvilken formel öfverensstämmer med (39).

Vi se således, huruledes vi, genom denna enkla operation på triangelns likhet (36) [multipl. med $1_{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$], omedelbart hänvisas till den å sid. 69 gifna konstruktionen på »den tredje triangelhändelsen», hvilken konstruktion utan tvifvel är den enklast möjliga.

Genom att multiplicera (36) med $1_{\frac{1}{2}\gamma}$ erhålles med stöd af (37)

$$a_{\alpha+\frac{1}{2}\gamma} + b_{-\frac{1}{2}\gamma} + c_{\frac{1}{2}\gamma} = 0,$$

hvaraf enligt § 41

$$\pi + \alpha + \tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{arctg}\frac{c-b}{c+b}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

hvilken formel för »tredje händelsen» omedelbart ger värdet på α samt belyses i enlighet med föregående af fig. 43, enär den nya grundrigtningen AG (bisektricen till γ) är $// DC$.

56. Det skulle nu stå oss öppet att ur (35) härleda nya trigonometriska relationer för triangeln likasom ock att ur likheten för en månghörning i allmänhet härleda de för honom gällande trigonometriska samband mellan sidor och vinklar; men vi vilja stadna vid de redan gifna antydningarna, öfverlemnande åt läsaren att på den geometriska kalkylens hittills lagda grunder bygga de utvecklingar, som för honom kunna vara af något intresse.

Tillämpning på analytisk geometri.

Koordinat-transformationen.

57. *Transformation från ett rätvinkligt till ett annat rätvinkligt system.* — Om en punkt P (fig. 44), hänförd till O som origo och OA som grundrigtning och bestämd af de rätvinkliga koordinaterna $OA = \xi$ och $AP = \eta$, hänföres till en ny grundrigtning OB, från hvilken den gamla grundrigtningen bestämmes af $\wedge\, \alpha$, så finnes följande samband mellan punktens nya rätvinkliga koordinater $OB = x$ och $BP = y$ och de gamla koordinaterna ξ och η:

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = 1_\alpha . (\xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

hvaraf fås efter utförandet af multiplikationen

$$(\text{Cos}\,\alpha + \text{Sin}\,\alpha_{\frac{1}{2}\pi})(\xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}):$$

$$x = \xi\,\text{Cos}\,\alpha - \eta\,\text{Sin}\,\alpha,$$

$$y = \xi\,\text{Sin}\,\alpha + \eta\,\text{Cos}\,\alpha.$$

Vilja vi åter uttrycka ξ och η i x och y, så hafva vi att multiplicera (40) med $1_{-\alpha}$, då

$$\xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi} = 1_{-\alpha} . (x + y_{\frac{1}{2}\pi}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41),$$

hvaraf på enahanda sätt fås:

$$\xi = x\,\text{Cos}\,\alpha + y\,\text{Sin}\,\alpha,$$

$$\eta = -x\,\text{Sin}\,\alpha + y\,\text{Cos}\,\alpha.$$

Denna koordinat-transformation innebär således i förra fallet en reduktion af vägen $\xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$ till ny grundrigtning förmedelst reduktionsargumentet α, då vägen $x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ sättes $=$ den reducerade vägen, samt i senare fallet en reduktion af vägen $x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ till ny grundrigtning förmedelst reduktionsargumentet $-\alpha$, då vägen $\xi + \eta_{\frac{1}{2}\pi}$ sättes $=$ den reducerade vägen.

58. *Transformation från ett snedvinkligt till ett annat snedvinkligt system.* — Om en punkt P (fig. 45), hänförd till O som origo och OA som gruudtigtning och bestämd af koordinaterna $OA = \xi$ och $AP = \eta$, hvilka bilda $\wedge\, \beta - \alpha$, hänföres till en ny grundrigtning OB, från hvilken den

gamla grundrigtningen bestämmes af $\wedge\, \alpha$, så finnes följande samband mellan punktens nya koordinater $OB = x$ och $BP = y$, hvilka bilda vinkelen θ, och de gamla koordinaterna ξ och η:

$$x + y_\theta = 1_\alpha . (\xi + \eta_{\beta-\alpha}) = \xi_\alpha + \eta_\beta \quad \ldots\ldots \quad (42),$$

hvaraf fås

$$x + y \operatorname{Cos} \theta = \xi \operatorname{Cos} \alpha + \eta \operatorname{Cos} \beta,$$
$$y \operatorname{Sin} \theta = \xi \operatorname{Sin} \alpha + \eta \operatorname{Sin} \beta.$$

Genom att multiplicera (42) med $1_{-\theta}$ erhålles

$$x_{-\theta} + \eta = \xi_{\alpha-\theta} + \eta_{\beta-\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43),$$

hvaraf fås

$$x \operatorname{Cos} \theta + \eta = \xi \operatorname{Cos} (\alpha - \theta) + \eta \operatorname{Cos} (\beta - \theta),$$
$$-x \operatorname{Sin} \theta = \xi \operatorname{Sin} (\alpha - \theta) + \eta \operatorname{Sin} (\beta - \theta).$$

Genom att multiplicera (42) med $1_{-\beta}$ erhålles

$$\xi_{\alpha-\beta} + \eta = x_{-\beta} + y_{\theta-\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44),$$

hvaraf fås

$$\xi \operatorname{Cos} (\alpha - \beta) + \eta = x \operatorname{Cos} \beta + y \operatorname{Cos} (\theta - \beta),$$
$$\xi \operatorname{Sin} (\alpha - \beta) = - x \operatorname{Sin} \beta + y \operatorname{Sin} (\theta - \beta).$$

Genom att slutligen multiplicera (42) med $1_{-\alpha}$ erhålles

$$\xi + \eta_{\beta-\alpha} = x_{-\alpha} + y_{\theta-\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45),$$

hvaraf fås

$$\xi + \eta \operatorname{Cos} (\beta - \alpha) = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} (\theta - \alpha),$$
$$\eta \operatorname{Sin} (\beta - \alpha) = - x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Sin} (\theta - \alpha).$$

Anm. Man jemnföre dessa fyra formelgrupper med de i Géométrie Analytique par Briot & Bouquet förekommande (§ 51, ed. 4:e).

Det är nu lätt att, i öfverensstämmelse med föreg. §, ur den geometriska kalkylens synpunkt tolka de i (42)—(45) förekommande koordinat-transformationerna.

58. Vi förbigå »*transformation eller flyttning till nytt origo*» såsom omedelbart sammanfallande med vår *reduktion till nytt origo*.

Tillämpning på mekanik.

59. En kraft, såsom bestämd till storlek och rigtning, kan representeras af en geometrisk komplex, då nämnligen kraftens angreppspunkt tages till origo och den rigtning, hvartill kraftens rigtning är hänförd, tages till grundrigtning.

60. Om i likheten

$$r_\theta = a_\alpha + b_\beta ,$$

representerande vägarne OP och OBP, hänförda till O som origo och OA som grundrigtning (fig. 46), vägstycket b_β flyttas utan rigtningsförändring från läget BP till läget OC, så representerar r_θ, såsom diagonal i parallelogr. $OBPC$, resultanten till de af a_α och b_β betecknade kraftkomponenterna; vidare, om i likheten

$$s_\sigma = a_\alpha + b_\beta + c_\gamma ,$$

representerande vägarne OQ och $OBPQ$ (fig. 47), vägstyckena b_β och c_γ flyttas utan rigtningsförändring från lägena BP och PQ till lägena OC och OD, så representerar s_σ, såsom diagonal i parallelogr. $OPQD$, resultanten till de af r_θ och c_γ, d. v. s. af a_α, b_β och c_γ, betecknade kraftkomponenterna, o. s. v. för en geometrisk likhet af huru många termer som helst. Vi kunna derföre uttala följande för sambandet mellan mekaniken och den geometriska kalkylen synnerligen vigtiga sats:

Om de rätliniga vägstyckena i en geometrisk likhet flyttas utan rigtningsförändring, så att allas begynnelsepunkter sammanfalla i origo, så äro de af de särskilda membra representerade krafteffekterna lika; och omvändt: *en likhet mellan krafter, anbragta i samma punkt, öfvergår omedelbart i geometrisk, då de räta linier, som representera krafterna, flyttas utan rigtningsförändring, så att den efterföljandes begynnelsepunkt sammanfaller med den föregåendes slutpunkt.*

Så t. ex., om de rätliniga vägstyckena i likheten (35) eller $a_0 + b_\beta + c_{\beta+\gamma} = 0$ flyttas utan rigtningsförändring, så att de tre liniernas begynnelsepunkter sammanfalla i origo, så är resultanten af de af venstra membrum representerade krafterna noll, eller de tre krafterna a_0, b_β, $c_{\beta+\gamma}$ hålla hvarandra i jemnvigt; och omvändt: om de tre krafterna, anbragta i samma punkt, hålla hvarandra i jemnvigt, så kan af de linier, som representera dem, en triangel bildas genom att flytta b_β och $c_{\beta+\gamma}$ utan rigtningsförändring, så att b_β börjar, der a_0 slutar, och $c_{\beta+\gamma}$ börjar, der b_β slutar.

61. Om en kraft A_α eller PQ (fig. 48), hänförd till P som origo och PX som grundrigtning, hänföres till ett nytt origo O med bibehållande af samma grundrigtning OX, och om vidare det vinkelräta afståndet från O till kraftens rigtning betecknas med $a_{\alpha-\frac{1}{2}\pi}$, och vi sätta

$$A_\alpha = X + Y_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{och} \quad a_{\alpha-\frac{1}{2}\pi} = x + y_{\frac{1}{2}\pi},$$

så finna vi på följande enkla sätt momentet aA uttryckt i kraftens projektioner X och Y samt det vinkelräta afståndets projektioner x och y: vi ändra tecknen för argumenten i den senare likheten (jfr § 40) och hopmultiplicera henne med den förra, då

$$a_{\frac{1}{2}\pi-\alpha} \cdot A_\alpha = (x + y_{-\frac{1}{2}\pi})(X + Y_{\frac{1}{2}\pi})$$

eller

$$aA_{\frac{1}{2}\pi} = xX + yY + (xY - yX)_{\frac{1}{2}\pi},$$

hvaraf fås $xX + yY = 0$ samt momenteqvationen

$$aA = xY - yX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45).$$

Beteckna vi åter den motsatt rigtade kraften PQ' (samma fig.) med A_α, då vinkelräta afståndet blir $a_{\alpha+\frac{1}{2}\pi}$, och vi såsom förut sätta

$$A_\alpha = X + Y_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{och} \quad a_{\alpha+\frac{1}{2}\pi} = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$$

samt hopmultiplicera dessa likheter efter teckenförändring vid den senare likhetens argument, så fås

$$aA_{-\frac{1}{2}\pi} = xX + yY + (xY - yX)_{\frac{1}{2}\pi},$$

hvaraf momenteqvationen

$$-aA = xY - yX \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46).$$

Momentet af en kraft, som söker åstadkomma en vridning motsols såsom i den förra momenteqvationen har derföre *positiv* karakter, då deremot momentet af en kraft, som söker åstadkomma en vridning medsols såsom i den senare momenteqvation, har *negativ* karakter.

På grund af de i denna och föreg. § framstälda satser kunna vi nu med tillhjelp af den geometriska kalkylen utveckla alla de mekaniska lagar, som gälla för krafter i planet. (Forts.)

AFDELNING III*.

Om meteorologiska iakttagelser och den Theorellska registreringsapparaten vid Upsala Observatorium.

Af ROB. THALÉN.

Inom meteorologien, liksom inom hvarje annan empirisk vetenskap, måste man för att erhålla tillförlitliga resultat underkasta sig mödan att samla så många och så noggranna observationer som möjligt. Sjelfva arbetet vid observationernas anställande är dock för meteorologen förknippadt med en mängd svårigheter, som vanligen icke förekomma inom närslägtade vetenskaper. Under det att fysikern i sitt uppvärmda kabinet kan i all sköns ro anställa sina experiment, då tid och öfriga omständigheter synas honom dertill lämpliga, och genom ändamålsenliga anordningar af sina undersökningar framtvinga direkta svar på sina frå-

---

* Figuren 32 å taflan IV hörer till den, sid. 181, beskrifna luftpumpen af Deleuil.

gor, nödgas deremot meteorologen göra sina iakttagelser på förut bestämda tider och låta dem oafbrutet fortgå natt och dag, hela året om, efter den en gång utstakade planen. Han får dervid icke sky hvarken regn eller snö, storm eller köld, och vågar knapt någon enda gång undandraga sig sitt arbete af fruktan för, att det just under hans frånvaro skulle kunna inträffa något egendomligt fenomen, som borde tillvaratagas, eller vid hvars tolkning hans observationer kunde vara upplysande. Det ligger för öfrigt i sakens natur, att meteorologen vid studiet af de atmosferiska fenomenen icke kan ändra något af de vilkor, under hvilka de uppenbara sig, utan är inskränkt till att endast med sina observationer följa dem, och att detta måste ske i den ordning, fenomenen sjelfmant visa sig.

När det nu är hans uppgift att lära känna de förändringar, som oupphörligen försiggå i luftens tryck, temperatur, rörelse, fuktighetstillstånd, nederbörd och elektriska beskaffenhet, m. fl., och han för den skull samtidigt och oafbrutet, på det sätt vi redan nämnt, måste observera en mängd olika instrument, såsom barometer, termometer, anenometer, psychrometer, udometer, elektrometer, m. m., så inses genast, att en enda persons krafter omöjligen kunna vara tillräckliga för ett sådant Herkules-arbete. Enda möjliga sättet för åvägabringandet af dylika sammanhängande observationer är antingen att fördela arbetet mellan en mängd personer, hvilket åter i ett fattigt land, som ej förmår aflöna en stor observationspersonal, förutsätter ett allmännare intresse hos frivilliga deltagare, än man kan vänta med afseende på de i sig sjelfva just ej så synnerligen uppbyggliga meteorologiska iakttagelserna; eller ock att anförtro observationsgöromålen åt apparater, hvilka i följd af sin noggranna konstruktion kunna fullständigt ersätta en intelligent observatörs arbeten.

Visserligen hafva vi här i Upsala nyligen sett, att bland den akademiska ungdomen ett dylikt intresse verkligen förefunnits, äfvensom att detsamma för utförandet af de meteorologiska timobservationerna, kunnat oafbrutet under en så lång tid som utöfver fulla tre år tagas i anspråk, nämnligen från den 30 Maj 1865 till den 9 Aug. 1868; men detta förhållande, hvilket härstädes visserligen icke står alldeles enstaka *, måste väl i allmänhet anses såsom exceptionelt för universitetsstäder. Och måhända vi, utan att stöta någon bland de 125 deltagarne i detta berömvärda arbete, kunna våga antaga, att det gynsamma resultatet ändock bör till hufvudsakligaste delen tillskrifvas den outtröttliga ihärdighet, med hvilken D:r *Rubenson* förmått leda företaget från dess början allt intill dess slut, och det på ett så förtjenstfullt sätt, att af de omkring 28,000 timobservationerna å hvarje särskildt instrument nästan ingen enda gått förlorad eller måst såsom oduglig kasseras.

Sådana noggranna iakttagelser af de atmosferiska fenomenen, som vi nyss omnämnt, jemte observationernas beräkning, äro ur flere synpunkter att anse såsom en särdeles nyttig sysselsättning för den kunskapsökande ungdomen. Och att samma uppfattning gjort sig gällande äfven på andra orter, visar sig deraf, att det nyligen lärer inom de franska skolorna blifvit den studerande ungdomen ålagdt att öfva sig i dylika arbeten. Hvilken stor vinst bör kunna påräknas af många personers deltagande i de meteorologiska studierna, vare sig inom skolan eller vid universitetet, är äfven lätt att inse. Ty först och främst kommer på detta sätt en väl behöflig kunskap i meteorologien att spridas bland allmänheten, hvilket åtminstone med tiden bör kunna blifva en hälsosam motvigt mot de rent af befängda åsigter om orsakerna till de atmosferiska fenomenen, som

* De jordmagnetiska observationerna enligt Gauss's system, som att börja med under flera och sedermera under fyra terminer om året hvar femte minut anstäldes härstädes från 1836 till 1852, utfördes under Prof. G. Svanbergs ledning till största delen af äldre studerande vid universitetet. (Nämnda observationer publicerades årligen af Gauss och Weber i tidskriften: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, så länge denna tidskrift utkom.)

nu så ofta göra sig gällande. Vidare, och med särskildt afseende fästadt på vårt vidsträckta land, bör det ofvannämnda intresset för meteorologisk verksamhet blifva fruktbringande äfven för vetenskapen sjelf, derigenom nämnligen att tillförlitliga iakttagelser från olika orter framdeles kunna med lätthet anskaffas, en fördel så stor med hänsyn till den moderna meteorologiens nuvarande riktning, att den icke kan nog högt uppskattas. Men oaktadt det således både för enskildt och allmänt gagn är högeligen att önska, att tillfälle till undervisning i denna vetenskap såsom särskildt läroämne måtte fortfarande beredas de studerande vid universitetet, synes oss likväl den förändring för framtiden böra ega rum, att sjelfva arbetssättet eller formen för undervisningens meddelande göres mindre betungande såväl för observatörerna som för den person, hvilken skall öfvervaka deras arbete. Vi kunna derföre icke annat än gilla den redan vidtagna åtgärden, att medelst sjelfregistrerande instrument till hufvudsaklig del * söka vinna samma resultat, som timobservationerna hittills afsett.

Det hade också sedan lång tid tillbaka varit påtänkt att vid Upsala observatorium införa sjelfregistrering för meteorologiskt behof, men svårigheten var att göra ett godt val bland den mängd apparater, som för närvarande verkligen finnas i bruk vid flere af de större meteorologiska anstalterna inom Europa.

De för ifrågavarande ändamål hittills inventerade apparaterna kunna grupperas i två hufvudklasser: de *fotografiska* och de *mekaniska.* Till den förra klassen höra de i Greenwich, Oxford och Kew begagnade; de i München och Rom deremot till den senare, till hvilken sistnämnda grupp äfven hörer den af Docenten *Theorell* konstruerade appa-

* Det gifves nämnligen en mängd atmosferiska fenomen af den art, att de svårligen kunna iakttagas annat än genom observatörens personliga uppfattning. Dit räkna vi förnämligast de optiska fenomenen, såsom vädersolar, regnbågar, norrsken, zodiakalljus, luftens polarisation, himmelens och molnens utseende m. m.

rat, som vid Upsala observatorium blifvit antagen och der sedan Augusti månads början arbetar. Vi skola i det följande, så långt utrymmet medgifver, söka att i allmänna drag lemna en beskrifning på densamma.

Theorells registreringsapparat.

Denna apparat registrerar angifvelserna hos barometern och två termometrar, af hvilka den ena har torr, den andra fuktig kula, och denna registrering verkställes medelst elektricitet. Hvart och ett af dessa tre instrument står nämnligen genom sin qvicksilfvermassa i ledande förbindelse med en galvanisk stapel, derigenom att en i glasväggen inlödd platinatråd blifvit förenad med stapelns ena pol. Emedan barometern är en vanlig häfvarebarometer, och dess rör således har formen af ett U, samt termometerrören äro i sin öfra ända öppna, inses omedelbart, att om man i något af dessa rör nedsänker den andra poltråden från stapeln, så sker strömslutning i samma ögonblick, som denna poltråd kommer i metallisk beröring med qvicksilfverytan *. Den sålunda alstrade strömmen genomlöper nu en elektromagnet, hvilken medelst ett stift vid sitt rörliga ankare inhugger ett märke i det papper, som bekläder ytan på en med konstant hastighet roterande cylinder. Om man så vill, kan denna del af apparaten liknas vid en vanlig elektrisk telegraf af Morses konstruktion; telegrafnyckeln skulle då föreställas genom den rörliga poltråden, skrifapparaten genom den här befintliga elektromagneten och den löpande pappersrimsan genom cylinderns med papper beklädda yta.

Ifall elektromagneten ständigt stode stilla, skulle de på papperet inhuggna märkena naturligtvis komma att bilda en rät linie, af hvilkas lägen man dock icke kunde sluta något

---

* Engelske fysikern Wheatstone har först föreslagit denna metod för registrering af temperaturen, och pater Secchi i Rom har äfven för detta ändamål användt densamma i sin meteorograf.

till instrumentens angifvelser. Vore magneten deremot rörlig i vertikal led och parallelt således med cylinderns rotationsaxel, såsom verkligen är händelsen, samt denna rörelse vore liktidig och lika stor med rörelsen hos den poltråd, som nedfördes till qvicksilfret, så måste märket tydligtvis komma att inhuggas högre upp eller lägre ned på papperet, alltefter qvicksilfverpelarens egen större eller mindre höjd i röret. I följd af dessa båda mot hvarandra vinkelräta rörelser hos cylindern och magneten komma märkena att ligga på en mer eller mindre komplicerad kroklinie, och deras afstånd från någon rät linie såsom utgångspunkt (abskissaxel) måste då direkt angifva instrumentens stånd vid registreringsögonblicken.

För åstadkommandet af denna samtidiga och lika stora rörelse hos poltråden och elektromagneten, ha de blifvit fästade i hvar sin ända af en likarmad häfstång, liknande en vanlig vågbalans, så att, då den ena rör sig t. ex. en decimallinie nedåt, den andra går ett fullkomligt lika långt stycke uppåt. Ville man mångdubbla den enas väg i förhållande till den andras, så behöfde man, såsom sjelfklart är, endast förändra förhållandet mellan längderna hos häfstängernas armar, och detta har här verkligen skett vid barometern, emedan nivåändringarne, som der i allmänhet äro synnerligen små, väl behöfva för afläsningens underlättande förstoras vid registreringen.

Af apparaten erfordras för undvikandet af åtskilliga olägenheter, hvilka det blefve för omständligt att här beskrifva, att den nedgående poltråden ej får doppa sin ändpunkt djupt under qvicksilfverytan, utan tvärtom ögonblickligen stadnar, så snart kontakt dem emellan egt rum, och strömmen således blifvit sluten. Huru detta skall verkställas, inses lätt, då man först erinrar sig, att magneten, häfstången och poltråden bilda ett sammanhängande system och således samtidigt hejdas i sin rörelse, samt vidare att magneten medelst en sena fasthänger vid ett med ett löpverk *A* (fig. 49)* förenad hjul, hvilket löpverk i sin tur regleras af den elektriska strömmen. Ty denna löper ej blott genom det meteorologiska instrumentet och den rörliga magneten, utan äfven genom en *fix* elektromagnet, hvars ankare vid strömslutningen spärrar nyssnämnda löpverk och dermed äfven allt, som med detta står i förening.

Sedan registreringen på det ofvan angifna sättet försiggått, skall häfstången vickas tillbaka för att vara i ordning till nästa observation. Men innan detta får ske, måste ytterligare en sak iakttagas. Då polträden utgår ur det meteorologiska instrumentets qvicksilfvermassa, skulle under vanliga förhållanden strömmen afbrytas, och en elektrisk gnista der uppstå, hvaraf den olägenheten dock blefve en nödvändig följd, att qvicksilfverytan vid metallens förbränning skulle förorenas, och strömslutningen således med tiden omöjliggöras. För att hindra detta, afbrytes derför strömmen på *annat* ställe i ledningen, *innan* polträden hunnit lemna qvicksilfret i instrumentet, och detta sker helt enkelt derigenom, att den fixa magneten får upplyfta en liten hake *h*, hvars spets varit neddoppad i en med qvicksilfver fyld och i strömbanan insatt kopp. Någon gnistbildning eger derför aldrig rum i det meteorologiska instrumentet, och deri ligger kanske ett af de största företrädena hos denna apparat framför de närslägtade.

Den tillbakagående rörelsen hos häfstången åstadkommes genom samma hjul, som ofvan sades uppbära den rörliga magnetens sena *s*. Men hjulet, som förut rört sig i *en* led, har nu blifvit utlöst från löpverket *A* och deremot koppladt vid ett annat i *motsatt* led gående löpverk *B*, hvilket frigjordes i samma ögonblick och genom samma fixa magnet, som det förra stadnades.

* Ehuru den bifogade schematiska figuren på intet vis gör anspråk på att vara en afbild af apparaten i dess närvarande form, torde den likväl för läsaren kunna vara tjenlig för bibringandet af ett ungefärligt begrepp om det sätt, hvarpå apparaten opererar.

För lättare öfversigt skola vi nu, innan vi gå vidare, sammanfatta det redan sagda. Vid hvart och ett af de tre instrumenten förekommer en vickning hos häfstången, först åt ena sidan, då polträden *nedföres* i qvicksilfret, och sedan åt den andra, då han derifrån *uppdrages*. Dessa båda, af hvar sitt löpverk åstadkomna, rörelser medföra dessutom en samtidig upp- eller nedgående rörelse hos elektromagneten. På mellantiden mellan dessa båda rörelser, just i det ögonblick då strömmen slutes, hugger den rörliga magneten sitt märke i papperet, medan den fixa afbryter strömmen samt ej blott stoppar det ena löpverket, utan äfven frigör det andra.

Det återstår för oss att nämna, att apparaten är försedd med ett urverk, som håller cylindern i jemn rörelse och derjemte på vissa förutbestämda tidsögonblick genom tryck med sina minutvisare mot en spärrande fjederhake *f* lössläpper en lättrörlig balans, hvilken i sin ordning vid hvarje observations början frigör det vid poltrådens nedgående rörelse verksamma löpverket *A*. Enär uret har sex på lika afstånd från hvarandra stälda minutvisare, kommer hvarje instrument således att afläsas hvar 10:de minut, hvilket utan tvifvel är för behofvet mer än tillräckligt, synnerligast som noggrannheten hos observationerna synes vara särdeles tillfredsställande *.

Vid slutet af hvarje observation vickas barometern åt sidan och återföres derifrån till sitt lodräta läge några minuter före nästa observations början. Afsigten med denna skakning på barometern är den, att qvicksilfrets adhesion vid kärlväggarne hos instrumentet ej skall menligt inverka på barometerns angifvelser.

På det att regn och snö ej må intränga i de öppna

* I förbigående må anmärkas, att jemförelser mellan apparatens angifvelser och direkta observationer vissa tider på dagen anställas, för att derigenom dels utöfva en nödvändig kontroll öfver apparatens gång, dels erhålla säkra utgångspunkter vid observationernas afläsning å cylindern.

termometerrören, äro de *öfre* delarne af dessa instrument instängda i ett snart sagdt lufttätt skåp af zink, hvilket derjemte skyddar häfstängerna och poltrådarne vid deras rörelser från den perturberande verkan, blåsten eljest skulle utöfva.

Allt detta är nu särdeles enkelt, och apparaten skulle ej heller behöft något tillägg, derest man åt hvart och ett af de tre instrumenten velat anskaffa ej blott, såsom nu verkligen är händelsen, en särskild häfstång, poltråd och rörlig elektromagnet, utan derjemte två löpverk, sådana som de redan nämnda, förutom särskild ström och fix magnet. Men detta hade naturligtvis varit ett allt för stort slöseri. Apparaten inrättades derför på det sätt, att de båda löpverken *successivt* få tjenstgöra vid hvart och ett af de tre instrumenten, och härpå beror det, att apparaten i sitt närvarande skick förefaller åskådaren temligen komplicerad. Små förändringar eller omställningar måste nämnligen oafbrutet försiggå i hjulverket, ett sorts vaktombyte skall der ega rum, hvarigenom den fram- och återgående rörelsen kommer att repeteras hos hvarje häfstång, och strömmen att inledas just i den elektromagnet, som för tillfället skall arbeta.

Visserligen kunna vi nämna, att dessa operationer verkställas genom löpverket *B* och dess tillbehör. Men skulle vi fullständigt beskrifva hela den vidlyftiga mekanism, som i apparaten verkligen förefinnes, nödgades vi trötta läsaren med redogörelsen för en mängd häfstänger, muffhjul, kuggar, fjedrar, nabbar, hakar och excenterskifvor m. m., hvilka gripa in i hvarandra och utföra en mängd komplicerade rörelser. Och emedan det sannolikt icke skulle lyckas oss att utan tillhjelp af fullständiga teckningar gifva annat än en ofullständig idé om beskaffenheten hos denna del af apparaten, få vi i stället hänvisa dem, som intressera sig för ett detaljeradt studium häraf, antingen till sjelfva apparaten, eller till Hr Theorells egen derå lemnade beskrifning *.

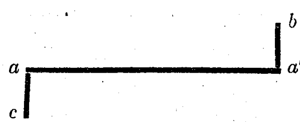
Dessa rent mekaniska anordningar äro för öfrigt i sin närvarande form icke helt och hållet väsendtliga för registreringsapparaten, utan skulle möjligen ännu kunna betydligt förenklas. Redan det, att jemte uret begagna *två* löpverk, är, enligt Hr T:s egen utsago, nära nog två löpverk för mycket, men dylika förändringar och förbättringar komma nog med tiden, om Hr T. blir satt i tillfälle att ytterligare leda utförandet af dylika apparater.

Hittills har Hr T. låtit förfärdiga fyra apparater af ungefärligen enahanda beskaffenhet, nämnligen hvar sin för de meteorologiska stationerna i Stockholm, Köpenhamn och Upsala **, samt ett exemplar för expositionerna 1866 i Stockholm och 1867 i Paris, hvilket vid båda dessa tillfällen förskaffat honom prismedaljer.

---

* K. Vet. Akad:s Handl. Stockh. 1868.

** Den vigtigaste olikheten mellan de för Köpenhamn och Upsala konstruerade apparaterna består i formen på de till termometrarna hörande häfstängerna. I Upsala befinna sig dessa instrument jemte den omgifvande skyddande buren på temligen stort afstånd från väggarne af den observationslokal, inom hvilken registreringsapparaten är uppstäld, hvarför häfstängerna hafva erhållit följande form:



Hela denna häfstång befinner sig i horizontalplanet. Vickningen försiggår kring längdriktningen hos stången aa', och i hvar sin af punkterna b och c hafva poltråden och elektromagneten blifvit placerade.

AFDELNING IV.

Anmälan af tio stycken räkneböcker.

1. Elowson. Elementarlärobok i aritmetik. Upsala 1868. Schultz. 289 sidd. Inb. 2 rdr.
2. Svenson. Räknelära enligt den algebraiska metoden med bihang. Kongsbacka 1867. Zachrisson. 68 och 24 sidd. 1,50.
3. Ljungzell. Räknetabeller. Stockholm 1865. 66 sidd.
4. Wiemer. Första grunderna i räkneläran. Kalmar 1866. 98 sidd. 0,60.
   ——— Exempel för öfning i arithmetik. Kalmar 1866. 56 sidd. 0,40.
5. Smedberg. Skolarithmetik, omfattande så väl muntlig som skriftlig räkning. Förra kursen. Stockholm 1868. Samson och Wallin. 244 sidd. Inb. 1,75.
6. Cederblom. Exempel till arithmetiken, algebran och plana trigonometrien. Första häftet. Arithmetik. Lund 1868. Gleerup. 93 sidd.
7. Guldberg. Opgaver i praktisk regning. Christiania 1865. 46 sidd.
8. Nordlund. Räkneöfningsexempel för skolor uppstälda med afseende på den heuristiska metodens användande. Häftet I. hela tal. 56 sidd. Häftet II. Bråk. 46 sidd. Stockholm. Inb. 0,80.
9. Sievers. Första öfningsboken i räkning. Stockholm 1867. Seeligmann. 138 sidd. Inb. 0,85.
10. Hansen. Billed-regnebog for smaabørn. Kjøbenh. 1868. Schubothe. 32 sidd. 8 sk.

En blick på ofvanstående nästan samtidigt utgifna arbeten i samma ämne är lärorik i flere afseenden. Deras mängd visar, att sådana böcker äro en kurant vara, något som litet hvar behöfver. År 1867 utkommo icke mindre än 13 räkneböcker *. På hela 1600-talet utgåfvos knappt flere. På *hundra* år kommo då i dagen ungefär lika många som nu på *ett* år. Enligt denna beräkning skulle bildningen i Sverige *nu* vara 100 gånger så stor som för två hundra år sedan. Man behöfver dock ej gå så långt tillbaka för att finna detta antal (13) stort. Endast för ett eller tvenne tiotal år sedan var utgifvandet af en aritmetik visst ingenting vanligt. I hela riket hade man nog af en enda lärobok i detta ämne — *Zweigbergks* lärobok i räknekonsten. Den ansågs oöfverträfflig, föreskrefs för examina och fordras ännu i dag för åtskilliga sådana **. Denna oerhörda framgång *** kan ej förklaras af annat än deraf, att boken var skrifven enligt den tidens pedagogiska grundsats, att *den räknemetod är bäst, som lär att med minsta ansträngning af tanken uträkna ett problem.* Derföre hette det t. ex. vid division i bråk: »vänd upp och ned på divisorn« o. s. v.; vid regula de tri: »sätt orsakerna i första och andra rummet samt verkningarne i tredje och fjerde« m. m. På hvarje räknesätt följde en massa exempel. Om man begrep förfaringssättet, betydde föga. Hufvudsaken var att svaren på alla exemplen blefvo rigtiga och att räkningen var vig. En examen efter denna metod utföll ock vanligen mycket lysande. De mest invecklade exempel på sammansatt regula de tri löstes med största lätthet.

Men »allt är ej guld som glimmar«. Hvad hände? Denne yngling, som nyss visat sig kunna räkna de svåraste exempel, fastnade, då han kom ut i lifvet. Här behöfde han en gång söka, hvad $\frac{3}{4}$ af 12 rdr utgjorde. Nu skulle han anlita sina aritmetiska insigter. Första tanken var: »hvad räknesätt skall jag använda?« Instinkten sade honom: »naturligtvis division, ty de 12 riksdalerna skola sönderdelas.« Alltså: vänd upp och ned divisorn o. s. v. Han räknade enligt sin regel och fick till svar: 16 rdr. Vi vilje hoppas, att hans förstånd slutligen ledde honom rätt. Säkert är dock, att han ej hade den i räkneboken följda metoden att tacka derför, om han lyckades. Detta ledsamma resultat framkallade slutligen mot hela metoden en protest, hvilken först framträdde i *Otterströms* i satirisk ton hållna räknebok och sedan fortsattes i *Nyströms*, *Bergii*, *Siljeströms* m. fl. räkneböcker. Ofvanstående tio arbeten äro samtlige också en protest mot samma metod. Numera är man allmänt öfverens derom, att man bör begripa, hvad man lär. Men ändock finnas stora skiljaktigheter i läroböckerna, ytterst härflytande af tvenne olika åsigter om den aritmetiska undervisningens ändamål.

Enligt den ena åsigten har den aritmetiska undervisningen till mål

---

* Se sista sidan af denna tidskrifts andra häfte.

** T. ex. för inträde till farmacevtiska institutet.

*** I fjol utkom 22:a upplagan af denna lärobok.

att lära eleven klart inse lagarne för de aritmetiska operationerna. Lärjungen är här företrädesvis receptiv.

Enligt den andra åsigten bör den aritmetiska undervisningen afse att utbilda elevens förmåga af tankearbete på aritmetiska uppgifter och derigenom indirekt äfven på frågor inom öfriga delar af mensklig forskning. Här är lärjungen mera produktiv.

I läroböcker hörande till den förra ståndpunkten framställes regeln färdig genast, och beviset kommer efteråt. Sedan eleven fått regeln bevisad, räknar han mekaniskt. I lärobocker, som stå på senare ståndpunkten, går man från enklare till lättare exempel, tills man finner regeln. Exemplen vexla ofta, för att lärjungen ständigt skall tvingas till eftertanke. Förnämste representanten bland våra tio här i fråga varande författare för den förra åsigten är Elowson, till hvilken ock Svenson synes ansluta sig. I spetsen för den andra åsigten stå Nordlund och Cederblom. Med dem stå Guldberg, Sievers, Hansen och Ljungzell i förbund. Förmedlande mellan båda stå Wiemer och Smedberg. För vår del ansluta vi oss obetingadt till den åsigten, som anser tankeverksamheten för hufvudsaken, alldenstund detta är skolans syfte i allmänhet. Vid akademien eller vid de högre klasserna af elementarskolan anse vi deremot att äfven den andra metoden kan komma i fråga. — Med undantag af Elowsons och Smedbergs läroböcker hafva alla de öfriga den stora förtjensten att vara korta.

Efter denna allmänna öfversigt gå vi att yttra några ord om hvarje arbete särskildt.

1. Elowsons aritmetik.

Såsom vi nyss antydt, anse vi denna bok, tagen i sin helhet, vara skrifven för ynglingar på ett högre stadium, alldenstund alla räknelagar framställas i vidlyftiga regler, hvilka sedan strängt bevisas på grund af föregående definitioner, och emedan tillika förf. ofta rör sig med vidlyftiga tal, hvilket allt förutsätter en mognare ålder. Visserligen säger E., att man ej skall förelägga ynglingen eller barnet de större talen, innan det lärt sig fatta dem. Men sjelf följer dock E. i sin lärobok ej denna grundsats. Se t. ex. sidan 48. Härmed vilja vi ej förneka, att delar af boken, t. ex. hufvudräkningsexemplen passa för lägre stadier.

E:s bok är temligen fullständig. Den sönderfaller i tvenne delar, en teoretisk del, läran om hela tal och bråk, samt en praktisk del, utgörande tillämpning af den förra delen på sorter, regula de tri, bolags-, intresse-, alligationsräkning m. m., allt åtföljdt af en synnerligen rik exempelsamling. För att gifva ett begrepp om den noggrannhet och fullständighet, som E. iakttager, vilja vi framhålla ett par af de satser, som han bevisar vid division i enkla tal:

«Om vid multiplikation den ena faktorn multipliceras eller divideras med ett tal, så blir derigenom produkten så många gånger större eller mindre som det multiplicerande eller dividerande talet innehåller enheter.

Om vid multiplikation den ena faktorn multipliceras och den andra divideras med ett och samma tal, så blir produkten oförändrad.«

Teorien för största gemensamma divisorn, för tals delbarhet, m. m. allt har blifvit fullständigt framstäldt med bevis. Regula de tri-frågor löser förf. medelst analogier, sedan han förut bevisat, att produkten af de yttersta är lika med produkten af de medlersta, och sedan han redogjort för sammansatta och omvända förhållanden. Han tillägger dock, att hithörande exempel äfven kunna räknas ut derigenom, att man verkställer de räkneoperationer, som betingas af sambandet mellan de tre gifna och den sökta, samt att det för nybörjaren är bäst att göra på båda sätten.

Särskildt stå vi i förbindelse till förf. derföre, att han gjort klart, hvad det menas med att en storhet är proportionel mot en annan. Obekantskapen med denna punkt hindrar ofta nybörjare att förstå fysiska och astronomiska skrifter.

I den rikhaltiga exempelsamlingen finnas bland annat exempel angående de i de dagliga tidningarne förekommande börsuttrycken: «franska 3-procentsräntan noteras 70, engelska consols 80« o. s. v.

I följande punkter dela vi ej förf:ns åsigter.

1. Förf. har på division följande definition: «division är det räknesätt, som användes, då man vill dela ett gifvet tal uti ett uppgifvet antal lika delar; (eller division är det räknesätt, som användes för att finna, huru många gånger ett tal är större än ett annat; eller slutligen division är det räknesätt, som användes för att finna, huru många gånger ett tal innehålles uti ett annat.)«

Af detta skulle en nybörjare tro, antingen att divisionen användes vid tre olika slag af räknefrågor eller ock vid endast ett slag af sådana, ehuru man kan betrakta dem på tre olika sätt eller åtminstone uttrycka dem på tre olika sätt. Nu äro, som bekant, de till division hörande uppgifter af tvåfaldig natur: antingen skall man dela ett gifvet tal i ett visst antal lika stora delar, eller ock skall man undersöka, huru många gånger ett gifvet tal innehålles i ett annat gifvet tal. Dessa båda slag, hvilka aldrig kunna sammanblandas, har förf. också mycket rigtigt anfört i de två första momenten. Det tredje momentet i förf:s definition är blott ett bättre sätt att uttrycka det andra. Men att så uppfatta definitionen är ej gerna möjligt för den som läser den samma. Divisionens dubbla natur blir klar af följande enkla exempel:

12 rdr är lika med 4 gånger 3 rdr.

I denna af tre storheter bestående likhet kunna två vara gifna och den tredje obekant. Äro storheterna 4 och 3 rdr gifna, och man vill söka, hvad 4 gånger 3 rdr är, har man multiplikation. År deremot 12 rdr och endera af de öfriga gifna, har man division. Då 12 rdr och talet 4 äro gifna, d. v. s. då man vill dela 12 rdr i 4 lika delar, har man division af första slaget; är deremot 12 rdr och 3 rdr gifna, d. v. s. då man söker huru många gånger 3 rdr innehålles i 12 rdr, har man det andra slaget af division.

På grund af denna åtskilnad anse vi förf:ns påstående sid. 39 «egentligen är division ingenting annat än en upprepad subtraktion« behöfva något förändras. Detta påstående är nämnligen sannt endast för det senare slaget af division. Ty tag exemplet: «tolf rdr skall delas i 4 lika delar.« Hvad skall subtraheras? Näppeligen lär väl förf. vilja från 12 rdr subtrahera talet 4. Hela förf:ns bevis för division omfattar blott det andra slaget af division. Det grundar sig visserligen på den sanningen, att produkten af divisorn och qvoten skall vara lika med dividenden, men denna sanning är ej visad annat än för det senare slaget af division.

2. Vid redogörandet för ytmått och rymdmått sidd. 129 och 130 säger förf., att qvadratmåttets indelningar finnas derigenom, att man qvadrerar, och kubikmåttets derigenom, att man kuberar motsvarande längdmätts indelningar utan att på något ställe angifva och bevisa skälet härtill. Så vidt jag kunnat finna, har förf. ej på något ställe bevisat satsen för beräknandet af en rektangels yta, ej ens då sidornas längdmått kunnat uttryckas med hela tal. Först mot slutet af boken sidd. 274 och 275 nämner förf. så väl denna sats som en mängd andra till planimetrien hörande vigtiga satser, men utan att lemna bevis för någon af dem. Det är hårdt att eleven så länge skall förblifva i okunnighet om dessa i praktiskt hänseende så vigtiga satser.

3. Så rikhaltig förf:ns aritmetik än är i afseende på exempel, är den dock ofullständig derutinnan, att förf. ej upptagit ens sådana problem, som vanligen förekomma i våra algebraiska läroböcker såsom exempel på första gradens eqvationer eller på aritmetiska serier, ehuru en mängd af dessa exempel äro vida lättare att uträkna än en mängd af dem förf. upptagit. Hvarföre skall aritmetiken nödvändigt vara inskränkt till endast sådana exempel, som Zweigbergks räknebok har? I våra äldsta räkneböcker finner ej förf. något stöd för sitt förfarande, ty i dessa förekomma, som bekant, under «regula falsi« de numera under 1:sta gradens eqvationer behandlade exempel.

4. Förf:ns rikedom på exempel anse vi verka tröttande på eleverna. Bättre är snarare ett för litet antal exempel, der eleven i stället kan räkna om igen exemplen, ifall så skulle behöfvas *.

* Angående denna punkt se Bergii förträffliga afhandling i Aulins pedagogiska tidskrift, augustihäftet för i år.

Om jag bortser från våra olika åsigter i pedagogiskt hänseende, kan jag ej underlåta att erkänna förf:ns bok såsom synnerligen framstående genom sina stränga på definitioner grundade bevis för de aritmetiska satserna.

2. Svensons räknelära.

S. behandlar alla de i våra vanliga läroböcker förekommande uppgifter enligt eqvationsläran. Hans lärobok sammanfaller derföre med läran om första gradens eqvationer med en obekant. Alla frågor behandlas på nästan samma sätt. Den enkla och lättfattliga metoden sätter eleven hastigt i stånd att rå på de förelagda problemen, och lifvar honom, — den erbjuder onekligen stora fördelar och kommer derföre utan tvifvel att motse en lång framtid. I sjelfva verket är det denna metod, som från förstörelse räddat oss, som lärt att räkna efter den gamla förvända metoden.

3. Ljungzells räknetabeller.

Dessa synnerligen praktiska tabeller utgöra till antalet tio med flere underafdelningar. Man finner på dem numeriska exempel öfver hela aritmetiken från och med tals uppskrifning; man får här göra bekantskap med eqvationer af första, andra, ja till och med tredje graden med en obekant. Man får här tillfälle att brottas med uppgifter af synnerligen vexlande innehåll: de röra sig kring bokhålleri, mekanik, akustik, optik, värmelära, sammansatta räntor, planimetri och stereometri. Tabellerna äro synnerligen lämpliga såsom en repetitionskurs i matematikens och fysikens första element.

4. Wiemers räknelära.

Denna lärobok har den stora förtjensten att vara liten med enkla regler i korthet förklarade. Utom de vanliga räknesätten upptager förf. läran om regula falsi med bevis. Vid regula de tri begagnar han båda metoderna, men föredrager dock den att gå till enheten. Börsproblemen äro ypperliga. Arbetet slutar med en liten proportionslära.

Vi tillåta oss att mot boken göra ett par anmärkningar.

1. Förklaringarne äro ofta för knapphändiga. Vi välja t. ex. § 19 på sid. 14. Här säger förf.: «Vill man bringa ett helt tal till form af bråk med en gifven nämnare, t. ex. 8 till 5:te-delar, så multiplicerar man det hela 8 med 5, hvaraf 40, och skrifver 5 såsom nämnare under 40, hvaraf $\frac{40}{5}$, som måste vara $=$ 8, emedan man först femfaldigat 8 och derefter af mångfalden tagit $\frac{1}{5}$, då talet 8 måste återkomma«. Rik-

tigheten af detta förfaringssätt är omöjlig att inse, derföre att förf. uraktlåtit att förut omnämna och bevisa att ett bråk kan uppfattas på tvänne sätt. Bråket $\frac{40}{5}$ t. ex, kan tolkas dels såsom fyratio femtedelar, dels som femtedelen af 40.

2. Division bestämmer förf. sid. 9 endast att vara en delningsdivision. Vid uträkningen deremot behandlas detta slag af division blott i förbigående, och vid redogörelsen för sättet att dividera säger förf. i exemplet 329778 : 18 följande: «Talet 18 i de två första siffrornas tal 32 går 1 gång« o. s. v. utan att hafva förut påpekat detta slag af division. I likhet med Elowson påstår förf. division vara en fortsatt subtraktion, oaktadt detta ej passar in på annat än det senare slaget af division. I förf:ns särskildt utgifna exempelsamling sidan 7 röra alla de konkreta exemplen delningsdivision. Intet finnes på det andra slaget af division. Vid läran om bråk deremot upptager förf. exempel på båda slagen af division.

5. Smedbergs skolaritmetik.

Denna lärobok förutsätter eleverna något för sig komna i räkning, innan de börja den samma. Bokens titel äfvensom exemplens natur antyda detta. Den har följande pedagogiska förtjenster:

1. Förf. undviker de många reglerna, hvilka vanligen döda lusten för studiet och för öfrigt lätt glömmas.

2. Exemplen äro till största delen konkreta och praktiska. Så beröra somliga bodräkningar, andra bergsprängning, processer, inteckningar, premielån m. m.

3. Nästan hälften af exemplen äro hufvudräkningsexempel. De skriftliga exemplen anser han böra i sin helhet tecknas, innan någon del af dem uträknas.

4. Förf. skiljer skarpt mellan de två olika slagen af division, af hvilka han kallar det ena delningsdivision, det andra innehållsdivision *.

5. Läran om decimalbråk behandlar förf. i full öfvarensstämmelse med den om hela tal. Så t. ex. vid division bestämmer han å ett lättfattligt sätt siffrornas värde i qvoten utan att reducera divisorn till helt tal eller göra den liknämnig med dividenden.

I följande punkter skilja sig våra åsigter från författarens.

1. En yngling har svårt att få någon öfversigt af de exempel som kunna förekomma inom aritmetiken. Han skall möjligen komma i förtviflan, då han ser de många olika slagen. Förf. har nämnl. först hela tal, så «sorter«, derpå decimalbråk och vanliga bråk. Kommer så ett

* Namnet härledes af "innehålles" ej af innehåll.

bihang, innehållande regula de tri-* och dermed beslägtade frågor. Vidare lofvar förf. att i en senare kurs behandla de efter sorter i våra vanl. läroböcker förekommande exempel. Men ej nog härmed: åtskilliga exempel anser han böra uppskjutas till den algebraiska undervisningen.

Då nu förf. tagit till sin uppgift att behandla företrädesvis konkreta exempel, och då frågor hörande till sorter och regula de tri ej äro annat än tillämpning af hela tal och bråk på mått, mål och vigt, så höra «sorters«frågorna till hela tal och regula de tri-frågorna till bråkläran. Förf. behandlar således sorters-räkning på två ställen, dels i läran om bråk och dels särskildt. Den yngling, som vill eröfra det aritmetiska området, kommer derföre att med förf. till ciceron föreställa sig det aritmetiska området minst dubbelt så stort som det i verkligheten är.

2. Förf. förvisar ur räkneboken exempel, som i våra algebraiska läroböcker lösas medelst eqvationer af första graden, oaktadt desse också ej äro annat än enkla tillämpningar af hela tal och bråk, ofta lättlöstare än de enkla regula de tri-exemplen.

3. Förf. har genom ett skarpsinnigt resonnemang reducerat delningsdivisionen till innehålles-divisionen och derigenom undvikit något särskildt behandlingssätt af det förra slaget division. Vi anse det för ynglingen lättfattligare, om förf. behandlat några exempel på begge sätten. T. ex. Talet 468 skall divideras med 2.

Delningsdivision. Hälften af 400 är 200, hälften af 60 är 30 o. s. v.

Innehålles-division. Två i fyrahundra går 200 gånger, två i 60 går 30 gånger o. s. v. I läran om bråk med obenämnda tal behandlas delningsdivisionen, såsom om den äfven här kunde reduceras till innehålles-divisionen, utan att förf. genom något resonnemang visat möjligheten häraf.

Enligt hvad vi ofvan nämnt utgör författaren en förmedlande brygga mellan de båda i vår öfversigt omtalade ståndpunkterna. Vi anse mycket uträttadt, om på denna brygga anhängarne af den åsigt, der receptiviteten företrädesvis tagas i anspråk, lockades att öfvergå till den andra sidan**.

6. Cederbloms aritmetiska exempelsamling.

Denna omfattar hela tal och bråk, första och andra gradens eqva-

---

* Förf:ns sätt att lösa dessa frågor är enkelt. Så t. ex. skulle han på följande fråga: "om fyra äpplen kosta 9 öre, hvad kosta 3?" svara: $\frac{3}{4}$ af 9 öre $= \frac{3 \cdot 9}{4} = 6\frac{3}{4}$ öre.

** Smedbergs räknebok är fördelaktigt bedömd i julinumret af svenska läroverkstidningen för i år.

tioner med en och flere obekanta, logaritmer, plani- och stereometri. I denna tidskrifts andra häfte förekomma några uppgifter (satserna 77—80) ur denna aritmetik. Som man ser, äro de synnerligen originella. Hans uppgifter beröra frågor ur det praktiska lifvet, fysiken, kemien m. m.

För att gifva ett begrepp om förf:ns pedagogiska ståndpunkt göra vi ur företalet följande utdrag.

«»Pour bien instruire, il ne faut pas dire tout ce qu'on sait, mais seulement ce qui convient à ceux qu'on instruit.« — — — Då ändamålet med undervisningen icke får anses vara att låta lärjungen på möjligast korta tid genomgå ett visst antal exempel, utan i första rummet att utbilda hans förmåga af eget tankearbete, att väcka hans intresse för den vetenskap, hvari han undervisas, meddela honom lust och förmåga att på egen hand gå framåt i densamma, och använda den på lösningen af frågor ur naturen och lifvet, så bör ej kunna ifrågakomma att uppställa läroboken i form af korta reglor, uttryckta i ord eller formler, för exemplens uppställning och uträkning, hvilka derföre grupperas i vissa afdelningar (»ex. på enkel regula de tri«, »ex. på intresseräkning« o. s. v.), hvarje afdelning föregången af en dylik regel. Ett sådant system bidrager mera att döda än väcka lärjungens sjelfverksamhet, och vid den matematiska undervisningen spelar denna en så vigtig rol, att undervisningens gagnelighet för lärjungens själsutveckling helt och hållet beror på huruvida läraren lyckas framkalla denna verksamhet. Man kan undervisa så, att man ordentligt och fullständigt ger besked i allt, hvad till ämnet hör, så att lärjungen ej har annat att göra än förhålla sig passiv, då han utan sin förskyllan får i sig en hel hop vetande, om han blott icke rent af undviker att höra hvad läraren yttrar. (Huru mycket värde ett sådant inhemtadt vetande eger lemnar jag derhän.) Men man kan äfven undervisa på ett annat sätt: man kan lemna alla direkta förklaringar åsido, och i stället genom antydningar och frågor förmå lärjungen att sjelf uttänka dem; han blir då ej längre en blott passiv mottagare af lärarens tankar och idéer, utan han får vara menniska, får vara produktiv. Endast på detta sätt blir hans vetande hans eget, emedan det är hans eget verk, om också tillkommet under en annans ledning. Francoeur's yttrande, »l'auteur en disant tout ce qu'il pense empêche le lecteur de penser lui-même« äger sin tillämpning ej blott på författaren och läsaren, utan äfven på läraren och lärjungen. Att läraren dock alltid måste yttra tillräckligt för att lärjungen skall kunna reda sig är tydligt: han skall utveckla det gryende anlaget, men ej taga det ännu outvecklade i anspråk, som vore det den utbildade förmågan: det vore att qväfva sjelfva möjligheten af en kraftig utveckling.« — — —

Vi önska författarens bok all möjlig framgång vid våra läroverk.

7. Guldbergs Opgaver i praktisk regning.

Boken, som trycktes redan 1865, omfattar uppgifter hörande till regula de tri, enkel- och sammansatt ränteräkning m. m. samt opgaver til övelse i at opstille formler. Det är intressant att se, huru denne produktive och framstående förf., som utgifvit läroböcker i astronomi, mekanik, nyare värmeteori och i nästan alla delar af elementarmatematiken, som lemnat flere bidrag till Tychsens danska tidskrift, och som är hufvudredaktör för Norges polytekniska tidskrift, i pedagogiskt hänseende hör till den skolan, der lärjungens sjelfverksamhet tages i anspråk så mycket som möjligt. Regula de tri-frågorna uträknar han medelst att gå till enheten. På opgaverne til övelse i at opstille formler angifva vi endast ett exempel.

«En skive har a inddelninger og er forsynet med to visere; den ene tilbagelægger m delstrege i timen; den anden tilbagelægger n delstrege i timen; hvor ofte dække de hinanden?

Svar: hver $\frac{a}{m-n}$ time.«

Det bör vara kärt för oss att blifva bekante med vårt broderlands ypperliga alster.

8. Nordlunds räkneöfningsexempel.

Denna bok anse vi vara ett pedagogiskt mästerstycke. Den förråder i förf. en man, som satt sig in i barnets och ynglingens sätt att tänka, ända in i de minsta detaljer. Förf. börjar med att föreslå en särskild aritmetisk noga specificerad undervisningsmatriel, bestående af kulor, stickor, vigter, fotmått, slantar, sedlar föreställande penningar m. m., allt för att eleven ständigt skall ha för sig s a k e n hvarmed han räknar, i stället för att han annars ofta räknar med t e c k n e n (siffrorna, bokstäfverna). Hans exempel börja med uppgifter, som skola lära att uppfatta talen och särskildt dekadsystemet. Längre fram förekomma uppgifter äfven angående andra talsystem. Exemplen fortgå från enklare ända till de svåraste exempel af första graden. Alla exempel äro hufvudräkningsexempel. Taflan anlitas först när hufvudet ej räcker till att sammanhålla de i uppgiften och derpå följande beräkningar förekommande tal. Vid division har förf. uppgifter hörande till begge slagen division, så väl vid hela tal som vid bråk. Vid tals delning har han uppgifter om delning i lika stora delar (vanlig division) och i olika delar (hvartill höra bland annat de under namnet bolagsräkning vanligen rubricerade exempel). Exemplen äro öfverallt konkreta och praktiska, berörande frågor i lifvet (t. ex. räkningars uppställande) och i naturen. Särskildt framhåller förf. vigten af att låta lärjungen sjelf hitta på några exempel af samma natur som dem han under lärarens ledning nyss genomgått. För att gifva ett prof på förf:ns metod, anföra vi följande frågor (se sid. 16 häftet 1):

«Huru många pappersark, hvilkas längd och bredd äro 1 fot åtgå för att täcka

a) öfre ytan af en bänk, som är 1 stång lång och 1 fot bred?

b) . . . . . . ett bord, ... 2 fot bredt?

c) ett golf, som är 1 stång 2 fot långt och 9 fot bredt?«

Bland exemplen förekommer bland andra följande (sid. 44 häftet 1):

«Förklara huru det är möjligt att med blott 4 vigter, nämnligen en ett-skålpundsvigt, en tre-skålpundsvigt, en nio-skålpundsvigt och en tjugusju-skålpundsvigt, väga kroppar, som väga jemnt ett helt antal skålpund från och med 1 skålp. till och med 40 skålp.!«

Detta intressanta exempel har jag första gången sett i Gemma Friesii år 1593 utgifna räknebok. Der var det dock modifieradt sålunda:

> «Uppgif fyra så beskaffade vigter, att med dem kan vägas hvarje vigt från 1 till och med 40; fem sådane, att med dem kan vägas hvarje vigt från 1 till och med 121; sex sådane, att med dem kan vägas hvarje vigt från 1 till och med 364«, o. s. v.

Nordlunds bok förutsätter undangjord räkning med talen mellan 1 och 100, är lämplig att begagnas i folk-, slöjd- och elementarskolor. Den är, vi upprepa det ännu en gång, ett pedagogiskt mästerstycke.

9. Sievers räknebok.

Denna bok, en bearbetning af Sass' danska räknebok, är enkel och klar. Den är indelad i 4 kurser.

Första kursen (9 sidor) omfattar öfningsexempel på talen 1—10,
andra . . . . (58 sidd.) . . . . 1—100,
tredje . . . . (41 sidd.) . . . . 1—1000,
fjerde . . . . (30 sidd.) . . . . 1—10000.

Boken är ämnad för nybörjare, rör sig omkring hela tal med tilllämpningar, innehåller inga regler. Redan sjelfva uppställningen af bokens hufvuddelar är pedagogisk. Sivers' metod att först studera talen mellan 1 till 10, att först räkna addition, subtraktion, multiplikation och division och tillhörande praktiska exempel med dessa små tal, vinner allt större fält. I Stockholms folkskolor begagnas metoden. Jag känner en privat, i pedagogiskt hänseende synnerligen framstående, undervisningsanstalt, hvarest för ett år sedan de nyinkomna eleverna en hel hösttermin i aritmetik sysselsattes med uppgifter, som rörde sig med tal liggande endast mellan 1 och 10. För den oinvigde synes det hardt när omöjligt att sysselsätta elever så länge på ett så litet område, och dock voro dessa lektioner genom lärarinnans omvexlande och lättfattliga exempel för lärjungarne i hög grad underhållande.

Såsom prof på Sievers' metod anföra vi följande:

Sid. 1. «$1 + 1 = 2$ Sid. 5. «$3 = 1 \times 2 + 1$

$3 + 1 = ?$« $9 = ? + 2 +$ «

Sid. 128. «Om Luudberg har för en häst hafre nog för 28 veckor, i huru många dagar har han då för 14 hästar?«

Boken innehåller kanske för många abstrakta exempel i förhållande till de konkreta. Att Sievers är en främling, förråder han på några ställen i sina pluralbildningar. Så säger han (sid. 62) 3 val i st. f. 3 valar, (sid. 66) ett halft skock, (sid. 132) 6 skock i st. f. en half skock, 6 skockar.

Boken är god.

10. Hansens billedregnebog for smaabørn.

För att gifva begrepp om talet 1, har förf. uppritat ett streck, en punkt, en tupp och en häst.

. . . . 2, ... 2 streck, två punkter, två hästar.

. . . . 5, ... 5 streck, handens 5 fingrar, 5 svin, 5 blomkrukor.

. . . . 10, ... 10 streck, en ruta = dessa streck tillsammantagne, alla tio fingrarne.

Medelst sådane figurer meddelar förf. undervisning i de fyra räknesätten.

Efter hvad jag hört, lär en svensk förläggare vara betänkt på att utgifva en bearbetning af denna lilla glädtiga bilderräknebok. Vi önska boken god afsättning.

F. W. Hultman.

Rättelser.

Häftet	3,	sid.	104,	rad.	7 uppifr.	står:	$nt + nr$,	läs:	$nt + rt$.
»	»	»	124,	»	3	»	»		»	KAP. I.
»	»	»	133,	»	9 nedifr.		»	BÖRJE	»	BOIJE.
»	4	»	168,	»	6 & 7	»	»	2^{2n}	»	2^n.
»	»	»	176,	»	8 uppifr.		»	*OP*	»	*OP* (fig. 31).
»	»	»	186,	»	3 nedifr.		»	1, 3, 5, 7	»	2, 4, 6, 8.
»	»	»	187,	»	4 uppifr.		»	2, 4, 6, 8	»	3, 5, 7.
»	»	»	194,	»	1	»	»	Schön	»	Schrön.
»	»	»	»	»	13	»	»	Ulle	»	Ule.

AFDELNING I.

Svenska aritmetikens historia.

Af F. W. HULTMAN.

(Forts. fr. sid. 154).

3. AEGIDIUS AURELIUS *, Upsal.

Af denna aritmetik hafva utkommit åtminstone 8 upplagor, en på latin och 7 på svenska. Den första har till titel: Arithmeticæ practicæ libri duo, studio et opera Aeg. Aurelii Upsal., quibus isagoge numeri figurati, logistices sexagenariæ, praxis italicæ ad scientiam motuum cœlestium necessariæ adjecta est; nec non quæstiunculæ variæ, quibus tam integrorum quam fractorum numerorum usus exacte

---

* Ur Biografiskt lexikon meddela vi följande om denne man:

Vi känna om denne för sin tid märklige skriftställare blott det, att han var uppsaliensare, blef först rector scholæ i Upsala, sedan syndicus i Stockholm. Han synes ha lefvat under Johan III:s, Sigismunds, Karl IX:s, Gustaf Adolfs och Kristinas, kanske in i Karl Gustafs regeringstider. Hans arbeten utgöra hufvudsakligen värderade läroböcker från och med 1614 till och med 1647; de omfattade flere undervisningsgrenar, såsom aritmetik, retorik, grammatik och religion. I afseende på den sist nämnda synes han aktat uppbyggelsen mer än begreppsinskärpningen.

Hans utgifna arbeten äro:

1. Arithmetica, minst 8 upplagor (1614—1705), tryckta 5 i Upsala, 2 i Stockholm och en i Strengnäs.

ostenditur. Ups. 1614. Deraf utkom en öfversättning i Upsala samma år. Der utkommo ock upplagorna af 1628*, 1633 och 1642. Upplagan af år 1655 är utgifven i Stockholm, den af år 1671 i Strengnäs samt den af 1705 (utgifven af Joh. Fr. Ulrik) i Stockholm. De fem upplagorna af åren 1633—1705 hafva till titel: Arithmetica eller Räknebook, medh heele och brutne Taal, på nytt öfuersedd och medh lustige och sköne Exempel förbättrat af Aeg. Aurelius Holmens. Secret. 11 ark 8:o utan paginering. Alla hafva de på titelbladet följande motto på dåliga hexametrar:

Ad Oedipum.

Ter tria sunt septem, septem sex, sex quoque tres sunt:
Octo dant quatuor: quatuor faciunt tibi septem.
Hæc bene si numeres, faciunt tibi milia quinque **.

---

2. Audomaci Talæi Rhetorica Ramæa. Sthlm 1615 (troligen enligt Petri Rami föreläsningar).
3. Then Tydska Theologia försvenskat. Upps. 1617 (med Luthers företal).
4. Grammatica Tideri, aucta appendice syntaxeos et prosodiæ. Stockh. 1635.
5. K. David Penitenz eller the 7 Penitenzpsalmerna. Stockholm 1620 och 1640.
6. Barna Biblia. Stockholm 1642. Synes ock ha blifvit utgifven på latin, tyska och finska.
7. Calendarium novum œconomicum 1644—64 (om Gudi täckes med verldens ände så länge fördröja), til Stockholms horizont stält.
8. Phosphorus, thet är: En rätt Leedsagare til then sanna Christendomen. Stockh. 1647.

* Upplagan 1628 finnes på Skara bibliotek. Denna upplaga, upplagorna af 1655 och 1671, äfvensom de båda af år 1614 har jag aldrig sett. De tre öfriga upplagorna deremot har jag studerat på K. biblioteket i Stockholm.

** Eller på svenska: «3 gånger 3 är 7; 7 är 6, men 6 är också 3; 8 gifver 4, och 4 gör 7; om man väl räknar detta, erhåller man 5000.« — Jag skulle vara synnerligen tacksam, om någon af tidskriftens läsare kunde gifva mig lösningen på denna gåta.

Inunder dessa versar förekommer följande lilla tafla:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Upplagan af år 1633 är tillegnad borgmästare och råd samt köpmännen och borgerskapet i Stockholm.

Ofvan stående hexametrars betydelse har jag fåfängt sökt utgrunda och har ej i boken på något ställe funnit ens en antydan derom. Hvad åter figuren eller taflan under dem beträffar, löser den det problemet att uppställa siffrorna från 1 till och med 9 i 3 rader under hvarandra så, att siffrornas summa i hvarje rad, tagen vågrätt, lodrätt eller snedt från hörn till hörn, utgör 15.

Alla upplagor efter 1633 äro i det närmaste oförändrade. Förändringarna bestå endast i några religiösa betraktelser, tillsatta här och der. Så t. ex. inledas i de senare upplagorna addition och subtraktion med följande vers:

Hvad en flitig fader adderar,
En olydig son det subtraherar.

Multiplikation och division hafva till ingångsvers:

Fastän en menniskas ägodel blifver multiplicerad,
Är ej Guds välsignelse hos, så varder den dividerad.

Aurelius är den förste, som utgifvit en räknebok på vårt modersmål. Hans bok blef ock derföre med sådan begärlighet mottagen och fortfarande bibehållen, att hon under ett helt sekel begagnades såsom lärobok i Sveriges skolor, en ära som knappast tillfallit någon annan läroboks författare. Att boken under en så lång tidrymd kunde qvarstå som lärobok och ej utträngdes af bättre under senare hälften af 1600-talet utgifna, är så mycket märkvärdigare, som de senare upplagorna ej tillegnade sig de framsteg som räkneläran under detta tidehvarf gjorde. Icke heller är hans bok i pedagogiskt hänseende utmärkt. Långt derifrån! I henne spåras ej ens ett bemödande att förklara de i sig sjelfva ytterst knapphändiga och svårfattliga reglerna. Sjelfva mottot på boken — de hemlighetsfulla verserne — häntyder på räkneläran såsom något synnerligen underbart, i det den lärer att lösa så obegripliga gåtor och hvilka dertill tyckas innebära motsägelser. Men, såsom nyss är nämndt, bokens ovanliga framgång kom sig deraf, att hon var den första på svenska utgifna räknebok. I stället för att våra förfäder i Rami, Buscheri-Bothvidi, Gemmas, Clavii och Bures räkneböcker fingo räkna med coronati, franci, joachimici, grossi, gyllen m. m. påträffade de här sina gamla bekanta daler, mark, ören, fyrkar; här fingo de räkna med skålpund, lod, kannor, kast, dussin, ris m. m., kortligen: de fingo röra sig med sådana mått, mål och vigter, hvilka förekommo i deras hvardagslif. Dertill hade Aurelius i sitt arbete upptagit läran att räkna medelst räknepenningar, hvilken räkning genom sin handgripliga enkelhet ersätter det bristfälliga i begreppsbestämningar, förklaringar och uttryck.

Aurelii räknebok karakteriseras för öfrigt bäst, då jag säger, att han följt Ramus * i det hufvudsakligaste, ehuru han saknar Rami reda och skärpa. Han har ett nytt räknesätt, kalladt *regula cæcis seu virginum*, hvilket sedermera förekommer i flere svenska räkneböcker under detta namn. Hit höra sådana exempel, der antalet obekanta är större än motsvarande uppgifter och der deras bestämmande möjliggöres endast derigenom att de obekanta skola vara hela tal **. Orsaken till namnet »jungfruregeln» känner jag ej, om ej namnet kan härleda sig af det första exemplet, som behandlas i detta slag af räkning, hvilket till någon del

---

* Rami inflytande på tidehvarfvet och särskildt hans auktoritet för Aurelius visar sig bland annat också deraf, att Aurelius utgifvit Rami föreläsningar i retorik.

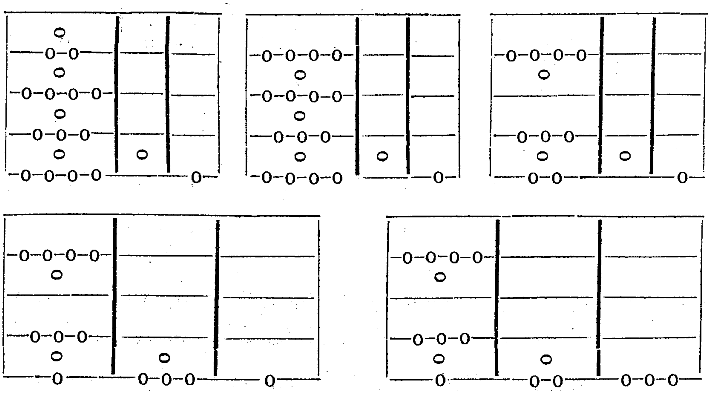
** Man kallar numera de eqvationer, medelst hvilka man löser sådana frågor, diofantiska.

handlar om jungfrur. Vi skola nedanföre anföra detta exempel. Hans bok afslutas, liksom Gemma Friesii, med »konstiga, lustiga och kortvilliga frågor, hvilka man ibland sällskap bruka kan». Bland dessa förekommer ett bekant exempel om en skeppare, som vid en storm genom lottning stälde så till, att alla om bord befintlige judar blefvo kastade öfver bord. Efter denna allmänna redogörelse vilja vi framställa några exempel ur Aurelii aritmetik.

Subtractio eller Subductio. Hon lärer, huru man ett tal af det andra aftaga eller afkorta skall, på det man kan förnimma, hvad som rester eller öfverblifver.

Ex. En apotekare köper ett skepp af en indiansk köpman med allehanda speceri och dyrbara kryddor och gifver derföre 3452 daler 29 öre 2 fyrkar. Nu hafver han både skepp och gods enom androm köpman igen försålt för 7989 daler 5 öre och 1 fyrk. Huru mycket hafver han derpå vunnit? Facit. 4536 daler 7 öre 3 fyrkar.

Aurelius utför räkningen medelst räknepenningar på följande sätt:



Man har att iakttaga, att 1 daler = 32 öre, en* öre 4 fyrkar. I denna tafla förekomma efter hvarandra talen

* Läsaren behagade märka, att det på denna tiden hette e n öre, två öre, ej e t t öre, såsom nu för tiden.

(7989, 5, 1), (4989, 5, 1), (4537, 5, 1), (4536, 8, 1), (4536, 7, 3). Som man ser, skiljer sig Aurelius från Siliceo derutinnan, att han börjar med de stora talen och slutar med de små. Siliceo gör tvärtom.

Multiplikation lärer huru man ett tal mångfaldigt göra skall.

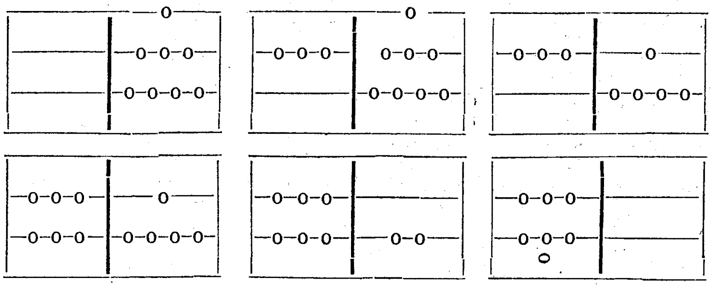
Ex. Uti en by bo tillsamman 9 bönder, hvardera har 8 hanar, hvar hane hafver 9 hönor med sig, och hvar höna hafver 16 kycklingar. Nu vill jag gerna veta, huru många kycklingar der äro. Facit 10368.

Division lärer huru man ett tal rätt afdela och utskifta skall.

Ex. En begär veta, huru många daler 1340 mark göra. Facit 335 daler.

Anm. En daler är 4 mark.

Med räknepenningar uträknas exemplet enligt följande schema:



hvarest man efter hvarandra finner talen: (0, 1340), (300, 1340), (300, 140), (330, 140), (330, 20), (335, 0).

Med siffror utförd ser räkningen ut på följande sätt:

12
1340 (335
444
1220
12

Divisorn 4 är uppskrifven 3 särskilda gånger under dividenden 1340, partialprodukterna 12, 12, 20 stå nedanför divisorn samt resterna 1 och 2 ofvanför dividenden. Se för öfrigt Ramus och Clavius.

Bråk. Det, som blifver öfver vid division, kallar man bråk eller brutet tal.

Af decimalbråk finnes ej ett spår, ej ens i upplagan af 1705.

Regula de tri utföres enligt regeln: »multiplicera det andra och det tredje talet, och hvad deraf kommer, skall med det första afdeladt blifva.»

Vidare följer *den afviga regula de tri* (regula inversa), *regula dupli, sällskapsregeln*, der vi påträffa exemplet om Titii testamente till sin hafvande hustru *, de gamles egendomliga *regula alligationis* (se Clavius).

I *progressio arithmetica* har han tre regler, en för att finna det yttersta talet och en för att finna »det medlersta» (så kallar han antalet). Vi vilja som prof på hans regler anföra den sista.

»Det medlersta talet, som midt uti progressionen står, skall du således igen finna: tag det första talet af det sista; hvad öfverblifver, skall du dividera med progressionens skilfång. När du till qvoten 1 adderar, så hafver du det medlersta talet.»

Ex. att finna summan. Såsom en affärdigar ett bud till Geste ifrån Upsala, deremellan äro 16 mil; gifver honom för den förste milen en gammal örtug, för den andre halfannan öre, för den tredje 2 öre och en fyrk och för den fjerde 3 öre, och så vidare ökades på hvar mil 3 fyrkar. Huru mycket får han för den ytterste, såsom ock hvad löper hela summan som han förtjent hafver? Facit.

---

* Se under Bothvidi sid. 157. Exemplet förekommer redan hos Gemma.

12 öre för den ytterste milen, summan är 3 daler och 6 öre.

Regula cœcis sive virginum.

Utan vidare förklaring börjar Aurelius sålunda:

»Uti denna regula skall man således procedera. Sätt mantalet vid den venstra handen, och hvad förtärdt är skall sättas vid högra handen. Item, midtuti skall hvar person särdeles samt deras utlagde penningar sättas. Sedan skall man resolvera alla utlagde penningar till det minsta myntet som man hafver; dernäst skall man ock multiplicera det mindre myntet med personernas summa; hvad deraf kommer, skall subtraheras af de förtärda penningar, det öfriga skall sättas afsides. Sist skall du alltid subtrahera det minsta talet från det största; och det som är öfver skall vara delaren. När det skedt är, så tag det öfverblifna talet och dela det i några vissa delar, hvilka du jemnt afdela kan med de små delarne, så att der intet brutet tal vidhänger, eljest står det snöpligt, att man halfva personer framställa kan.»

Efter denna regel, hvilken i afseende på tydlighet ingalunda är något mästerstycke, kommer följande exempel, som handlar om jungfrur:

»Uti ett värdshus gästa 30 personer tillhopa, de hafva förtärt 6 mark ringare * 2 öre. När en mansperson lägger ut 5 öre, så gifver en hustru 3 öre och en piga 1 öre. Nu spörs här, huru många män, hustrur och pigor i synnerhet uti samma värdshus varit hafva.»

Uträkningens gång enligt nyss nämnda regel är följande:

»46	5	4 personer	2 män,
30	3	2 . 30	4 qvinnor,
16	1		24 pigor.

Säg alltså: en gång 30, det är 30, dem subtrahera af

---

* Af sammanhanget framgår, att härmed menas: minskadt med (minus), alldenstund 6 mark ringare 2 öre = 46 öre = (6 . 8 — 2) öre.

46 öre, rester 16. Det är det tal, som delas skall. Sedan tag 1 af 5, rester 4. Item 1 af 3, rester 2. Dessa två äro delare. Tag nu de förre 16 och dela honom uti två delar, så att du jemnt dividere kan med 4 och 2, likasom 8 och 8; det första dela med 4 och det sista med 2, så finner en 2 män 4 qvinnor.»

Vi anföra på jungfruregeln ännu ett exempel:

»En man vill göra bröllop åt sin dotter, sänder sin dräng ut med 100 daler. Derföre skall han köpa 100 stycken boskap, oxar, svin, får och gäss. För en oxe gifver han 4 daler, för hvart svin 2 daler, för ett får 3 mark och för en gödd gås 2 mark. Nu spörs, huru många stycken han af hvart slag bekommit hafver. Facit. 10 oxar, 4 svin, 36 får och 50 gäss.»

400 . 200 . 4	14	100
200	2	6	4
	3	1	400
	2		

Gången är: 2 . 100 = 200; 400 – 200 = 200; 200 delas i 3 delar, så att den första kan delas med 14, den andra med 6, den tredje med 1, t. ex. 140, 24, 36.

Vi vilja söka förklaringen till detta förfaringssätt.

Låt hvarje person i grupperna A_1, A_2, . . . A_n gifva ut respektive . . . . a_1, a_2, . . . a_n, och låt grupperna vara ordnade så, att a_1 är minst. Låt vidare antalet personer i dessa grupper vara respektive

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ x_n\,,$$

samt summan af alla personerna = N och summan af alla utgifterna = S. Då har man enligt uppgiften:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + \ldots + x_na_n = S,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = N.$$

Genom eliminering af x_1 erhålles:

$$x_2(a_2 - a_1) + x_3(a_3 - a_1) + \ldots + x_n(a_n - a_1) = S - a_1N.$$

För att finna de $(n-1)$ obekanta x_2, x_3, . . . x_n, skall man således sönderdela $S - a_1 n$ i $(n-1)$ delar, hvilka äro delbara med respektive

$$a_2 - a_1 , \quad a_3 - a_1 , \; . \; . \; . \; a_n - a_1 ,$$

hvilket just är den regel, som Aurelius i dunkla ordalag uppgifvit.

Tillämpa vi denna regel på det förra exemplet, så finna vi, emedan 16 lämpligen kan uppdelas i 16 och 0, 12 och 4, 8 och 8, följande möjligheter:

I värdshuset hafva varit antingen 0 män, 8 qvinnor, 22 pigor,

eller	1	»	6	»	23	»	
eller	2	»	4	»	24	»	
eller	3	»	2	»	25	»	
eller	4	»	0	»	26	».	

Tillämpas åter regeln på det senare exemplet, erhållas icke mindre än 177 möjliga system, af hvilka vi blott upptaga tvenne:

1) 0 oxar, 33 svin, 2 får och 65 gäss,

2) 7 » 2 » 90 » » 1 gås.

Efter jungfruregeln följer rotutdragning och regula falsi med ett och 2 antaganden, hvilka lösas på samma sätt som hos Clavius sid. 64. Här förekommer exemplet angående Alexander och Klytus, vidare det om Hieros krona, hvilket vi nu framställa:

Ex. 1. på *regula falsi* *. Vitruvius berättar i det tredje kapitlet af sin nionde bok, att konung Hiero beslutit gifva sina gudar en krona af rent guld. Han uppdrog åt en guldsmed att förfärdiga den. Men denne tog, såsom ofta

* Exemplet är framstäldt sådant det förekommer hos Gemma Friesius († 1555). Vi se af hans antaganden angående det vatten, som flöt öfver kanten, då guld och silfver nedsänktes i ett kärl fullt med vatten, att han ej hade begrepp om guldets och silfrets egentliga vigt. Enligt hans uppgifter skulle guldets egentliga vigt vara $\frac{5}{3} = 1{,}67$ och silfrets $\frac{5}{4\frac{1}{2}} = 1{,}11$ i st. f. talen 19,26 och 10,47. Enligt Aurelius skulle förhållandet mellan guldets och silfrets egentliga vigter vara såsom 3 till 2.

händer, en del guld och tillsatte i stället lika mycket silfver. Utan att skada den redan färdiga kronan upptäcker syrakusanaren Arkimedes stölden på följande sätt. Han skaffade sig en massa rent guld af samma vigt som kronan, likaledes en massa rent silfver. Sedermera nedsänkte han dem den ena efter den andra i ett kärl fullt med vatten och vägde på det sorgfälligaste det afrinnande vattnet. Häraf upptäckte Arkimedes, huru mycket guld och huru mycket silfver kronan innehöll. Vitruvius säger ingenting vidare.

Vi vilja antaga att kronan vägde 5 ℔; att, då guldmassan nedsänktes, 3 ℔ vatten flöt öfver kanten, men då kronan nedsänktes $3\frac{1}{4}$ ℔, samt då silfret nedsänktes $4\frac{1}{2}$ ℔. Svar: $4\frac{1}{6}$ ℔ guld och $\frac{5}{6}$ ℔ silfver.

Ex. 2. En ung person möter några jungfrur tillsamman, helsar dem sålunda: går i frid, I hundrade tillsammans! Svarade en af dem och sade: vi äre icke så många, utan om vi ännu vore här till så många och en halfpart och $\frac{1}{4}$ och 12 dertill, så vore vi alle 67. Nu spörs här, huru många jungfrurna voro. Svar: 20.

Aurelii bok afslutas med sju s. k. korollarier (»lustiga sällskapsfrågor»). Vi framställa en:

En venedisk köpman fraktar ett skepp till Neapolis, till honom komma 15 kristne och 15 judar och förtinga sig med honom öfver hafvet. När de kommo ut, då växte en hufvudstorm i sjön, att skepparen begynte tvifla om deras välfärd, och så framt mesta delen af godset och halfparten af folket icke öfver bord kastades, då måste de alla samtlige i grund förgås. Här begynna de rådslå och ställa uti skepparens magt, att han dem uti en ring ställa skulle och hvar nionde person öfver bord kasta, och läto honom så begynna att räkna på hvilken han först ville, till dess 15 voro utkastade. *Den fromme* * skepparen ville gerna

* Kursiveringen är gjord af den, som skrifver historiken.

skona de kristne, hvar möjligt vore, och laga så, att lotten alltid föll på judarne, att hvar 9:de, som utkastades, skulle vara en jude. Och blefvo således alle 15 judar om halsen och de kristne behållne. Nu må en gerna veta, huruledes han dem i ordning ställt hafver.

Svaret finnes af vokalerna i minnesversen:

Populeam virgam mater regina ferebat,

hvarest $a = 1$, $e = 2$, $i = 3$, $o = 4$, $u = 5$.

Man skall således uppställa först $4(= o)$ kristna, sedan $5(= u)$ judar o. s. v.

Skulle hvar tionde hafva kastats öfver bord, skulle de hafva uppställts enligt vokalerna i minnesversen;

Rex Paphi cum gente bona dat signa serena.

(Forts.)

Satserna 56 och 59 (E. Lundberg) samt 36 (K. Wicksell),

lösta af E. M. Frykberg.

Elev vid Teknologiska Institutet.

56. Lös eqvationen $\sqrt[5]{1 - 3x^2} + \sqrt[5]{36x^2 - 1} = 3\sqrt[5]{x^2}$.

Genom att öfverallt dividera med $\sqrt[5]{x^2}$ erhålles

$$\sqrt[5]{36 - \frac{1}{x^2}} = 3 - \sqrt[5]{\frac{1}{x^2} - 3}\,.$$

Sätter man här

$$\sqrt[5]{\frac{1}{x^2} - 3} = z,$$

blifver

$$\sqrt[5]{33 - z^5} = 3 - z\,.$$

Upphöjes denna eqvation till 5:te digniteten, fås

$$z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 27z + 14 = 0\,.$$

Genom att lägga $\frac{25}{4}$ till hvardera ledet, blir det venstra en jemn qvadrat, och man erhåller följande eqvation:

$$(z^2 - 3z + \tfrac{9}{2})^2 = \tfrac{25}{4}$$

eller, genom rotutdragning ur båda leden,

$$z^2 - 3z + \tfrac{9}{2} = \pm \tfrac{5}{2},$$

hvaraf

$$z = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2}\{3 \pm \sqrt{19} . \sqrt{-1}\} \end{cases}, \text{ och således } \frac{1}{x^2} = \begin{cases} 35 \\ 4 \\ \frac{1}{2}\{39 \mp 59\sqrt{19} \cdot \sqrt{-1}\}, \end{cases}$$

hvilka värden tillfyllestgöra eqvationen.

59. Låt KA vara utdragen till O, gör $AO = CE$ och sammanbind O med B och C, och låt AE råka BI och BC i M och N. Emedan $AO \# CE$, så är $CO // AE$, och emedan $\wedge ENC = \wedge BNM$ och $\wedge AEC = \wedge IBC$, så är $\wedge BMN = \wedge ECN = R$; alltså BI vinkelrät mot AE och således äfven vinkelrät mot CO.

På samma sätt bevisas att CF är vinkelrät mot BO. OL är också vinkelrät mot BC. Följaktligen sammanfalla linierna BI, CF, OL med de tre höjderna i triangeln BOC; och således måste BI och CF råkas på perpendikeln AL. H. s. b.

36 *. Låt punkterna E, D, F vara tagna på sidorna AC, BC, AB i $\triangle ABC$ så, att $AE = \frac{1}{n} AC$, $CD = \frac{1}{n} BC$ och $BF = \frac{1}{n} AB$; låt vidare AD råka BE i G och CF i H, och låt CF och BE råka hvarandra i I. Drag $EK //$ BC tills den råkar AD i K.

Emedan $EK // CD$, så är $CD : EK = AC : AE = n : 1$; vidare är $BD : CD = n - 1 : 1$, alltså $BD : EK = BG : EG$

* Denna sats är äfven löst af P. W. Almquist.

$= n(n-1):1$, hvaraf följer att $BE:EG = 1+n(n-1):1$ $= \triangle ABE : \triangle AEG$ och således

$$\triangle AEG = \frac{1}{1+n(n-1)} \triangle ABE = \frac{1}{1+n(n-1)} \cdot \frac{1}{n} \triangle ABC.$$

På samma sätt bevisas att $\triangle CDH$ och $\triangle BFI$ äro hvardera $= \dfrac{1}{1+n(n-1)} \cdot \dfrac{1}{n} \triangle ABC$.

Vidare är $\triangle GHI = \triangle ABC - \triangle ABE - \triangle ACD - \triangle BCF + \triangle AEG + \triangle BFI + \triangle CDH = \triangle ABC - \dfrac{3}{n} \triangle ABC + \dfrac{3}{1+n(n-1)} \cdot \dfrac{1}{n} \triangle ABC \therefore \triangle GHI = \dfrac{(n-2)^2}{1+n(n-1)} \cdot \triangle ABC$.

Sättes $n = 3$, så blir $\triangle GHI = \frac{1}{7} \triangle ABC$.

Satserna 44—51 (A. E. Hellgren), 77 (J. E. Cederblom), samt 98 (C. E. Lundström),

lösta af löjtnant P. W. ALMQUIST.

44. Emedan vinklarne ADE och B tillsammans utgöra 2 räta, så kan en cirkel uppritas, som går genom alla fyra punkterna A, B, E och D, och de tangenter, som från C kunna dragas till de bågar af denna cirkel, hvilka stå på styckena AD och BE, äro lika stora. Men alla tangenter, som kunna dragas från C till cirkelbågar på AD äro sins emellan lika stora, emedan de alla äro medelproportionaler till AC och CD, och alla tangenter, som dragas från C till cirkelbågar på BE äro medelproportionaler till BC och CE, och således äfven sins emellan lika stora. Alla de förra tangenterna äro derföre också lika med alla de senare, h. s. b.

45 *. Låt A och B vara de gifna medelpunkterna. Emedan tvenne cirklars gemensamma (yttre) tangent (stycket mellan tangeringspunkterna) är katet i en rätvinklig triangel, hvars hypotenusa är afståndet emellan medelpunkterna och hvars andra katet utgör skilnaden emellan cirklarnes radier, så upprita på AB en halfcirkel och aptera i densamma från A en korda AC af samma längd, som den gifna gemensamma tangenten, så blir afståndet BC lika med skilnaden emellan de sökta cirklarnes radier. Utdrag nu BC åt C till D, så att BD blir lika med samma radiers gifna summa, och skär CD midt i tu i E, så blifva BE och ED de sökta radierna.

Anm. Emedan tvenne cirklars gemensamma inre tangent (stycket emellan tangeringspunkterna) är katet i en rätvinklig triangel, hvars hypotenusa är afståndet emellan medelpunkterna och hvars andra katet utgör summan af cirklarnes radier, så finner man ock lätt lösningen till det problem, som erhålles, om i denna sats ordet »summa» utbytes mot »skilnad».

46. Lemma. *Att på en gifven rät linie finna en punkt så belägen, att skilnaden emellan dess afstånd från tvenne gifna punkter är lika med en gifven rät linie.*

För korthetens skull antaga vi, att lösningen af denna sats är känd **.

* Sats 45 är äfven löst af Erik.

** Denna sats reduceras lätt till följande: att konstruera en cirkel, som har sin medelpunkt på en gifven rät linie, går genom en gifven punkt och tangerar en gifven cirkel; hvilket åter löses på följande enkla sätt.

Upprita en godtycklig cirkel, som har sin medelpunkt på den gifna linien, som går genom den gifna punkten och som skär den gifna cirkeln, samt uppdrag dessa båda cirklars gemensamma korda. Drag vidare genom den gifna punkten en rät linie vinkelrät mot den gifna linien och tag skärningspunkten mellan denna linie och den nyss dragna gemensamma kordan, samt drag från denna skärningspunkt en tangent till den gifna cirkeln. Tangeringspunkten emellan denna tangent och den gifna cirkeln är tillika tangeringspunkt emellan den gifna cirkeln och den sökta, hvilken derefter lätt uppritas.

Låt då A och B vara de begge gifna medelpunkterna och uppdrag en rät linie CD, som är parallel med AB och hvars afstånd från AB är lika med halfva längden af den gemensamma kordan, så måste de sökta cirklarnes ena skärningspunkt infalla på CD. Emedan vi vidare känna längden af den gemensamma (yttre) tangenten, så är ock skilnaden emellan de sökta cirklarnes radier känd. (Se lösningen af föregående sats). Tag derföre på linien CD en punkt E, så belägen, att skilnaden emellan dess afstånd från de gifna medelpunkterna är lika med skilnaden emellan de sökta cirklarnes radier, så är E den ena af dessa cirklars skärningspunkter.

47. Vi antaga såsom kändt, att *tvenne cirklars gemensamma korda delar den gemensamma tangenten midt i tu.*

Låt då A och B vara de begge gifna medelpunkterna och upprita kring den ena af dem (låt vara A) en cirkel, hvars radie är lika med det gifna afståndet, så måste den i satsen omtalade vinkelspetsen infalla på denna cirkel. Upprita sedan på AB en halfcirkel och aptera i densamma från A eller B en korda, hvars vinkel med AB är komplement till den gifna vinkeln, så är denna korda sida i en rektangel, hvars motstående sida utgöres af den gemensamma tangenten. Skär derföre denna korda midt i tu och drag genom skärningspunkten, åt motsatt sida om kordan i förhållande till AB en rät linie, som är vinkelrät mot kordan, så måste denna linie äfven skära den gemensamma tangenten midt i tu, och går derföre genom den i satsen omnämnda vinkelspetsen, hvilken således sammanfaller med skärningspunkten emellan denna linie och den kring A uppritade cirkeln. Drag sedan genom denna skärningspunkt en rät linie parallel med kordan, så är denna linie de sökta cirklarnes gemensamma tangent, hvarefter cirklarne lätt uppritas.

48. Upprita på AB en halfcirkel och aptera i densamma från B en korda BF, hvars längd är lika med

Fig. 25.

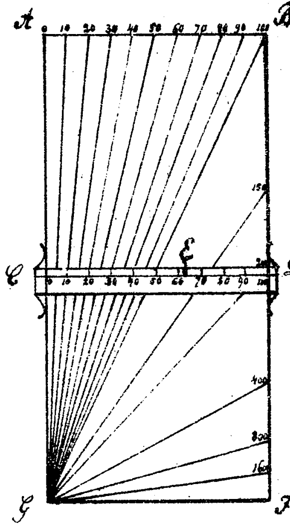


Fig. 26.

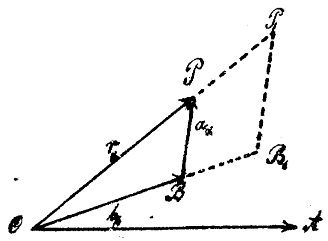


Fig. 27.

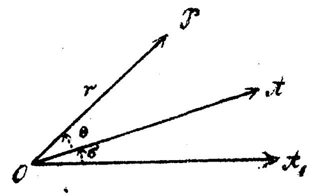


Fig. 32.

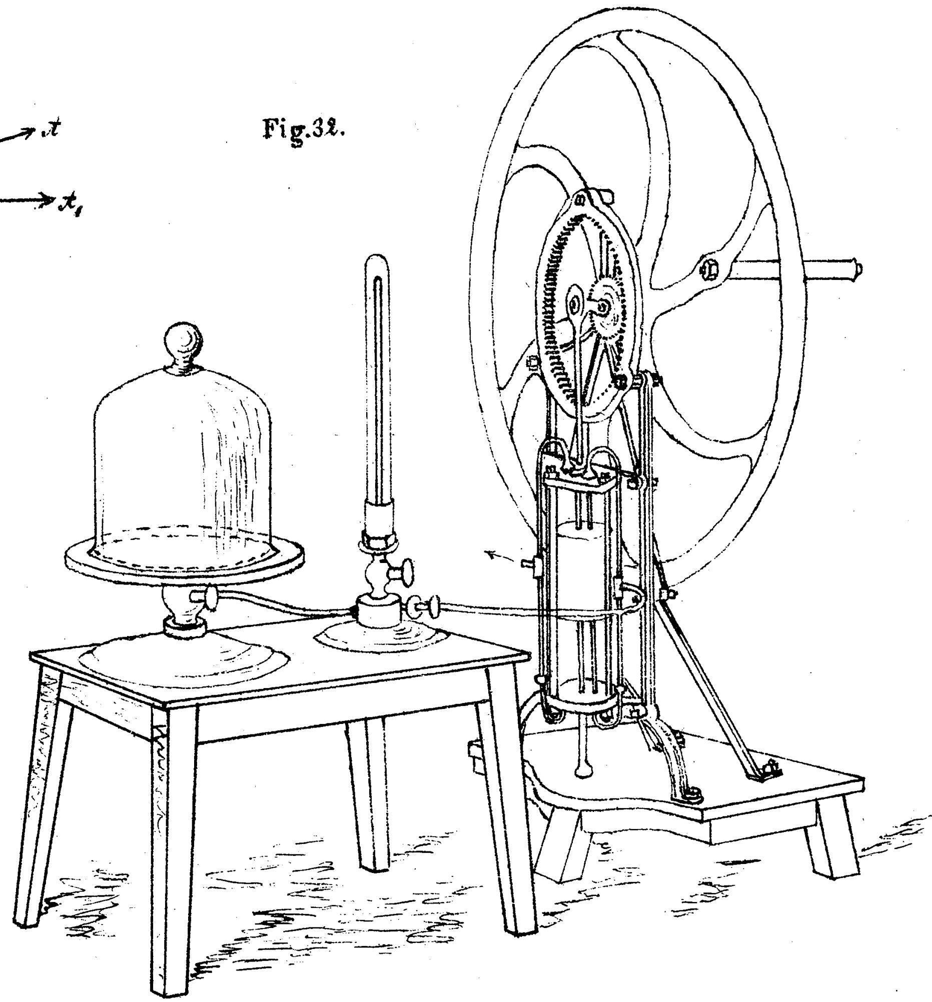


Fig. 28.

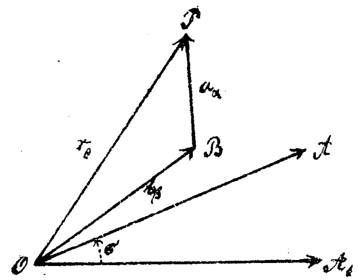


Fig. 30.

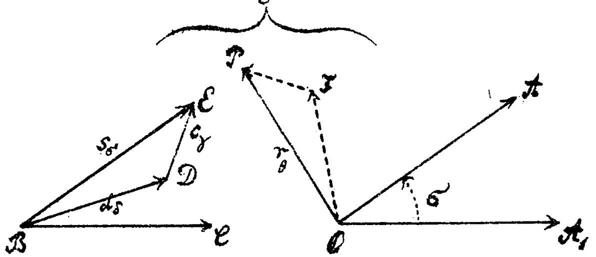


Fig. 29.

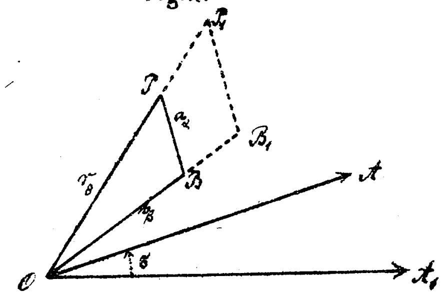
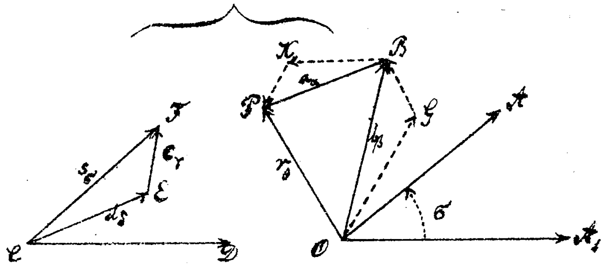


Fig. 31.

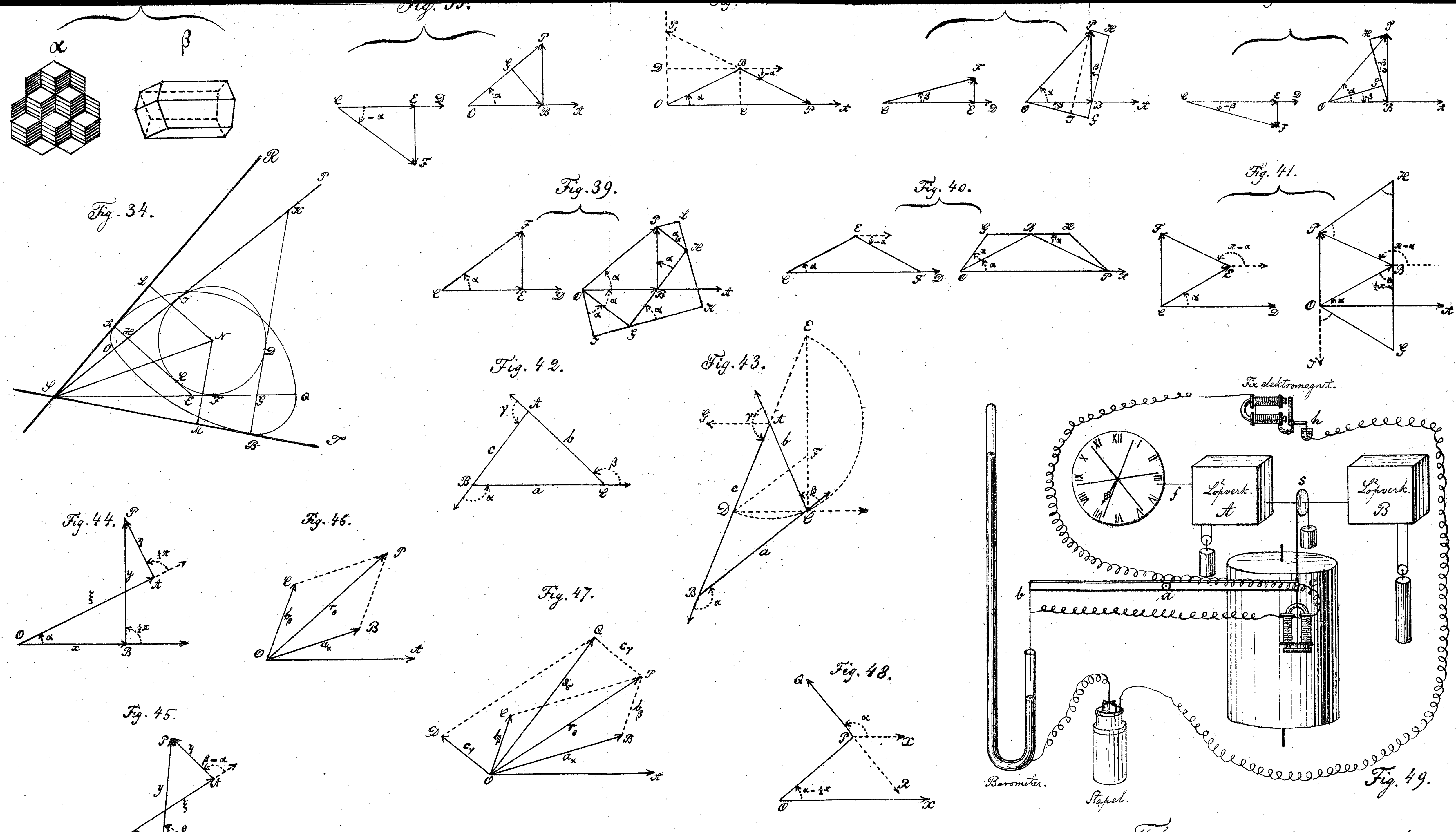


oc
oc
de
sk
lä
sk
lö
en
st
en
de

sa

oc
hv
i
U
fr
pl
en
sa
dr
i
kc
ta
or
sk
rit
en
ci
up

sa



Theorells registreringsapparat.

CD, samt utdrag denna korda åt B till G, så att BG blir lika med DE. Drag genom G en rät linie vinkelrät mot BG, så skär denna linie linien AB i punkten E, och drag sedan genom E en rät linie parallel med FG, så är denna linie de sökta cirklarnes gemensamma tangent, hvarefter dessa lätt uppritas.

49 *. Afsätt från A på vinkelbenen styckena AC och AD, så att AC är dubbelt så stor som AD, så delas linien CD af den gifna vinkelns bissektrice i tvenne sådana delar, att den ena delen är dubbelt så stor som den andra. Inpassa sedan linien B parallelt med CD, så delas äfven B af bissektricen på samma sätt.

50. Afsätt från spetsen A å det ena vinkelbenet ett godtyckligt stycke AB och upprita en cirkel med AB till diameter. Utdrag AB åt A till C, så att AC blir hälften af AB, och upprita på BC som diameter en cirkel, som skär det andra vinkelbenet i D. Linien BD skäres då i punkten E af den på AB uppritade cirkeln i tvenne sådana delar, att den ena delen är dubbelt så stor som den andra, och om punkten E sammanbindes med A, så är vinkeln AEB rät. Inpassa sedan den gifna räta linien parallelt med BD, så är den också vinkelrät mot AE och skäres af honom i tvenne sådana delar, att den ena delen är dubbelt så stor som den andra.

51. Betecknas den sökta sekantens hela längd med x samt längden af den tangent, som kan dragas från den gifna punkten till den gifna cirkeln med l, så är

$$x \cdot \frac{x}{2} = l^2$$

eller

$$x^2 = 2l^2$$

hvaraf härledes följande konstruktion.

---

* Äfven löst af Erik.

Låt A vara den gifna punkten och drag från A till den gifna cirkeln en tangent AB samt genom tangeringspunkten B en rät linie BC vinkelrät emot och lika stor med AB. Tag sedan A till medelpunkt och drag en cirkel, som går genom C och skär den gifna cirkeln i D, så är AD den sökta sekanten.

77. Låt W vara den vattenmängd, som rymmes i dammen, V den vattenmängd, som tillflödet medför per timme, v den vattenmängd, som hvarje hästkraft förbrukar per timme, samt x det sökta antalet spindlar, så har man följande eqvationer:

$$\frac{\frac{1}{5}W}{v} = \frac{\frac{1}{7}W}{v} + 6 \,.\, 2\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{5}W}{v} = \frac{1}{17\frac{1}{2}} \cdot \frac{W}{v} + \frac{V}{v}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{V}{v} \,.$$

I de två första eqvationerna angifva begge membra det antal hästkrafter, som erfordras för drifvande af alla de gamla verken, och den tredje eqvationen uttrycker, att det antal hästkrafter, som erfordras för drifvandet af det nya spinneriet, icke öfverstiger det, som lemnas af tillflödet ensamt, hvilket är nödvändigt, för att spinneriet skall kunna gå oafbrutet. Ur dessa eqvationer kunna qvantiteterna $\frac{W}{v}$ och $\frac{V}{v}$ elimineras, hvarigenom man får

$$x = 4000 \,.$$

98. a) Är C den gifna vinkeln, $2p$ perimetern och k^2 arean, så är

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$k^2 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \,.$$

Häraf fås

$$\frac{k^2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C} = p(p-c)$$

eller

$$p - c = \frac{k^2}{p \operatorname{tg}\frac{1}{2}C}.$$

Gör nu linien $AD = p$ och $\wedge DAE = \frac{1}{2}C$ samt drag $DE \perp$ mot AD, så är

$$DE = p \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C.$$

Afskär vidare af DA linien $DF = k$ samt af DE linien $DG = k$, och drag $GB // EF$ tills den råkar AD i B, så är

$$BD = \frac{k^2}{p \operatorname{tg}\frac{1}{2}C} = p - c$$

samt

$$AB = c$$

och således är AB den sidan i den sökta triangeln, som står emot den gifna vinkeln C.

Sök vidare den tredje proportionalen AL till AB och k, så är AL hälften af den mot AB vinkelräta höjden i den sökta triangeln. Gör slutligen $AM \perp$ mot AB och lika stor med $2AL$, drag $MC // AB$ samt konstruera på AB ett cirkelsegment ACB, som innehåller den gifna vinkeln C, så blir ACB den sökta triangeln.

β) Låt AB vara den gifna sidan och m det gifna förhållandet. Tag på linien AB de begge punkterna D och E, hvilka äro så belägna, att

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE} = m$$

samt upprita en cirkel på DE såsom diameter. Emedan det är bekant, att denna cirkel utgör locus för alla de punkter, hvilka äro så belägna, att deras afstånd från A och B hafva till hvarandra det gifna förhållandet m, så måste den sökta triangelns tredje vinkelspets vara belägen på denna cirkel.

Emedan vidare den sökta triangelns area är känd, så känner man också storleken h af den mot AB vinkelräta höjden i samma triangel. Drag derföre linien $CC' \parallel AB$ på afståndet h, så är ABC eller ABC' den sökta triangeln.

ÅFDELNING II.

Om bråkexponenter.

Af löjtnant P. W. ALMQVIST.

Om z är en algebraisk qvantitet hvilken som helst samt m och n hela positiva tal, så betecknar, såsom bekant,

$$z^m$$

den m^{te} digniteten af z,

$$z^{\frac{1}{n}} = (z)^{\frac{1}{n}}$$

den principala n^{te} roten ur z, samt

$$((z))^{\frac{1}{n}}$$

hvar och en af qvantitetens z alla n^{te} rötter. Deremot är det icke af beteckningssättet sjelft tydligt, huruvida uttrycken

$$z^{\frac{m}{n}} = (z)^{\frac{m}{n}} \quad \text{och} \quad ((z))^{\frac{m}{n}}$$

skola beteckna m^{te} digniteten af resp. den principala n^{te} roten och af hvarje n^{te} rot till z, så att man har

$$\left.\begin{aligned} z^{\frac{m}{n}} = (z)^{\frac{m}{n}} &= (z^{\frac{1}{n}})^m \\ ((z))^{\frac{m}{n}} &= [((z))^{\frac{1}{n}}]^m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

eller om samma uttryck skola beteckna resp. den principala $n^{\underline{te}}$ roten och hvarje $n^{\underline{te}}$ rot ur z^m, i hvilket fall man skulle hafva

$$\left.\begin{array}{l} z^{\frac{m}{n}} = (z)^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}} \\ ((z))^{\frac{m}{n}} = ((z^m))^{\frac{1}{n}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(B).}$$

Vi vilja försöka att i nedanstående uppsats något närmare belysa olikheten emellan dessa begge uppfattningssätt af bråkexponentens betydelse.

Antaga vi då, att r är modylen och τ principal-argumentet för z samt k ett helt positivt eller negativt tal eller ock noll, så har man, såsom bekant,

$$z^m = r^m(\operatorname{Cos} m\tau + i\,.\operatorname{Sin} m\tau) \ldots\ldots \text{(1)},$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{\tau}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{\tau}{n}\right) \ldots\ldots \text{(2)},$$

$$((z))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\!\!\sqrt{z}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{\tau + 2k\pi}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{\tau + 2k\pi}{n}\right) .\ \text{(3)},$$

i hvilken senaste formel högra membrum är kapabelt af n olika värden, hvilka erhållas genom att tilldela k n konsekutiva värden hvilka som helst, såsom $0, 1, 2, \ldots (n-1)$. Emedan vidare modylen r alltid är en reel positiv qvantitet, så har man städse

$$(r^{\frac{1}{n}})^m = (r^m)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

och således blir

$$(z^{\frac{1}{n}})^m = \left[r^{\frac{1}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{\tau}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{\tau}{n}\right)\right]^m = r^{\frac{m}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{m\tau}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{m\tau}{n}\right) \text{ (5)},$$

$$[((z))^{\frac{1}{n}}]^m = \left[r^{\frac{1}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{\tau + 2k\pi}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{\tau + 2k\pi}{n}\right)\right]^m$$

$$= r^{\frac{m}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{m(\tau + 2k\pi)}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{m(\tau + 2k\pi)}{n}\right) .\ \text{(6)}.$$

Är nu $\frac{m'}{n'}$ det oförkortliga bråk, som är lika med $\frac{m}{n}$, så är också

$$r^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m'}{n'}}.$$

För hvilket värde som helst på k är dessutom

$$\frac{m(\tau + 2k\pi)}{n} = \frac{m'(\tau + 2k\pi)}{n'}$$

och således blir enligt (5) och (6)

$$(z^{\frac{1}{n}})^m = (z^{\frac{1}{n'}})^{m'} + r^{\frac{m'}{n'}}\left(\text{Cos}\,\frac{m'\tau}{n'} + i\,.\,\text{Sin}\,\frac{m'\tau}{n'}\right) \ldots (7),$$

$$[((z))^{\frac{1}{n}}]^m = [((z))^{\frac{1}{n'}}]^{m'} = r^{\frac{m'}{n'}}\left(\text{Cos}\,\frac{m'\tau + 2km'\pi}{n'} + i\,.\,\text{Sin}\,\frac{m'\tau + 2km'\pi}{n'}\right) (8).$$

För att tvenne värden k' och k'' å k skola tilldela högra membrum i formeln (8) ett och samma värde, är nu nödvändigt och tillräckligt, att skilnaden $k''m' - k'm'$ är en multipel af n', eller att bråket

$$\frac{m'(k'' - k')}{n'}$$

är ett helt tal. Men emedan m' och n' sins emellan äro primitiva, så är härtill nödvändigt och tillräckligt, att $k'' - k'$ är en multipel af n. Gifver man derföre åt k i formeln (8) n' konsekutiva värden hvilka som helst, såsom $0, 1, 2, \ldots (n' - 1)$, så erhåller denna formels högra membrum n' olika värden, men alla öfriga värden å k återgifva åt samma membrum något af de förut funna värdena. Man finner således häraf, att *qvantiteterna*

$$(z^{\frac{1}{n}})^m \quad \text{och} \quad [((z))^{\frac{1}{n}}]^m$$

förblifva oförändrade, om bråket $\frac{m}{n}$ *förlänges eller förkortas, samt att den senare städse har så många värden, som utvisas af samma bråks minsta möjliga nämnare.*

I formeln (8) kunna vi ock sätta

$$\frac{km'}{n'} = q + \frac{k'}{n'},$$

der q är ett helt tal eller noll samt k' ett helt tal, som är mindre än n', hvaraf fås

$$\frac{2km'\pi}{n'} = 2q\pi + \frac{2k'\pi}{n'},$$

och om detta uttryck på $\frac{2km'\pi}{n'}$ insättes i formeln, så kan termerna $2q\pi$ bortkastas. Men det är bekant, att om m' och n' äro sins emellan primtal, samt n' konsekutiva multiplar af m', såsom km', $(k+1)m'$, $(k+2)m', \ldots (k+n'-1)m'$, divideras med n', så blifva alla resterna olika och utgöras i någon viss ordning af talen $0, 1, 2, \ldots (n'-1)$. Formeln (8) kan derföre också erhålla utseendet

$$[((z))^{\frac{1}{n}}]^m = [((z))^{\frac{1}{n'}}]^{m'} = r^{\frac{m'}{n'}}\left(\text{Cos}\,\frac{m'\tau+2k'\pi}{n'} + i\,.\,\text{Sin}\,\frac{m'\tau+2k'\pi}{n'}\right) \quad (9),$$

der k' är hvilket som helst af talen $0, 1, 2, \ldots (n'-1)$, och hvaraf äfven synes, att högra membrum är kapabelt af inalles n' olika värden, hvilka alla hafva samma modyl och hvilkas argument differera sins emellan på $\frac{1}{n'}$-del af periferien.

Beteckna vi nu med τ_m principal-argumentet för z^m, så är enl. (1)

$$\text{Sin}\,\tau_m = \text{Sin}\,m\tau \quad \text{och} \quad \text{Cos}\,\tau_m = \text{Cos}\,m\tau$$

och således

$$\tau_m = m\tau + 2\mu\pi,$$

der μ är något visst helt tal, positivt eller negativt, eller ock noll. Vidare är

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\text{Cos}\,\frac{\tau_m}{n} + i\,.\,\text{Sin}\,\frac{\tau_m}{n}\right)$$

$$((z^m))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\text{Cos}\,\frac{\tau_m+2k\pi}{n} + i\,.\,\text{Sin}\,\frac{\tau_m+2k\pi}{n}\right)$$

och således blir

$$((z^m))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\operatorname{Cos}\frac{m\tau + 2(\mu + k)\pi}{n} + i\,.\operatorname{Sin}\frac{m\tau + 2(\mu + k)\pi}{n}\right)$$

eller om $\frac{m'}{n'}$ är det oförkortliga bråk, som är lika med $\frac{m}{n}$,

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m'}{n'}}\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2\mu\pi}{n}\right) + i.\operatorname{Sin}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2\mu\pi}{n}\right)\right].\ (10)$$

$$((z^m))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m'}{n'}}\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2(\mu+k)\pi}{n}\right) + i.\operatorname{Sin}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2(\mu+k)\pi}{n}\right)\right](11).$$

I den senare formeln kan nu talet $(\mu + k)$ genom olika värden på k erhålla hvilket helt tals värde som helst, positivt eller negativt, eller ock noll. Denna formel kan derföre också erhålla utseendet

$$((z^m))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m'}{n'}}\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2k'\pi}{n}\right) + i\,.\operatorname{Sin}\left(\frac{m'\tau}{n'} + \frac{2k'\pi}{n}\right)\right]\quad(12)$$

der k' är ett helt tal hvilket som helst, positivt eller negativt, eller ock noll. Högra membrum i denna formel är derföre kapabelt af inalles n olika valörer, hvilka erhållas genom att tilldela k' n consekutiva värden hvilka som helst, såsom 0, 1, 2, ... $(n-1)$, och alla dessa värden hafva samma modyl, men deras argument differera sins emellan på $\frac{1}{n}$-del af periferien.

Af formeln (10) finner man, *att qvantiteten*

$$(z^m)^{\frac{1}{n}}$$

icke förblir oförändrad, om bråket $\frac{m}{n}$ *förlänges eller förkortas, annat än i den speciella händelsen att*

$$\mu = 0,$$

hvartill erfordras, att man har

$$\pi > m\tau > -\pi$$

eller att τ är numeriskt mindre än $\frac{\pi}{m}$. *I denna händelse är ock*

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m = z^{\frac{m}{n}}.$$

Af formeln (12) finner man vidare, *att betydelsen af tecknet*

$$((z^m))^{\frac{1}{n}}$$

alltid förändras, när bråket $\frac{m}{n}$ *förlänges eller förkortas, samt att detta tecken alltid har så många värden, som utvisas af samma bråks nämnare.*

Är $\frac{m}{n}$ ett oförkortligt bråk, så är

$$m = m' \quad \text{och} \quad n = n'$$

och i sådant fall blir högra membrum af formeln (12) identiskt med högra membrum i (9), men är

$$m = m'.d \quad \text{och} \quad n = n'.d,$$

der d är ett helt tal, som är större än 1, så blir högra membrum i formeln (12) lika med något af värdena å samma membrum i (9) så ofta, som k' i (12) är en multipel af d, d. v. s. för de n' k'-värdena $0, d, 2d, \ldots (n'-1)d$. Man finner häraf, *att om* $\frac{m'}{n'}$ *är det oförkortliga bråk, som är lika med* $\frac{m}{n}$, *så är*

$$[((z))^{\frac{1}{n}}]^m = [((z))^{\frac{1}{n'}}]^{m'} = ((z^{m'}))^{\frac{1}{n_1}}$$

samt att alla de n' olika värden, som tillkomma hvar och en af dessa tvenne qvantiteter, återfinnas jemnt fördelade bland de n olika värdena af qvantiteten

$$((z^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Af ofvanstående undersökning är nu klart, att om betydelsen af tecknen

$$z^{\frac{m}{n}} = (z)^{\frac{m}{n}} \quad \text{och} \quad ((z))^{\frac{m}{n}}$$

skall förblifva oförändrad, när bråket $\frac{m}{n}$ förlänges eller förkortas, så måste betydelsen af dessa tecken bestämmas enligt formlerna (A), eller så, att de anses beteckna *m^{te} digniteten af resp. den principala n^{te} roten och af hvarje n^{te} rot till z.*

Grunddragen af den geometriska kalkylen.

Af G. Dillner.

(Forts. fr. sid. 223).

Härledning af liniers eqvationer*.

62. Emedan en linie först då kan sägas vara till alla delar fullt bestämd, då vi ega hvarje hennes punkt bestämd i förhållande till gifna grundbestämningar, så inses, att definitionen på en linie måste sammanfalla med angifvandet af den lag, enligt hvilken en föränderlig komplex tänkes successivt eller punkt för punkt beskrifva henne. En sådan definition uttryckes under form af eqvation, och att ur en linies definition härleda hennes bestämningar sammanfaller derföre med att enligt kalkylens lagar ur hennes eqvation utveckla de geometriska egenskaper, som tillhöra henne. Vi hafva härmed i korthet antydt den analytiska geometriens metod, och vi skola genom nedanstående exempel visa, huruledes denna metod omedelbart framträder såsom en högst enkel och naturlig följd af de grundbegrepp

* Denna rubrik, ehuru hörande till hufvudrubriken tillämpning på analytisk geometri, sid. 219, har, för undvikande af brytning, fått särskild plats i detta häfte.

vi hittills utvecklat för våra geometriska komplexer, då nämnligen dessa betraktas här såsom *föränderliga*, d. v. s. *icke* såsom fixerande blott *en enda* punkt, utan såsom fixerande successivt *en kontinuerlig följd* af punkter.

Räta linien.

63. Def. *Räta linien är en kontinuerlig följd af punkter, hvilka fixeras af en föränderlig komplex med konstant argument.*

Om ϱ_σ utmärker den föränderliga komplexen i förhållande till O som origo och OA som grundrigtning (fig. 50), så sammanfaller den räta liniens definition med eqvationen

$$\sigma = \text{konstant} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47).$$

Om vi nu med bibehållande af samma grundrigtning, $OA \,//\, O_1BC$, reducera ϱ_σ till ett nytt origo O_1 förmedelst vägen $h + k_{\frac{1}{2}\pi}$ ($h = O_1B$, $k = BO$), och om vägen till en af ϱ_σ fixerad punkt P i förhållande till det nya origo O_1 är $x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ ($x = OC$, $y = CP$), så ega vi att sätta

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = h + k_{\frac{1}{2}\pi} + \varrho_\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

hvilken likhet genom projektion sönderfaller i följande tvenne

$$x - h = \varrho \operatorname{Cos} \alpha,$$
$$y - k = \varrho \operatorname{Sin} \alpha.$$

Om $\operatorname{tg} \sigma$ sättes $= m$, der m således äfven är konstant, så erhålles genom att dividera sida med sida dessa sista likheter

$$y - k = m(x - h) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49),$$

hvilken likhet således representerar den räta linie, som går genom punkten O (h, k) och bildar med grundrigtningen $\wedge\, \sigma$, hvars tangent är m.

Enär m icke förändras, om σ ökas med π, så inses, att (49) är eqvationen för den räta linien, utstärckt åt ömse sidor om O.

Anm. Vilja vi uttrycka linien i snedvinkliga koordinater med en axelvinkel λ, så hafva vi att i (48) i stället för argumentet $\frac{1}{2}\pi$ införa λ, då projektionerna blifva

$$(x-h)+(y-k)\operatorname{Cos}\lambda = \varrho\operatorname{Cos}\sigma,$$
$$(y-k)\operatorname{Sin}\lambda = \varrho\operatorname{Sin}\sigma,$$

hvaraf fås genom division och efter lösning i afseende på $y-k$:

$$y-k = \frac{m}{\operatorname{Sin}\lambda - m\operatorname{Cos}\lambda}(x-h) = \frac{\operatorname{Sin}\sigma}{\operatorname{Sin}(\lambda-\sigma)}(x-h),$$

hvilken likhet således representerar samma räta linie i snedvinkliga koordinater.

64. Vilja vi finna eqvationen för den räta linie OQ (fig. 51), som är vinkelrät mot ϱ_σ och går genom punkten O samt är hänförd till O_1 som origo och $O_1CB\,//\,OA$ som grundrigtning, så hafva vi att sätta vägen O_1CQ = vägen O_1BOQ eller, då $O_1C = x$, $CQ = y$, $O_1B = h$ och $BO = k$ samt $OQ = r$:

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = h + k_{\frac{1}{2}\pi} + r_{\sigma+\frac{1}{2}\pi} \;\ldots\ldots\ldots\; (50),$$

hvilken likhet efter öfverflyttning af h och $k_{\frac{1}{2}\pi}$ samt multiplikation med $1_{-\frac{1}{2}\pi}$ blir

$$(x-h)_{-\frac{1}{2}\pi} + (y-k) = r_\sigma,$$

hvaraf fås genom projektion

$$y-k = r\operatorname{Cos}\sigma,$$
$$-(x-h) = r\operatorname{Sin}\sigma,$$

då slutligen

$$y-k = -\frac{1}{m}(x-h) \;\ldots\ldots\ldots\; (51),$$

hvilken likhet således representerar en rät linie som är vinkelrät mot den af (49) representerade räta linien och går genom punkten (h, k).

Antaga vi OQ bilda en vinkel α med ϱ_σ i stället för en rät vinkel, så hafva vi att i stället för (50) sätta

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = h + k_{\frac{1}{2}\pi} + r_{\sigma+\alpha},$$

hvilken likhet efter öfverflyttning af h och $k_{\frac{1}{2}\pi}$ samt mul-multiplikation med $1_{-\alpha}$ blir

$$(x-h)_{-\alpha} + (y-k)_{\frac{1}{2}\pi-\alpha} = r_\sigma,$$

hvaraf genom projektion

$$(x-h)\operatorname{Cos}\alpha + (y-k)\operatorname{Sin}\alpha = r\operatorname{Cos}\sigma,$$

$$-(x-h)\operatorname{Sin}\alpha + (y-h)\operatorname{Cos}\alpha = r\operatorname{Sin}\sigma,$$

då slutligen

$$y-k = \frac{m+\operatorname{tg}\alpha}{1-m\operatorname{tg}\alpha}(x-h) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (51)$$

blir eqvationen på en rät linie, som går genom punkten $(h,\ k)$ och bildar $\wedge\ \alpha$ med den af (49) representerade räta linien.

65. Vilja vi uttrycka räta linien CP (fig. 52) i förhållande till O som origo och OBA som grundrigtning förmedelst perpendikeln OC eller p och dess $\wedge\ \alpha$ med grundrigtningen, så ha vi att sätta vägen OBP = vägen OCP eller

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = p_\alpha + r_{\alpha+\frac{1}{2}\pi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (53),$$

då nämnligen $OB = x$, $BP = y$ och $CP = r$. Genom att multiplicera (53) med $1_{-\alpha}$ fås

$$x_{-\alpha} + y_{\frac{1}{2}\pi-\alpha} = p + r_{\frac{1}{2}\pi},$$

hvaraf grundrigtningsprojektionen blir

$$x\operatorname{Cos}\alpha + y\operatorname{Sin}\alpha = p \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (54),$$

hvilket således är den begärda eqvationen i rätvinkliga koordinater för räta linien CP.

Anm. Sätta vi i (53) ϱ_σ i stället för $x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ och multiplicera med $1_{-\alpha}$, så få vi omedelbart genom projektion

$$\varrho\operatorname{Cos}(\sigma-\alpha) = p,$$

hvilket således är eqvationen i polarkoordinater för den ifrågavarande räta linien.

66. Vilja vi slutligen uttrycka det vinkelräta afstån-

det QP (fig. 53) eller d från en känd punkt Q till en gifven rät linie OP eller ϱ_σ, hänförd till O_1 som origo och $OA \,//\, O_1BC$ som grundrigtning, så hafva vi att sätta vägen O_1CQ = vägen O_1BOPQ eller

$$p + q_{\frac{1}{2}\pi} = h + k_{\frac{1}{2}\pi} + \varrho_\sigma + d_{\sigma + \frac{1}{2}\pi} \quad \ldots\ldots (55),$$

der betydelsen af de ingående bokstäfverna är sjelfklar på grund af figuren. Genom öfverflyttning af h och $k_{\frac{1}{2}\pi}$ samt multiplikation med $1_{-\sigma}$ erhålles

$$(p-h)_{-\sigma} + (q-k)_{\frac{1}{2}\pi - \sigma} = \varrho + d_{\frac{1}{2}\pi},$$

hvaraf fås genom projiciering

$$\left.\begin{aligned}(q-k)\,\mathrm{Sin}\,\sigma + (p-h)\,\mathrm{Cos}\,\sigma &= \varrho \\ (q-k)\,\mathrm{Cos}\,\sigma + (p-h)\,\mathrm{Sin}\,\sigma &= d\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (56).$$

Genom att införa $\mathrm{tg}\,\sigma = m$ blir den senare likheten

$$d = \frac{(q-k) - m(p-h)}{\pm\sqrt{1+m^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (57),$$

en välbekant formel.

Anm. Den förra af likheterna (56) ger oss afståndet från punkten O eller (h, k) till perpendikelns fotpunkt P. För det fall, att QP bildar en $\wedge\, v$ hvilken som helst med OP, hafva vi att i (55) införa $d_{\sigma+v}$ i stället för $d_{\sigma+\frac{1}{2}\pi}$ samt för öfrigt förfara på analogt sätt.

Koniska sektionen.

67. Def. *Cirkeln är en kontinuerlig följd af punkter, hvilka fixeras af en föränderlig komplex med konstant modyl.*

Om ϱ_σ utmärker den föränderliga komplexen, så sammanfaller cirkelns definition med eqvationen

$$\varrho = \text{konstant} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58).$$

68. Def. *Ellipsen är en kontinuerlig följd af punkter, hvilka fixeras af två föränderliga, från hvar sitt origo utgående, komplexer, hvilkas modyler bilda en konstant summa.*

Om r_θ och ϱ_σ utmärka de två föränderliga komplexerna, utgående från hvar sitt origo A och O (fig. 54) och fixerande punkten P, så sammanfaller ellipsens definition med eqvationen

$$r + \varrho = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59),$$

då $2a$ utmärker en konstant.

Om AO sättes $= 2ae$ och nämnda linie tages till grundrigtning, så erhålles den geometriska likheten

$$r_\theta = 2ae + \varrho_\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (60).$$

Genom att i denna likhet taga modylerna å ömse sidor fås

$$r^2 = 4a^2e^2 + 4ae\varrho \operatorname{Cos} \sigma + \varrho^2,$$

hvaraf följer, om man med hjelp af (59) eliminerar r:

$$\varrho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos} \sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61),$$

hvilket således är ellipsens eqvation, uttryckt i ϱ och σ.

69. Def. *Hyperbeln är en kontinuerlig följd af punkter, hvilka fixeras af två föränderliga, från hvar sitt origo utgående, komplexer, hvilkas modyler bilda en konstant skilnad.*

Om ϱ_σ och r_θ utmärka de två föränderliga komplexerna, utgående från hvar sitt origo O och A (fig. 55) och fixerande punkten P, så sammanfaller hyperbelns definition med eqvationen.

$$r - \varrho = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62),$$

då $2a$ utmärker en konstant.

Om OA sättes $= 2ae$ och nämnda linie tages till grundrigining, så erhålles den geometriska likheten

$$\varrho_\sigma = 2ae + r_\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63).$$

Genom att öfverflytta $2ae$ och taga modylerna å ömse sidor fås

$$\varrho^2 - 4ae\varrho \operatorname{Cos} \sigma + 4a^2e^2 = r^2,$$

hvaraf följer, om man med hjelp af (62) eliminerar r:

$$\varrho = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \operatorname{Cos} \sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64).$$

Sätta vi i stället för (62) $\varrho - r = 2a$, då ϱ_σ ch r_θ fixera en punkt af läget P', så erhålles efter eliminering af r:

$$\varrho = \frac{-a(e^2-1)}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65),$$

hvilken eqvation fås ur den förra genom att ändra tecken för a och e, då således ϱ_σ beskrifver hyperbelarmen P eller P', allt eftersom ϱ är bunden vid σ genom relationen (64) eller (65).

70. Def. *Parabeln är en kontinuerlig följd af punkter, hvilka fixeras af en föränderlig komplex, hvars modyl är = den fixerade punktens vinkelräta afstånd från en gifven linie.*

Vi låta den föränderliga komplexen ϱ_σ utgå från O som origo (fig. 56) och vara hänförd till den mot den gifna linien AB vinkelräta linien OA som grundrigtning. Om vi sätta $OA = p$, så sammanfaller parabelns definition med eqvationen

$$\varrho = p - \varrho\,\mathrm{Cos}\,\sigma,$$

hvilken på samma gång uttrycker sambandet mellan ϱ och σ och vanligen förekommer under formen

$$\varrho = \frac{p}{1+\mathrm{Cos}\,\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66).$$

71. Eqvationerna (58), (61), (64) och (66) kunna sammanfattas under den allmänna eqvationen

$$\varrho(1 + e\,\mathrm{Cos}\,\sigma) = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67),$$

hvilken således för $e = 0$ representerar cirkeln, för $e < 1$ ellipsen, för $e > 1$ hyperbeln och för $e = 1$ parabeln. Vi kalla derför (67) för *den allmänna eqvationen för en konisk sektion.*

72. Vi låta ϱ_σ, hänförd till O (focus) som origo och OA (axeln) som grundrigtning (fig. 57), enligt (67) beskrifva en konisk sektion AP. Vilja vi nu uttrycka denna

koniska sektion i rätvinkliga koordinater i förhållande till ett nytt origo O_1 och en ny grundrigtning $O_1CD \,//\, OB$, då $\wedge\, BOA = \alpha$ och vägen $O_1CO = h + k_{\frac{1}{2}\pi}$, så ha vi att sätta

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = h + k_{\frac{1}{2}\pi} + 1_\alpha \cdot \varrho_\sigma \quad \ldots\ldots (68),$$

då således x ($= OD$) och y ($= DP$) äro de rätvinkliga koordinater, som i förhållande till de nya grundbestämningarna fixera samma punkt P på den koniska sektionen som ϱ_σ.

Genom att i (68) öfverflytta h och $k_{\frac{1}{2}\pi}$ samt taga modylerna å ömse sidor erhålles

$$\varrho = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (69).$$

Om vi efter nämnda öfverflyttning multiplicera (68) med $1_{-\alpha}$, erhålles

$$(x-h)_{-\alpha} + (y-k)_{\frac{1}{2}\pi-\alpha} = \varrho_\sigma,$$

hvaraf grundrigtningsprojektionen blir

$$\varrho \operatorname{Cos} \sigma = (x-h) \operatorname{Cos} \alpha + (y-k) \operatorname{Sin} \alpha \quad \ldots\ldots (70).$$

Genom att addera likheten (69) och (70), efter den senares multiplicering med e, fås med stöd af (67):

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} + e\{(x-h) \operatorname{Cos} \alpha + (y-k) \operatorname{Sin} \alpha\} = p \quad (70),$$

hvilket således är den allmänna eqvationen i rätvinkliga koordinater för en konisk sektion, hvars focus är bestämd af de rätvinkliga koordinaterna h och k och hvars axel (rigtad från focus till närmaste punkten på sektionen) är bestämd af $\wedge\, \alpha$.

Anm. Genom att hyfsa (71) erhålles en fullständig andre grads eqvation af formen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

der koëfficienterna A, B, ... F innehålla α, e, h, k och p. Om nu en andre grads eqvation mellan x och y af formen

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

är gifven, så kunna vi af likheterna

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{D_1}{D} = \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F}$$

beräkna de fem konstanterna α, e, h, k och p, hvaraf således inses, att eqvationen (71) i sig innebär hela teorien * om den koniska sektionen.

Cykloiden.

73. Def. *Den linie O_1P (fig. 58), som beskrifves af en punkt P på en cirkels omkrets, under det denne rullar utan att glida på en rät linie O_1A, kallas cykloid.*

Låt O vara cirkelns medelpunkt och A hans tangentpunkt med O_1A; låt vidare OP, hänförd till OA som grundrigtning och beskrifvande negativa argument, utmärkas med komplexen $\varrho_{-\sigma}$; vi hafva då att reducera $\varrho_{-\sigma}$ först till O_1A som ny grundrigtning förmedelst $1_{\frac{3}{2}\pi}$ och

---

* Vi kunna icke underlåta att här rigta en anmärkning mot ett temligen gängse föreställningssätt rörande karakteren af den lägre geometrien (Euklides) och den högre eller analytiska geometrien (Cartesius): man har nämnligen kallat den förra syntetisk i motsats till den senare såsom analytisk, viljande dermed antyda den logiska skilnaden mellan begges utvecklingsmetoder. Af det föregående torde redan kunna inses, att vi här likasom i den lägre geometrien utgå från definitioner (eqvationer) och allmänna grundsatser (räknelagar), då vi ur dessa hafva att steg för steg (förmedelst kalkyl) härleda de konkretare bestämningar, som tillhöra det definierade begreppet. Den logiska gången är således hos begge geometrierna i grunden densamma, nämnligen den syntetiska. Hela skilnaden mellan dessa båda geometrier belöper sig således hufvudsakligen dertill, att, då den lägre utvecklar sitt innehåll ur definitionerna genom vanligt räsonnerande, så betjenar sig den högre för samma ändamål af ett särskildt för det matematiska räsonnementet utbildadt teckenspråk, kalkylen, hvarigenom det blir för denna senare möjligt att med lika lätthet och ledighet behandla de mest komplicerade kroklinier, som det är för den förra att behandla cirkeln. Afser man åter med ordet analytisk sjelfva verktyget för räsonnementet, kalkylen eller, som den ock kallas, analysen, så är benämningen analytisk (kalkylerande) här fullt egentlig.

derpå till O_1 som nytt origo förmedelst vägen $O_1AO = h + \varrho_{\frac{1}{2}\pi}$. Vi få således likheten

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = h + \varrho_{\frac{1}{2}\pi} + 1_{\frac{3}{2}\pi} \cdot \varrho_{-\sigma} \quad \ldots\ldots (72),$$

då nämnligen x och y utmärka de rätvinkliga koordinaterna O_1B och BP.

Om slutligen till (72) fogas vilkoret O_1A = bågen AP eller

$$h = \varrho \cdot \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (73),$$

så erhålles genom att eliminera σ mellan (73) och likhetens (72) projektioner

$$x = h - \varrho \operatorname{Sin} \sigma,$$

$$y = \varrho - \varrho \operatorname{Cos} \sigma,$$

följande uttryck

$$x = \operatorname{arccos} \frac{y - \varrho}{\varrho} - \sqrt{(2\varrho - y)y} \quad \ldots\ldots (74)$$

såsom cykloidens eqvation i x och y.

Epicykloiden.

74. Def. *Epicykloiden är den linie, som beskrifves af en punkt på en cirkels omkrets, då denne rullar utan att glida på yttre sidan af en gifven cirkel.*

Vi låta O_1C eller c_γ (fig. 59) vara den gifna cirkelns radie, hvars förlängning går genom den rullande cirkelns medelpunkt O; vi låta vidare OP eller ϱ_σ vara den i positiv led beskrifvande radien samt lägga genom $P \stackrel{s}{=}$ begynnelseläge D på den gifna omkretsen vår grundrigtning O_1DB. Vi hafva då att reducera ϱ_σ från begynnelserigtningen OA till vår grundrigtning O_1B förmedelst 1_π samt derpå till det nya origo O_1 förmedelst $(c + \varrho)_\gamma$, hvarföre vår uppställning blir

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = (c + \varrho)_\gamma + 1_\pi \cdot \varrho_\sigma \quad \ldots\ldots (75),$$

då nämnligen x och y utmärka de rätvinkliga koordinaterna OB och BP. Om till (75) fogas vilkoret $c \cdot \gamma = \varrho(\sigma - \gamma)$ eller, som är detsamma:

$$(c + \varrho) \cdot \gamma = \varrho \cdot \sigma \quad \ldots\ldots\ldots (76),$$

så fås efter eliminering af σ mellan (76) och projektionerna af (75) följande eqvationer

$$\left.\begin{aligned} x &= (c+\varrho)\operatorname{Cos}\gamma - \varrho\operatorname{Cos}\frac{c+\varrho}{\varrho}\cdot\gamma \\ y &= (c+\varrho)\operatorname{Sin}\gamma - \varrho\operatorname{Sin}\frac{c+\varrho}{\varrho}\cdot\gamma \end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots (77),$$

såsom representerande epicykloiden.

Hypocykloiden.

75. Def. *Hypocykloiden är den linie, som beskrifves af en punkt på en cirkels omkrets, då denne rullar utan att glida på inre sidan af en gifven cirkel.*

Vi låta O_1C eller $c\gamma$ (fig. 60) vara den gifna cirkelns radie, på hvilken befinner sig den rullande cirkelns medelpunkt O; vi låta vidare OP eller $\varrho_{-\sigma}$ vara den i negativ led beskrifvande radien samt lägga genom $P \stackrel{s}{=}$ begynnelseläge D på den gifna omkretsen vår grundrigtning O_1BD. Enär $\varrho_{-\sigma} \stackrel{s}{=}$ begynnelserigtning OA sammanfaller med vår grundrigtning O_1B, så hafva vi blott att verkställa reduktion till det nya origo O_1 förmedelst $(c-\varrho)_\gamma$, då vi följaktligen få

$$x + y_{\frac{1}{2}\pi} = (c-\varrho)_\gamma + \varrho_{-\sigma} \;\ldots\ldots\ldots (78),$$

der x och y äro de rätvinkliga koordinaterna O_1B och BP. Om till (78) fogas vilkoret $c\,.\,\gamma = \varrho(\sigma+\gamma)$ eller, som är detsamma:

$$(c-\varrho)\,.\,\gamma = \varrho\,.\,\sigma \;\ldots\ldots\ldots\ldots (79),$$

så fås efter eliminering af σ mellan (79) och projektionerna af (78) följande eqvationer

$$\left.\begin{aligned} x &= (c-\gamma)\operatorname{Cos}\gamma + \varrho\operatorname{Cos}\frac{c-\varrho}{\varrho}\cdot\gamma \\ y &= (c-\varrho)\operatorname{Sin}\gamma - \varrho\operatorname{Sin}\frac{c-\varrho}{\varrho}\cdot\gamma \end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots (80),$$

såsom representerande hypocykloiden.

Lemniskatan.

76. Def. *Lemniskatan är en kontinuerlig följd af punkter P (fig. 61), hvilka fixeras af tvenne från hvar sitt origo O och A utgående föränderliga komplexer r_θ och u_λ, hvilkas modyler bilda en konstant produkt.*

Om vi sätta $OA = 2a$ och låta från dess midtpunkt B en komplex ϱ_σ äfven fixera P, så ha vi att sätta likheterna

$$\left.\begin{aligned} r_\theta &= a + \varrho_\sigma \\ \varrho_\sigma &= a + u_\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (81),$$

hvartill bör fogas vilkoret

$$ru = \text{konstant} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (82).$$

För att nu uttrycka linien i ϱ och σ, ha vi att (81) taga produkten af r_θ och u_λ, då

$$(ru)_{\theta+\lambda} = (\varrho_\sigma + a)(\varrho_\sigma - a) = (\varrho_\sigma)^2 - a^2 \quad \ldots (83),$$

hvaraf följer, då modylerna tagas å ömse sidor:

$$(ru)^2 = \varrho^4 + a^4 - 2a^2\varrho^2 \operatorname{Cos} 2\sigma,$$

eller, då i (82) ru efter vanligheten sättes $= a^2$:

$$\varrho^2 = 2a^2 \operatorname{Cos} 2\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (84),$$

hvilket således är lemniskatans eqvation i ϱ och σ.

Vilja vi åter uttrycka lemniskatan i rätvinkliga koordinater, så ha vi att i (83) sätta $\varrho_\sigma = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ samt taga modylerna å ömse sidor, då

$$a^4 = (x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2$$

eller

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (85).$$

77. Vi vilja belysa vår geometriska metod genom följande exempel, hvilket visar, huruledes man genom några enkla konstgrepp kan med synnerlig lätthet lösa uppgifter, hvilka annars erbjuda icke obetydliga svårigheter.

En triangel med konstant bas a är gifven; finn i rätvinkliga koordinater eqvationen för den af spetsen beskrifna linien, då

α) den yttre vinkeln är = n gånger den inre,
β) den ena basvinkeln är = n gånger den andra,
γ) den ena basvinkeln är = n gånger vinkeln vid spetsen.

De geometriska likheter, hvilka motsvara dessa tre fall, äro

$$\varrho_\sigma = a + r_{n\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha),$$

$$\varrho_\sigma = a + r_{\pi - n\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta),$$

$$\varrho_\sigma = a + r_{\sigma + \frac{1}{n}\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma).$$

Genom att multiplicera (α) med $(\varrho_{-\sigma})^n$ erhålles

$$\varrho^2(\varrho_{-\sigma})^{n-1} = a(\varrho_{-\sigma})^n + r\varrho^n$$

eller, då vi sätta $\varrho_\sigma = x + y_{\frac{1}{2}\pi}$ och följaktligen $\varrho_{-\sigma} = x - y_{\frac{1}{2}\pi}$, utveckla efter binomialteoremet och taga de vinkelräta projektionerna å ömse sidor:

$$(x^2 + y^2)\left\{ - \frac{n-1}{1} x^{n-2} y + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} x^{n-4} y^3 - \ldots \right\}$$

$$= a \left\{ - \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 - \ldots \right\} \quad \ldots \quad (\alpha').$$

Genom att åter multiplicera (β) med $(\varrho_\sigma)^n$ erhålles

$$(\varrho_\sigma)^{n+1} = a(\varrho_\sigma)^n + \varrho^n . r_\pi$$

eller, då ϱ_σ ersättes af $x + y_{\frac{1}{2}\pi}$, binomen utvecklas och de vinkelräta projektionerna sättas lika:

$$\frac{n+1}{1} x^n y - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} x^{n-2} y^3 + \ldots$$

$$= a \left\{ \frac{n}{1} x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots \right\} \quad \ldots \quad (\beta').$$

Genom att slutligen i (γ) öfverflytta a och multiplicera båda sidorna med $1_{-(\sigma + \frac{1}{n}\sigma)}$ fås

$$\varrho_{-\frac{1}{n}\sigma} - a_{-(\sigma + \frac{1}{n}\sigma)} = r,$$

hvilken likhet genom upphöjning till $n^{\underline{te}}$ dignitet och efter en enkel anordning blir

$$\varrho^{n-1}.(\varrho_{-\sigma})-\frac{n}{1}a\varrho^{n-3}.(\varrho_{-\sigma})^2+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2\varrho^{n-5}.(\varrho_{-\sigma})^3-\ldots = r^n.$$

Då i denna likhet $\varrho_{-\sigma}$ ersättes af $x-y_{\frac{1}{2}\pi}$, binomen utvecklas och de vinkelräta projektionerna sättas lika, så blir, efter bortdividering af ϱ, den sökta liniens eqvation följande:

$$(x^2+y^2)^{\frac{n-2}{2}}.(-y)-\frac{n}{1}a(x^2+y^2)^{\frac{x-4}{2}}.(-2xy)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2(x^2+y^2)^{\frac{n-6}{2}}.(-3x^2y+y^3)-\ldots = 0\ \ldots (\gamma').$$

För $n = 2$ representera eqvationerna (α'), (β') och (γ') i ordning cirkeln, hyperbeln vch Pascals snäcka *.

78. Om komplexen ϱ_σ beskrifver någon linie, så beskrifver komplexen $k_v\,.\,\varrho_\sigma$, der k_v = konstant, en *likformig* (homotetisk) linie med ett begynnelseläge, som i förhållande till den förras är bestämdt af $\wedge\, v$. Vi vilja nu genom ett exempel visa, huru vi ega att behandla uppgifter rörande dylika linier.

En till formen oföränderlig triangel BCD (fig. 62) *är med en af sina spetsar fästad i en gifven punkt B. Om den andra spetsen C rör sig på en gifven linie AC, så frågas efter eqvationen i rätvinkliga koordinater för den af den tredje spetsen D beskrifna linien.*

Om, i förhållande till O som origo och $OA \,//\, BC$ som grundrigtning, OB utmärkes med c_γ, BC med ϱ_σ, BD med

---

* Den anförda vinkelegenskapen hos dessa tre linier leder, som man lätt finner, till lösning af den vidtberyktade uppgiften, «vinkelns tredelning«, dock, såsom af sig sjelf förstås, med konstruktions-postulat, som ligga utom den elementära geometrien (jfr N:o 229 af Todhunters Öfningssatser till Euklides [F. W. Hultman, 1 uppl.] jemnte Tychsens Tidskrift för matematik, 1868 Aug.—Sept.).

$k\varrho_{\sigma+v}$, OC med r_θ och OD med u_λ, så ha vi att sätta likheterna

$$r_\theta = c_\gamma + \varrho_\sigma \quad \text{och} \quad u_\lambda = c_\gamma + k_v \,.\, \varrho_\sigma,$$

då triangeln är af oföränderlig form, så snart k_v är konstant.

Genom att eliminera ϱ_σ mellan dessa eqvationer fås

$$u_\lambda = c_\gamma + k_v \,.\, r_\theta - k_v \,.\, c_\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (86),$$

hvilken likhet, så snart eqvationen för den gifna linien r_θ är bekant, ger oss eqvationen för linien u_λ i rätvinkliga koordinater x och y, då nämnligen u_λ sättes $= x + y_{\frac{1}{2}\pi}$.

Om r_θ antages beskrifva en konisk sektion

$$r(1 + e \operatorname{Cos} \theta) = p \quad \ldots\ldots\ldots (87)$$

med O som origo och OA som grundrigtning, så elimineras r och θ mellan (87) och (86) i enlighet med det i § 72 angifna förfaringssättet, då den sökta eqvationen blir

$$\sqrt{\{x - c\operatorname{Cos}\gamma + kc\operatorname{Cos}(\gamma+v)\}^2 + \{y - c\operatorname{Sin}\gamma + kc\operatorname{Sin}(\gamma+v)\}^2} \quad \ldots$$
$$+\, e\{x\operatorname{Cos}v + y\operatorname{Sin}v - c\operatorname{Cos}(\gamma - v) + kc\operatorname{Cos}\gamma\} = kp \,..\, (88)^*.$$

78. De i det föregående utförda härledningar af liniers eqvationer äro till sin uppställning ytterst grundade på geometriska likheter af formen $u = a + b \,.\, v$, der de ingående bokstäfverna representera komplexer eller deras projektioner, och der u och v äfvensom stundom a äro föränderliga. Det innehåll, som låter utveckla sig ur denna enkla funktionsform, berör, som vi sett, hela den plana analytiska geometriens område, sådant detta för närvarande är begränsadt. Den utvidgning, som detta område måste vinna, då vi öfvergå från denna enkla funktionsform till en funktionsform af hvad slag som helst $r_\theta = f(\varrho_\sigma)$, bör icke blifva mindre än den, som algebran vunnit, då man inom henne öfvergått från första gradens eqvationer till

* Förmedelst denna eqvation kan man lösa uppgiften att lägga en triangel af gifven form så, att han stödjer en af sina spetsar på en konisk sektion och de två öfriga på hvar sin af två gifna linier.

eqvationer af högre algebraisk eller ock transcendent form. Vi blifva ock, som vi skola se, allt framgent i tillfälle att, vid studium af komplexernas funktionsteori, besanna rigtigheten af detta analogislut, hvarvid skall visa sig, huruledes man genom den geometriska kalkylens enkla och viga metoder med lätthet kan lägga i dagen geometriska sanningar af djup och stor betydelse, hvilkas åtkomlighet på annan väg knappt låter tänka sig som möjligt.

(Forts.)

AFDELNING III.

Enkla pendeln.

Af Rob. Thalén.

Följande elementära härledning af formeln för den enkla pendelns svängningstid torde förtjena att bli allmännare känd *. Den grundar sig derpå, att svängningstiderna för en vanlig enkel pendel och för en konisk ** af samma längd äro lika stora.

1. Låt l beteckna pendelns längd,
   g tyngdkraftens acceleration, samt
   α den vinkel, pendeltråden hos den enkla pendeln gör med lodlinien i det ögonblick han vänder.

Antag vidare, att pendelkulan i sistnämnda ögonblick erhåller en stöt, i vinkelrät rigtning mot det ursprungliga

* Vi hafva hemtat densamma från Prof. A. J. Ångströms föreläsningar i allmän fysik.

** Som bekant härleder sig namnet konisk pendel deraf, att denna pendel under en hel omsvängning alstrar en kon-yta. Den vanliga enkla pendeln, som under sin svängning alstrar en plan sektor, borde i enlighet med denna benämning kallas plan sektorpendel; — men vi bibehålla den en gång häfdvunna terminologien.

svängningsplanet och så afpassad till sin styrka, att kulan kommer att beskrifva en *cirkel* i horizontalplanet, så måste samtidigt inträffa, att tråden beskrifver en kon i rymden, att vinkeln α ständigt förblir densamma och att kulans hastighet i banan äfvenledes blir konstant. Att hastigheten i närvarande fall verkligen förblir *konstant*, beror derpå, att, såsom vi genast få se, *ingen* accelererande kraft verkar längs banans *tangent*. Det är således endast i följd af sin »tröghet», kulan i nämnda rigtning framhärdar i sin rörelse, och detta sker med den hastighet, hon genom stöten en gång erhållit.

I hvarje ögonblick verka nu *två* krafter på kulan, nämnligen *tyngdkraften* i lodrät rigtning och *spänningen* i tråden. Om nu tyngdkraften sönderdelas i tvenne komposanter, den ena längs trådens rigtning, hvilken kraft genom spänningen i tråden upphäfves, och den andra längs cirkelradien, så blir det just denna sistnämnda kraft, som tvingar kulan att beskrifva den cirkulära banan och derför utgör den s. k. *centripetalkraften.*

En uppritad figur (63) ger på grund häraf eqvationen

$$\frac{\textit{centripetalkraften}}{\textit{tyngdkraften}} = \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Om nu r betecknar kulans horizontela afstånd från lodlinien, längs hvilken tråden ställer sig, då han är i hvila,

v kulans konstanta hastighet i banan, samt

t tiden för hennes rörelse under ett *halft* hvarf,

erhålles vid insättning i (1), enär $\frac{v^2}{r}$ är måttet på centripetalkraftens acceleration *,

$$\frac{v^2}{rg} = \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

* Ett enkelt bevis för, att $\frac{v^2}{r}$ är måttet på centripetalkraftens acceleration, skola vi måhända en annan gång få tillfälle att anföra.

Men enligt definitionen på konstant hastighet måste

$$v = \frac{\pi r}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

och ur figuren erhålles omedelbart

$$r = l \sin \alpha ,$$

i följd hvaraf, efter eliminering af v och r ur (2), den *exakta* formeln för svängningstiden hos en *konisk* pendel blir

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g} \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Antages pendeltråden göra en *liten* vinkel med lodlinien, kan $\cos \alpha$ *approximativt* utbytas mot 1, hvarigenom

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

blir uttrycket på den *tid, som en konisk pendel, under ofvan gjorda antaganden, behöfver för att genomlöpa ett halft hvarf af sin bana.*

2. Denna formel (5) gäller äfven för den i ett och samma plan svängande *enkla* pendeln, ty man kan bevisa, att tiden för den koniska pendelns rörelse under ett halft hvarf i dess *cirkulära* bana är precist lika lång, som tiden för en enkel svängning hos en med den nyssnämnda *lika lång* vanlig pendel i dess såsom *rätlinig* ansedda bana, hvarvid vi naturligtvis antaga utslagsvinklarne vara ytterst små; eller, hvilket blir detsamma, att den förra pendelns kula hinner tillryggalägga *180° af cirkelperiferien* på samma tid, som den sednare rör sig längs *diametern* i en lika stor cirkel.

Giltigheten af nyssnämnda påstående kan inses på den grund, att rigtningen hos den plana pendelns ursprungliga svängningshastighet är *vinkelrät* mot rigtningen hos den hastighet, som genom stöten blifvit meddelad, i följd hvaraf denna senare icke kan inverka störande på den förra. Visserligen kommer kulan att nu röra sig i en cirkel, men som denna rörelse uppkommit genom sammansättning af tvenne rätliniga och af hvarandra fullkomligt oberoende rörelser, nämnligen längs diametern och vinkelrätt deremot, måste hon ock kunna tänkas åter uppdelad längs samma rigtningar i tvenne samtidiga och rätliniga rörelser, hvilka alltså, med afseende på sina hastigheter, måste vara af hvarandra oberoende. Hastigheten längs den ursprungliga svängningsriktningen i pendelplanet måste följaktligen *efter* stöten förbli densamma, som den var *före* stötens meddelande.

Genom ett enkelt experiment kan man äfven finna detta förhållande bekräftadt. För detta ändamål upphänger man tvenne likadana pendelkulor på lika långa trådar och undersöker, genom att låta dem någon tid svänga bredvid hvarandra, huruvida deras svängningstider äro lika stora. Antages detta vilkor vara uppfyldt, och man sedan i det ögonblick, då de båda kulorna befinna sig på sina största afstånd från de respektiva lodlinierna, åt den ena af dem ger en stöt, på det redan omnämnda sättet, vinkelrätt mot svängningsplanet, hvarigenom en cirkelformig rörelse hos kulan uppkommer, så finner man dervid, att denna kula behöfver lika lång tidslängd för sin rörelse längs periferien, som den andra fram och åter i sin bana.

Ett *annat* bevis för samma sak erhålles, om den konstanta hastigheten hos den koniska pendelns kula sönderdelas parallelt med en diameter i den horizontalcirkel, längs hvars periferi kulan rör sig. Jemnföra vi nu med hvarandra rörelserna hos kulan och hos hennes projektion på diametern, så inses omedelbart, att dessa båda punkter måste sammanträffa vid diameterns ändpunkter och att de således måste hafva lika långa svängningstider. Vore nu denna diameter till sin rigtning parallel med den plana pendelns svängningsplan, och till sin längd lika stor med hela svängningsbågen för sistnämnda pendel, så kan med lätthet bevisas, att den omnämnda hastighetskomposanten till sin storlek är steg för steg lika med den verkliga hastigheten hos den plana pendelns kula, hvaraf slutligen följer, att äfven svängningstiderna för den koniska och den plana pendeln måste vara lika stora.

Ett sådant bevis finnes äfven på flere ställen meddeladt *, hvarför vi ej anse det nödvändigt att här återgifva detsamma.

3. Enär det vid den elementära undervisningen i fysik aldrig kan, med afseende på pendeln, bli fråga om någon annan svängningstid än den, som svarar mot *oändligt små* bågar, torde föregående deduktion af den koniska pendelns svängningstid i förening med ettdera af de ofvannämnda bevisen för liktidigheten i de båda pendlarnas svängningsperioder, kunna anses vara alldeles tillräcklig för att inse giltigheten af formeln (5). På grund af sin enkelhet synes den ock böra få företrädet framför de långa och svårbegripliga härledningar, som i våra vanliga läroböcker oftast förekomma. Och detta torde så mycket hellre kunna ske, som sistnämnda kalkyler, oaktadt sin afskräckande vidlyftighet, ändock icke räcka till för ett fullständigt angifvande af det i eqvationen (5) gifna uttrycket för den enkla pendelns svängningstid, hvilket vanligen anföres under slutligt åberopande af »högre kalkyl».

Satserna 1–6, lösta af C. B. S. Cavallin **,

elev vid Östersunds högre elem.-läroverk.

1. Låt O vara den gifna punkten och AB den gifna räta linien.

---

* T. ex. i Jamins och Müller-Pouillets läroböcker.

** Fullständiga lösningar af dessa satser 1—6 hafva af Hr Cavallin blifvit insända. De erforderliga bevisen äro dock så nära lika hvarandra, att vi ej ansett oss behöfva här intaga flere, än ett och annat af dem. För de öfriga satserna antydas endast konstruktionerna.

Konstruktion. Drag genom O vertikallinien OC, fäll från O perpendikeln OD mot AB, skär $\wedge DOC$ midt i tu genom räta linien OE och drag $EF // OD$.

Emedan $EF // OD$, så är $\wedge FEO = \wedge DOE$, men $\wedge DOE = \wedge FOE$, således $FE = FO$. Om således F tages till medelpunkt för en cirkel med radien FO, måste denna cirkel tangera AB i E. Sammanbindningslinien OE är den *sökta* linien, utefter hvilken falltiden från punkten O till linien AB blir *kortast.*

Bevis. Vore icke OE den sökta linien, så antag, att en annan linie OL hvilken som helst, dragen från O till AB, vore det. Emedan OL alltid kan uppdelas i tvenne delar, nämnligen kordan OK och det utanför cirkeln belägna stycket KL, så följer deraf, att falltiden längs OL måste vara $>$ falltiden längs OK, hvilken sistnämnda falltid åter, enligt Galilei sats, är lika stor med falltiden längs den till samma cirkel hörande kordan OE. Följaktligen måste OE vara den räta linie, längs hvilken en partikel, utan begynnelsehastighet, faller på *kortaste* tid från O till AB.

2. Drag genom den gifna punkten O en horizontel linie OM till den gifna räta linien AB, afsätt på AB uppåt från M ett stycke MN lika stort med OM, så blir NO den sökta linien. För bevisets skull uppritas sedan en cirkel, som i O och N tangerar de båda linierna OM och MN.

3. Låt O vara den gifna punkten och AEB den gifna cirkeln. Genom O drag vertikallinien OP och genom den gifna cirkelns medelpunkt C diametern $AB // OP$. Förena dessutom O med den *nedra* ändpunkten af diametern AB och låt sammanbindningslinien dervid skära cirkelperiferien i E. Låt vidare en från C genom E dragen rät linie träffa OP i F, och tag denna sistnämnda punkt till medelpunkt för en genom O gående cirkel, så inses lätt, att

denna cirkel måste i E tangera den gifna cirkeln. Med tillhjelp af Galilei sats finner man sedan utan svårighet, att OE är den *sökta* linien.

4. Sammanbind den *öfversta* punkten på den gifna cirkelns vertikala diameter med den gifna punkten, så blir den *utanför* cirkeln belägna delen af sammanbindningslinien den linie, som söktes. För bevisets skull uppritas sedan en cirkel, som går genom den gifna punkten och tangerar den gifna cirkeln i den punkt, hvarest sistnämnda cirkel skäres af sammanbindningslinien.

5, 6. Konstruktionerna äro här analoga med dem, som erfordrats för satserna 4 och 3 respektive.

AFDELNING IV.

Anmälda Skrifter.

1. Plan trigonometri af Lars Phragmén, lektor vid Örebro elementarläroverk. Stockholm 1868. Girons förlag. Pris 1 rdr 50 öre. 100 sidd. 8:o.

Det är oss ett kärt nöje att härmed för våra läsare få presentera detta goda, gedigna och för sin matematiska skärpa utmärkta arbete. Det är intet hastverk. Ingenting deri synes nedskrifvet utan efter mogen öfverläggning.

Arbetet sönderfaller i tvenne kurser: en mindre för latinlinien, endast afseende trianglars beräkning, samt en större för reallinien och för sådane, som vilja fortsätta sina matematiska studier.

Det utmärkande i Phragméns trigonometri är följande:

1. De trigonometriska funktionerna äro definierade ej såsom linier utan såsom tal (= förhållanden emellan tvenne sidor i en rätvinklig triangel).

2. Formlerna för trianglars beräkning äro härledda på rent geometrisk väg synnerligen elegant. Detta är en stor förtjenst. Man liksom ser formeln i figuren. Särskildt förtjenar framhållas författarens geometriska bevis för de båda formler, som vanligen användas vid trianglars beräkning, då två sidor och mellanliggande vinkel eller då alla tre sidorna äro gifna *.

3. Bevisen för de båda grundformlerna

$$\text{Sin}\,(a + b) = \text{Sin}\,a\,\text{Cos}\,b + \text{Cos}\,a\,\text{Sin}\,b\,,$$

$$\text{Cos}\,(a + b) = \text{Cos}\,a\,\text{Cos}\,b - \text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,b$$

äro på ett enkelt sätt medelst projektionsteorien härledda och det så, att man klart inser deras allmängiltighet för alla möjliga reella värden på a och b.

4. Utom teorien för de direkta trigonometriska funktionerna har förf. en teori för arcusfunktionerna, deri han bland annat visar sammanhanget mellan mångtydiga och entydiga arcusfunktioner. Sålunda har han för Arcsinfunktionen formeln

$$\text{Arcsin}\,((a)) = k\pi + (-1)^k\,\text{Arcsin}\,a\,.$$

Vidare lär han, huru man skall sammanslå summan af eller skilnaden mellan tvenne arcusfunktioner till en enda.

5. Förf. har en temligen utförlig teori om hjelpvinklar och om deras begagnande vid lösning af andra och tredje gradens eqvationer, samt vid beräknandet af vidlyftiga uttryck, der logaritmisk kalkyl erfordras.

6. Problemen äro praktiska och intressanta.

7. Resultaten äro noga uträknade. Då obekanta storheter erhållas ur kosinus för små vinklar eller ur sinus för vinklar nära 90°, framställer förf. andra formler, hvilka gifva noggrannare värden. Tillvaron eller bristen af ett streck under sista decimalen bestämmer öfverallt hela boken igenom, huruvida sista decimalen i förf:s räkneexempel är för hög eller ej, alldeles i likhet med Schrön och Schlömilch i deras tabellverk.

---

* Beviset för den förra formeln finnes framstäldt i denna tidskrifts första häfte sid. 14. Prof. Grunert, som i sin berömda tidskrift Archiv der Mathematik und Physik, häftet 2 innevarande år, aftryckt detta bevis, säger det vara "überaus elegant und zierlich". I förbigående torde böra anmärkas, att ett annat också elegant bevis för samma formel finnes anfördt på sid. 69 i vår tidskrift under rubriken: trigonometrisk sats af D—g. Detta sista bevis framkommer ock i Dillners användning af den geometriska kalkylen på triangeln, se sid. 217.

Phragméns bevis för senare formeln sammanfaller alldeles med D—gs sid. 70 i denna tidskrift. Begge hafva dock skrifvit oberoende af hvarandra.

8. I slutet af sin bok har förf. ett kapitel, hvarest han ur formelsystemet

$$a = b \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} B\,^*$$

eller ur systemet

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A\,^*$$

härleder de öfriga trigonometriska formlerna.

9. Ej bör förglömmas den eleganta formelsamling, hvarpå förf. bjuder. Som exempel härpå anföra vi endast följande tvenne:

$$\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C = 4 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} \operatorname{Sin} \frac{B+C}{2} \operatorname{Sin} \frac{C+A}{2} + \operatorname{Sin}(A+B+C),$$

hvilken gäller för alla möjliga värden på A, B och C;

$$\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C + \operatorname{Sin} D = 4 \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} . \operatorname{Sin} \frac{B+C}{2} . \operatorname{Sin} \frac{C+A}{2},$$

hvilket gäller, då summan af alla fyra vinklarne utgör fyra räta.

10. Figurerna äro tryckta i texten på behöriga ställen. Papper och tryck äro vackra.

Som vi se, vittnar allt om gedigenhet. Genom sin skärpa, genom sina allmängiltiga bevis och genom försinligandet af åtskilliga trigonometriska formler är detta arbete egnadt att lägga en säker grundval för kommande studier.

En fråga kan jag dock icke underlåta att ställa till förf. *Hvarföre uppskjuter Ni ända till sista kapitlet i Eder till sitt omfång ej obetydliga bok att göra Edra läsande elever bekanta med formeln*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A \quad ?$$

Denna formel, sinusteoremet jemnte de här ofvan nämnda grundformlerna för utvecklingen af $\operatorname{Sin}(A+B)$ och $\operatorname{Cos}(A+B)$ anser jag som de vigtigsste i trigonometrien. Med inga trigonometriska formler får man i sina följande matematiska studier röra sig så mycket som med dessa. Dessutom äro de i förening med definitionerna på sinus, kosinus, tangent och kotangent fullt tillräckliga för trianglars lösning. En trigonometri för latinlinien skulle derföre enligt min åsigt innehålla just detta, som jag nu anfört.

För en kommande upplaga vore det nyttigt, om förf. vid andra händelsen, sid. 9, der man har gifna två sidor och en motstående vinkel, äfven upptoge ett exempel, der triangeln blefve rätvinklig, och ett, der han blefve omöjlig. I allmänhet vore det önkligt, om förf. emellanåt haft en och annan uppgift, som ledt till en sinus eller kosinus

* De öfriga eqvationerna erhållas genom permutering af bokstäfverna.

större än 1 eller till en imaginär tangent o. s. v. Sådana exempel äro mycket upplysande, föranleda mycken reflexion och äro mycket pikanta.

Jag slutar med att uttala den öfvertygelsen, att detta författarens arbete kommer att blifva till mycket gagn för vårt fäderneslands studerande ungdom.

F. W. Hultman.

2. Den analytiske geometries begyndelsegrunde af H. G. Zeuthen. Kjøbenhavn 1867.

Denna lärobok i elementen af den plana analytiska geometrien, ehuru närmast afpassad efter danska examensförhållanden, synes, med afseende på fullständighet och tillgodogörande af de nyaste forskningar inom geometrien (Salmon, Plücker), såsom elementarbok betraktad icke lemna någonting öfrigt att önska. Äfven i vårt land torde derföre denna bok med fördel kunna användas vid studiet af den analytiska geometriens element.

Om den aritmetiska undervisningsmetoden.

1. Diskussion om undervisningen i aritmetik.
Af lektor Guldbr. Elowson.

2. Genmäle till herr lektor Hultman.
Af Isidor Smedberg.

3. Svar på herr Smedbergs genmäle.
Af lektor Hultman.

Såvida redaktionen af «Tidskrift för Matematik och Fysik« anser lämpligt att diskutera undervisningen i aritmetik, så tager sig undertecknad härmed friheten inleda en dylik diskussion. Närmaste anledningen dertill är en i tidskriftens 5:te häfte, sidd. 233—244, intagen «Anmälan af tio stycken räkneböcker« af F. W. Hultman. Innehållet i närvarande uppsats kommer derföre att bestämmas med hufvudsakligt afseende på innehållet i omnämnda «Anmälan«. De «stora skiljaktigheter«, som H. * funnit i de anmälda «tio stycken räkneböcker«, anser han härflyta af tvenne olika åsigter om den aritmetiska undervisningens mål. Olikheten emellan dessa båda åsigter angifves. Anhängarne af den ena åsigten vilja «lära eleven klart inse lagarne för de aritmetiska operationerna«, hvilken insigts förvärfvande antydes ske derigenom, att

* Dermed beteckna vi: F. W. Hultman.

lärjungen först inhemtar regel, derefter beviset för densamma och slutligen, sedan han fått regeln bevisad, räknar mekaniskt. Den andra åsigtens anhängare vilja «utbilda elevens förmåga af tankearbete på aritmetiska uppgifter och derigenom indirekt äfven på frågor inom öfriga delar af mensklig forskning«, hvilket antydes skola ske derigenom, att man låter lärjungen deducera reglerna för de aritmetiska operationerna ur en samling af exempel. Sedan de båda olika åsigterna sålunda blifvit karakteriserade, inrangeras jag på grund af E-L-B. * ibland den förra åsigtens anhängare, hvaremot H. «obetingadt« sluter sig «till den den åsigten, som afser tankeverksamheten för hufvudsaken«. Den diskussion, som jag härmed velat inleda, bör i ett af sina moment utgöra en undersökning af, huruvida sjelfva punctum quæstionis är af H. rigtigt angifven, alldenstund min personliga åsigt om undervisningen i aritmetik är i afseende på nödvändigheten af lärjungens sjelfverksamhet alldeles lika med, hvad H. förklarat vara sin åsigt. H. synes också vilja anse alla de anmälda räkneböckerna, följaktligen äfven E-L-B., såsom en protest emot hvarje undervisningsmetod, som möjligen kunde hafva något annat syftemål än att «begripa hvad man lär«. Om giltigheten af denna sats äro vi väl alla lifligt öfvertygade. Den närmare utvecklingen af mina åsigter angående undervisningen i aritmetik innehålles naturligtvis i E-L-B. I saknad af en dylik objektivt gifven utveckling af H:s pedagogiska åsigter i detta ämne antager jag honom hylla den hevristiska metoden, hvaraf vi hafva en representant i K. P. Nordlunds Räkneöfningsexempel, hvilket antagande jag grundar derpå, att han anser dessa räkneöfningsexempel såsom ett pedagogiskt mästerstycke. Jag kommer derföre i det följande att omnämna dessa räkneöfningsexempel och beteckna dem med R-Ö-E. **

Uti ett kort företal angifver E-L-B. såsom mål för undervisningen i aritmetik «en klar och tydlig uppfattning af lagarne för aritmetikens räkneoperationer samt säkerhet och färdighet i dessa räkneoperationers användning i enskilda fall.« Dermed angifves detta mål innefatta tre moment, nämnligen 1) en klar och tydlig, d. v. s. begreppsmässig uppfattning af lagarne för aritmetikens räkneoperationer, 2) säkerhet i räkneoperationernas användning på enskilda fall och 3) färdighet i räkneoperationernas utförande. Lärjungen bör således komma derhän, att han känner betydelsen af de särskilda räkneoperationerna, att han kan i begripliga ordalag redogöra för

* Dermed beteckna vi: Elementar-Lärobok i Arithmetik af Guldbrand Elowson, Upsala 1868.

**) Naturligtvis kan här icke blifva fråga om någon recension af denna bok, då jag icke känner "grunderna för dess uppställning, anvisningar och råd vid deras användande m. m."

de förfaringssätt, han använder vid operationernas utförande, och att han kan angifva skäl för dessa förfaringssätt. Om han t. ex. skall utföra en addition i hela tal, så bör han, vare sig räkningen verkställes «i hufvudet« eller på taflan, veta hvad addition är eller åtminstone hvad som dermed åsyftas; han skall kunna tala om, huru han förfar vid uträkningen, vare sig han börjar med att sammanlägga de i addenderna förekommande enheter (af 1:sta ordningen), derefter tiotal o. s. v., eller han först sammanlägger de i addenderna förekommande högsta enheter och derefter öfvergår till enheter af någon hvilken som helst lägre ordning, eller han sammanlägger addenderna i deras helhet den ena efter den andra, och för det förfaringssätt, han verkligen använder, bör han kunna anföra giltiga skäl. Skall han t. ex. taga produkten af 758 och 643, så bör han kunna redogöra för sitt förfaringssätt, vare sig han följer schemat

$$\begin{array}{r}
758\\
\underline{643}\\
2274\\
3032\\
\underline{4548}\\
487394
\end{array}$$

eller 643(700 + 50 + 8) eller 643(700 + 60 — 2) eller hvilket annat schema som helst, och tillika säga, hvarföre han gör just så. Skall han multiplicera tvenne bråk, så måste han hafva en klar uppfattning af hvad denna operation betyder, ty eljest blir hans aritmetiska bildning högst bristfällig. Om det således är rigtigt, att lärjungen bör känna lagarne för de aritmetiska operationerna och det icke blott så, att han «känner med sig«, huru han skall förfara, utan på ett sådant sätt, att han kan i begripliga ordalag uttrycka förfaringssättet, så synes det vara nyttigt, att uttrycken för dessa lagar, hoc est reglerna, äro angifna i läroboken. Deraf följer dock icke, att reglerna skola inhemtas först och derefter räkningen vidtaga, ännu mindre, att reglerna skola läras utantill och räkningen derefter ske mekaniskt, utan reglerna d. v. s. uttrycken för de aritmetiska räknelagarne böra inläras, under det att läraren visar och undervisar lärjungarne, huru den eller den räkneoperationen skall utföras. Har t. ex. undervisningen fortskridit derhän, att en division skall på taflan utföras, så synes det mig ändamålsenligt, att läraren först sjelf uträknar ett exempel och dervid icke blott visar förfaringssättet med uppmaning till lärjungarne att se efter, huru han gör, utan äfven med tydliga ord talar om, huru han gör, och, såvidt lärjungarnes fattningsförmåga kan följa med, hvarföre han gör så eller så. Derefter bör någon af ynglingarne gå fram till taflan och räkna ett annat exempel. Han bör dervid icke allenast uppskrifva den ena siffran efter den andra, allteftersom hans räkning fortskrider, utan tilllika «räkna högt« och med ledning af läraren tala om, hvad den eller den operationen innebär, hvartill det eller det leder, hvarföre det använda förfaringssättet är berättigadt o. s. v. Uppfattningen af lagarne för de aritmetiska operationerna bör i hög grad underlättas, om lärjungen får i lärobokens regler repetera det på sådant sätt muntligt genomgångna. Vill man ur läroboken taga bort reglerna, d. v. s. ännu en gång uttrycken för de aritmetiska räknelagarne, så synes mig, att man med samma fog kunde taga bort äfven exemplen. Undervisningen i aritmetik blefve derigenom antingen helt och hållet eller åtminstone öfvervägande muntlig. Läraren finge meddela både regler och exempel.

(Forts.)

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1868.

För latinlinien.

(2 st. på 4 tim.)

1. *Trenne segmenters bågar äro lika stora äfvensom deras höjder; att bevisa deras kongruens.*

2. *Att i en gifven qvadrat inskrifva en annan, hvilkens diameter har en gifven längd.*

3. *Att upprita en triangel, som är likformig med en gifven triangel och har en gifven linie till höjd.*

4. *I en gifven cirkel är en korda apterad och på denna korda en viss punkt tagen. Att upprita en cirkel, som tangerar den gifna cirkeln i kordans ena ändpunkt och går genom den tagna punkten.*

5. *Fyra räta linier äro gifna. Att bestämma två parallelogrammer, som hafva till hvarandra ett förhållande, som är komponeradt af liniernas förhållanden.*

6. *Att upprita en cirkel, då man känner två af dess kordor samt afståndet dem emellan.*

7. *Bevisa, att diametern till den i en rätvinklig triangel inskrifna cirkeln är lika med öfverskottet, hvarmed summan af de båda kateterna öfverskjuter hypotenusan.*

8. *Upprita en cirkel, hvars periferi är lika med summan af två gifna cirklars periferier.*

(2 st. på 4 tim.)

9. I en aritmetisk serie är första termen $= 56 + a$, *näst sista termen* $= a + 2$ *och sista termen* $= a - 1$. *Huru stort är termernas antal?*

10. Uti en plan triangel är vinkeln $A = 54^\circ\,30'$ *samt sidan* $b = 825$ *fot och sidan* $c = 1300$ *fot; huru stor är triangelns area?*

11. Om ett cirkelsegments höjd $= \frac{1}{2}$ *radien, i hvad förhållande står då dess area till cirkelns area?*

12. Om ett plan, som är draget parallelt med basen i en rät kon, skär dess bugtiga yta i 2 lika stora delar, huru stort är då afståndet emellan det skärande planet och basen?

13. Om en lifränteanstalt årligen betalar 8 procent af det kapital, som en person insatt vid fylda 55 år, huru länge bör då denna person lefva för att återfå sitt kapital jemnte 6 procent ränta?

14. Huru stor är den i en cirkel inskrifna, reguliera 20-hörningens sida, om cirkelns radie är r?

15. I en geometrisk serie af 10 termer är summan af alla dem, som hafva udda ordningsnummer, 1023 och summan af alla dem, som hafva jemn ordningsnummer, 2046. Hvilka äro seriens termer?

16. Solvera eqvationen

$$(\log x)^2 - 7 \operatorname{Log} x + 11 = 0.$$

För reallinien.

(2 st. på 4 tim.)

17. Att konstruera en triangel, då man känner en vinkel vid basen, höjden och perimetern.

18. Att konstruera en triangel, då man känner en vinkel, motsvarande höjd och den inskrifna cirkelns radie.

19. Bevisa, att om man korsvis förenar ändpunkterna af tvenne parallela kordor medelst räta linier, så blifva dessa linier lika långa.

20. Bevisa, att summan af qvadraterna på delarne af tvenne mot hvarandra vinkelräta kordor är lika med qvadraten på diametern.

21. Att dela en cirkels yta midt i tu genom en annan cirkel, som i en gifven punkt tangerar den gifna.

22. Att genom en punkt, belägen i en vinkels plan, draga en rät linie, som med vinkelbenen bildar en triangel, lika stor med en gifven qvadrat.

23. Bevisa, att summan af de plana vinklar, som bilda en solid vinkel, alltid är mindre, än 4 räta vinklar.

(2 st. på 4 tim.)

24. Skilnaden mellan två tal är 63; skilnaden mellan deras qvadratrötter är 3; hvilka äro dessa tal?

25. Bevisa, att om 4 tal äro proportionela, så är summan af det största och det minsta bland dem större, än summan af de båda andra.

26. En stympad kon, som har den ena bottenradien dubbelt så stor som den andra, och höjden lika med summan af dem båda, skall rymma 50 kannor. Huru stora skola bottenradierna vara?

27. Huru stor summa skall utlånas med ränta på ränta efter 4 procent om året, för att den efter 16 år skall hafva samma värde, som 5000 Rdr, à 6 procent, efter 10 år?

28. I en triangel äro gifna: $b = 15{,}5$ *fot,* $c = 24{,}3$ *fot,* $A = 47^0\ 5'$; *huru stor är den höjd, som svarar mot sidan* a?

29. Ur en sfer, hvars radie = en fot, skall man afskära en sektor, hvars volym = en kubikfot; huru stor blir då höjden af det denna sektor tillhörande sferiska segment?

30. Två fixa punkter A och B äro gifna. Begäres locus för de punkter C, som satisfiera eqvationen

$$m \,.\, \overline{AC}^2 + n \,.\, \overline{BC}^2 = r^2,$$

i hvilken m och n betyda två gifna tal och r en linie af gifven längd.

(1 på 3 tim.)

31. Huru högt står solen öfver horizonten, om skuggan af en 5,9 fot lång karl är 110 fot lång?

32. Man har en bikonvex lins, hvars fokaldistans är 9 tum. Huru långt från linsen skall ett föremål ställas för att af det skall uppkomma en fyra gånger så bred skenbild?

33. Vid 0^0 *C. rymmer ett kärl 1,527 skålp. qvicksilfver, vid* 100^0 *C. rymmer det 1,52596 skålp. Huru stor är längdutvidgningskoëfficienten för kärlets gods? Qvicksilfrets specifika vigt är 13,596 vid* 0^0 *C.; dess utvidgningskoëfficient är = 0,00018153.*

34. En blykulas volym är 1638 kubiktum vid 81^0 *C. Till hvilken temperatur skall hon afkylas för att hon skall innehålla 1629 kubiktum. Blyets längdutvidgningskoëfficient antages = 0,0000285.*

35. Tre med luft fylda kärl hafva respektive volymerna V_1, V_2 *och* V_3, *de inneslutna gasmängdernas motsvarande pressioner äro* H_1, H_2 *och* H_3. *Om alla dessa kärl förenas med hvarandra genom rörledningar, så uppkommer en gemensam spänning hos luften, hvars storlek man önskar veta, då intet afseende fästes vid rörens volymer.*

36. Om barometern visar 760 millimeter vid jordytan, men 5,7 millimeter mindre, då instrumentet höjes 200 fot, så skall derur beräknas luftens täthet, hvilken vi antaga vara densamma hela vägen mellan dessa orter. Temperaturen anses vara 0^0; *qvicksilfrets täthet = 13,596, och 1 meter = 3,368 sv. fot.*

37. Vid + 15 grader är basen hos en af kopparplåt förgärdigad likbent triangel $3^1/_2$ tum och sidan 5 tum. Huru stort blir ytinnehållet vid upphettning till 80^0?

Kopparens liniära utvidgningskoëfficient = 0.000017.

38. Huru långt går en vigt af 5 centner på 3 minuter, om vigten utan hinder för sin rörelse hela tiden åverkas af en 10 skålp:s drifkraft?

En fritt fallande kropps acceleration antages vara 33 fot.

Kritik af ofvanstående satser.

De här ofvan meddelade satserna för den skriftliga mogenhetsexamen vid slutet af innevarande termin gifva anledning till några reflexioner.

Vi börja med de *algebraiska satserna för latinlinien.*

Mot dessa kan man anmärka, att de ej äro lämpliga för andra ynglingar än för sådane, hvilkas insigter kunna utmärkas med ett högre betyg än *godkänd.* Af de 8 satserna tillhöra nämnligen tre läran om serier, en läran om logaritmer, tvenne planimetrien, en stereometrien och en trigonometrien.

Enligt skollagen är för högsta klassens latinlinie i algebra bestämd följande kurs:

"Eqvationer af andra graden med talrika öfningsexempel jemnte problem, läran om progressioner och logaritmer samt öfning i logaritmtabellers bruk."

Som man ser, fordrar skollagen ingen trigonometri, ingen stereometri, ingen planimetri. Halfva antalet af exempel ligga således utom det af skollagen föreskrifna omfånget. Hvad åter beträffar de öfriga 4 satserna, tillhöra dessa uteslutande läran om logaritmer och serier. En yngling, som läst första och andra gradens eqvationer med en eller flere obekanta jemnte tillhörande algebraiska problem, kan således icke försöka sig på någon af ofvanstående satser, huru skicklig han än må vara inom sin kurs. Och dock kan denne yngling ganska väl hafva godkänd mogenhet i algebran. I den gamla studentexamen kunde på detta pensum gifvas till och med betyget *med beröm godkänd.* Att döma af de nu utgifna satserna berättigar detta pensum numera ej ens till betyget *godkänd.* Huru som helst härmed må förhålla sig, blir det dock alltid svårt att bedöma en ynglings mogenhet, om han misslyckas på lösningen af satser, hvilka ligga utom omfånget af hans studier. Vi hafva härpå ett nära till hands liggande exempel. Af de 10 privatister, hvilka denna gång vid Stockholms gymnasium skrifvit för mogenhetsexamen på latinlinien, fanns det en, som alldeles icke kunde lösa ett enda problem; fyra eller fem hade visserligen lösning på *ett* problem, men den var felaktig. Skollagen fordrar, som bekant, lösning af 2 problem. Månne alla dessa saknade nöjaktiga kunskaper i algebra? Vi för vår del äro ej öfvertygade derom.

Vi öfvergå nu till de *geometriska satserna på latinlinien.*

Dessa synas hafva tillkommit i brådska. Sålunda förekomma i uttrycken åtskilliga skriffel och oegentligheter. I första satsen står *trenne* i st. f. *tvenne.* I den andra begagnas ordet *diameter* i st. f. *diagonal.* Som bekant, menas med diameter en linie, som skär flere sinsemellan parallela kordor midt i tu. Denna egenskap har ej diagonalen i en qvadrat. Vi ha hört omtalas en yngling, som sade sig icke våga skrifva öfver denna sats, enär han ej visste, om ordet *diameter* var en misskrifning i st. f. *diagonal* eller i st. f. *perimeter.*

Uttrycket i satsen 5 är sväfvande. Man kan mellan 4 linier bilda 6, ja, om man så vill, 12 olika förhållanden. Är meningen att finna tvenne parallelogrammer, hvilka till hvarandra hafva ett förhållande, som är komponeradt af alla dessa 6 eller 12 förhållanden? Utan tvifvel icke. Derföre borde det heta: "som är sammansatt" (vi föredraga det svenska ordet) "af den första liniens förhållande till den andra och af den tredje liniens förhållande till den fjerde."

Uttrycket på den fjerde satsen är onödigt långt.

I sats 6 talas om afståndet mellan två kordor. Hvad förstås dermed? Af de nyss omtalta skrifningarna visar sig, att några hafva dermed förstått det minsta afståndet mellan kordorna, andra afståndet mellan kordornas midtpunkter. Andra åter ha trott, att dermed menas, att kordorna skola vara parallela.

Hvad särskildt den förste satsen beträffar, är den ej alltid sann. Det är alldeles icke nödvändigt, att segmentbågarne äro kongruenta, derföre att segmenten äro lika höga och bågarne lika långa. Tvertom svara alltid mot en gifven båglängd och en gifven höjd tvenne olika segment, det ena med en båge mindre än halfcirkeln, det andra med en båge större än halfcirkeln. För satsens sanning hade således behöfts tillägget: "med den inskränkning, att segmenten äro begge samtidigt mindre eller begge samtidigt större än halfcirkeln."

Men äfven sålunda rättad är satsen ej lämplig för skriftlig behandling vid mogenhetsexamen. Vilja vi nämnligen analytiskt behandla den, leder den till eqvationen

$$h = 2x \operatorname{Sin}^2 \frac{l}{4x},$$

der h är segmentets höjd, l bågens längd och x den obekanta radien. Som denna eqvation är transcendent, kan den ej lösas medelst elementargeometrien, såvida man ej vill införa den hos Arkimedes förekommande grundsatsen: "af linier, som äro konkava i förhållande till en och samma räta linie, och hvilka alla hafva samma ändpunkter, är en inre alltid mindre än en yttre." Denna grundsats finnes emellertid ej i våra läroböcker bevisad för annat fall, än då linierna äro sammansatta af räta linier. För kroklinier (såsom cirkeln) kunde ej ens Arkimedes bevisa den. Det är oss ej bekant, om den ännu är bevisad strängt för kroklinier hvilka som helst. Under sådana förhållanden är det ej oväntadt, att de ynglingar, som försökt sig på denna sats, misslyckats.

Vi älska att tro, att denna sats äfvensom de oegentliga uttrycken tillkommit genom ett förhastande, och vi vilja hoppas, att den skada för ynglingarne, som möjligen kunnat uppstå derigenom, att desse utan framgång fått försöka sina krafter på satser, som varit till sitt innehåll origtiga eller till sina uttryck otydliga, ej i verkligheten inträffat, enär deras examinatorer utan tvifvel insett de ogynsamma förhållanden, under hvilka de arbetat.

Till slut några ord om *satserna för reallinien.*

Samtlige de *analytiske* äro bra. I afseende på de *geometriska* bör anmärkas, att efter uttrycken *kordor* i satserna 19 och 20 bör för tydlighets skull tilläggas orden: "*i en cirkel*", alldenstund på reallinien emellanåt förekomma ynglingar, som rent geometriskt behandla äfven ellipsen, hyperbeln och parabeln, och hvilka således hafva hört talas om andra kordor än cirkelkordor. Satserna äro för öfrigt goda.

Vid de *fysikaliska* åter ha vi några anmärkningar att göra.

Hvad insigt ådagalägger den, som rigtigt löst det första problemet så lydande: "huru högt står solen öfver horizonten, om skuggan af en 5,9 fot lång karl är 110 fot lång?" Möjligen den, att han visar sig veta, det ljuset fortplantar sig rätlinigt. Problemet infaller i sjelfva verket antingen på trigonometriens eller astronomiens område.

De öfriga 7 satserna äro temligen ensidiga. Sålunda angå icke mindre än tre stycken fasta kroppars utvidgning; tvenne höra till aërostatiken, endast ett är upptaget på optiken och endast ett på mekaniken. Här förekommer intet exempel om tyngdpunkten, intet om kroppars jemnvigt, intet om kroppars fall i följd af deras tyngd, intet om speglar, intet om smältningsvärme eller om egentligt värme o. s. v.

I egenskap af skollärare och målsman för första afdelningen af denna tidskrift har jag ansett mig skyldig att göra dessa anmärkningar.

F. W. Hultman.

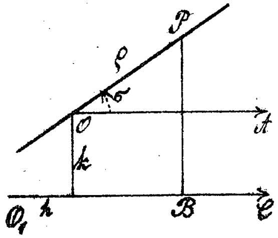


Fig. 50.

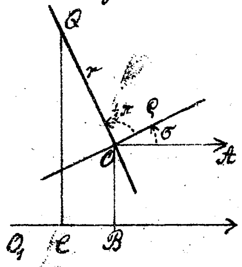


Fig. 51.

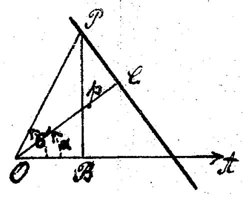


Fig. 52.

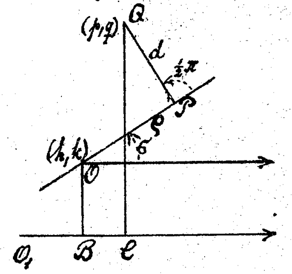


Fig. 53.

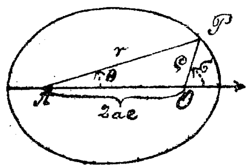


Fig. 54.

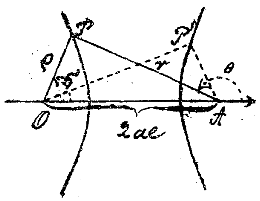


Fig. 55.

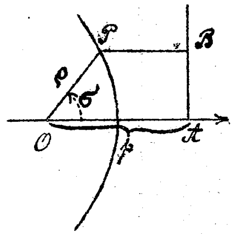


Fig. 56.

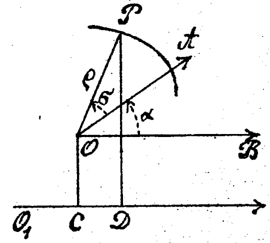


Fig. 57.

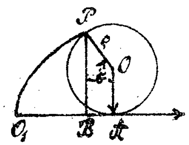


Fig. 58.

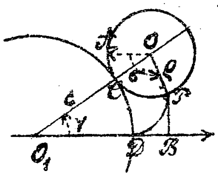


Fig. 59.

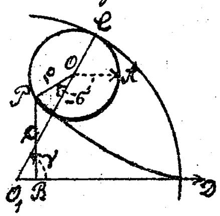


Fig. 60.

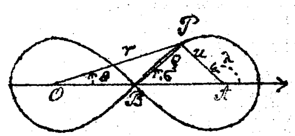


Fig. 61.

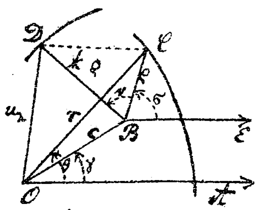


Fig. 62.

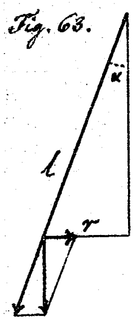


Fig. 63.